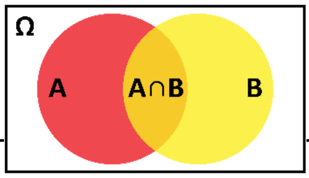
Probabilidad y Estadística

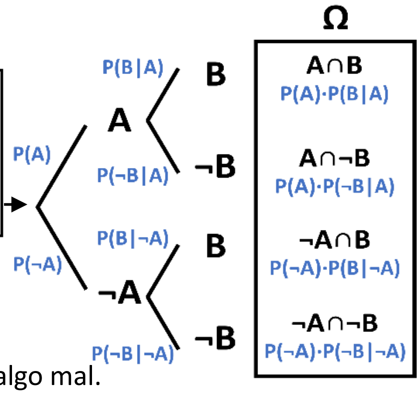
https://github.com/AdriCri22/Probabilidad-Estadistica-PE-FIB

Bloque 1 – Cálculo de probabilidades



Conjuntos/Diagramas de Venn →

Árboles



$P(A)$ → Significa probabilidad de que pase A

Propiedades:

- $0 \leq P(A) \leq 1$ → Si una probabilidad supera estos valores has hecho algo mal.
- $P(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_0) + P(A_1) + \cdots + P(A_n)$ si $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ → Unión
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ → Intersección
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ → Probabilidad condicionada $P(dato\ incierto|dato\ conocido)$

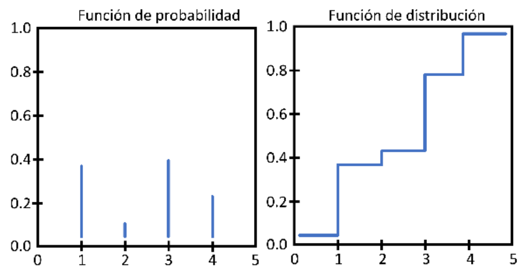
Independencia de VA → Hay 2 maneras de comprobarlo:

- Si $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$, es decir si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- Si $P(B \mid A) = P(B \mid \neg A) = P(B)$, es decir si todas las filas/columnas de la tabla de probabilidades condicionadas coinciden para A y $\neg A$.

Bloque 2 – Variable Aleatoria

Variable Aleatoria (VA) → Variable que recoge todos los posibles sucesos

- Discreta (VAD) → Cuando las variables aleatorias son números naturales
  - Función de probabilidad (p_x) → Se define a partir de cada uno de los posibles valores de k, son probabilidades puntuales.
  - Función de distribución (F_x) → Se define la probabilidad acumulada, es ir sumando las probabilidades puntuales $F_{X(k)} = P(X \leq k) = \sum_{j \leq k} p_x(j)$.



- Continua (VAC) → Cuando las variables aleatorias son decimales
  - Función de densidad (f_x) → de una VAC es la función que recubre el área dónde está definida la variable cumpliendo: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$
  - Función de distribución (F_X) → de una VAC define la probabilidad acumulada: $F_X(k) = P(X \leq k) = \int_{-\infty}^{k} f_X(x)dx$

Nota: que las probabilidades resulten en decimales es independiente a las VA.

Un **cuantil** (α) → $0 \leq \alpha \leq 1$ → X_α (cuantil α de X) si cumple $F_X(X_\alpha) = \alpha$ → es el problema inverso al cálculo de probabilidades acumuladas.

En VAC cuando pregunta
- por el mínimo → F(x) = 1 – α → Porque nos preguntan por el área superior
- por el máximo → F(x) = α

Esperanza (media)

VAD → $E(X) = \sum(k \cdot p(k))$ $\quad$ $E(X^2) = \sum(k^2 \cdot p(k))$

VAC → $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx$ $\quad$ $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx$

Variancia es el error al cuadrado (para poder representar el error por encima y debajo de esta media) de la predicción sobre una media de todas las posibilidades.

→ $V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2) - E(X)^2$

VAD → $V(X) = \sum\left[\left(k - E(X)\right)^2 \cdot p(k)\right]$

VAC → $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - E(X)\right)^2 \cdot f_X(x)dx$

Desviación tipo/estándar indica el error medio de predicción → $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Pares de Variables

Probabilidad conjunta → $P_{X,Y}(x, y) = P(X \cap Y)$

Probabilidad condicionada → $P_{X,Y}(X) = P_{X,Y}(x)/P_Y(y)$

$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2 \cdot Cov(x, y)$

Función de probabilidad conjunta

	X_1	...	X_n
Y_1			
...			
Y_n			

Covarianza → Indica el grado de dependencia hay entre variables

→ $Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

$E(X \cdot Y)$ → Se hace la tabla de probabilidades de las 2 variables aleatorias y $\sum X_i \cdot Y_i \cdot P(X_i \cap Y_i)$

VAD → $Cov(X, Y) = \sum_{\forall x}\sum_{\forall y}\left(x - E(X)\right) \cdot \left(y - E(Y)\right) \cdot p_{XY}(x, y)$

Correlación → $corr(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}, \quad -1 \leq corr(X, Y) \leq 1$

- Cuanto más cerca del 1 la relación es mayor
- Cuanto más cerca del -1 la relación es inversa
- Cuando es 0 no existe relación entre ambas variables

Integrales

$$\int 0dx = C \qquad \int kdx = kx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq 1 \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Integral definida

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Bloque 3 – Modelos de variable aleatoria

Modelos VAD:

- Modelo Bernoulli $X \sim Bern(p)$ → Sirve cuando se hace 1 solo experimento para 2 posibles resultados: 0 ("no éxito") y 1 ("éxito"). **(Valores enteros + 2 resultados 0 o 1)**

Función de probabilidad:

$$Si\ k = 0 \rightarrow P(k) = q = 1 - p$$
$$Si\ k = 1 \rightarrow P(k) = p$$

Función de distribución:

$$F_x(k) = \sum_{i \leq k} P_x(i)$$

$p =$ Probabilidad de 1 ("éxito")
$q = 1 - p =$ Probabilidad de 0 ("no éxito")

$$E(X) = p$$
$$V(x) = p \cdot q$$

- Modelo Binomial $X \sim B(n, p)$ → Número de éxitos en la repetición de n pruebas Bernoulli independientes con probabilidad constante p. **(Valores enteros + prob.)**

Función de probabilidad: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

Función de distribución: $F_x(k) = \sum_{i \leq k} P_x(i)$ (tablas)

$$E(x) = n \cdot p$$
$$V(X) = n \cdot p \cdot q$$

$p =$ Probabilidad de 1 ("éxito")
$q = 1 - p =$ Probabilidad de 0 ("no éxito")
$n =$ Número de pruebas

Nota: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ → Calculadora: n (SHIFT nCr) k

- Modelo Geométrico $X \sim Geom(p)$ → Número de intentos de un experimento de Bernoulli hasta observar el primer "éxito".

Función de probabilidad: $P(X = k) = p \cdot q^{k-1}$

Función de distribución: $F_x(k) = 1 - q^k$

$$E(x) = 1/p$$
$$V(X) = q/p^2$$

$p =$ Probabilidad de 1 ("éxito")
$q = 1 - p =$ Probabilidad de 0 ("no éxito")
$k =$ Número de intentos

- Modelo Binomial negativo $X \sim BN(r, p)$ → Número de repeticiones de un experimento de Bernoulli hasta observar cierto número de "éxitos".

Función de probabilidad: $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{k-r}$

Función de distribución: $F_x(k) = \sum_{i \leq k} P_x(i)$

$$E(x) = 1/p$$
$$V(X) = q/p^2$$

$p =$ Probabilidad de 1 ("éxito")
$q = 1 - p =$ Probabilidad de 0 ("no éxito")
$k =$ Número de repeticiones
$r =$ Número de 1 ("éxitos")

- Modelo Poisson $X \sim P(\lambda)$ → Número de ocurrencias favorables en un determinado intervalo o espacio. **(Valores enteros + tiempo)**

Función de probabilidad: $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

$k =$ Número de repeticiones

Función de distribución: $F_x(k) = \sum_{i \leq k} P_x(i)$ (tablas) $\lambda =$ Tasa media de ocurrencias por unidad considerada

$E(x) = \lambda$

$V(X) = \lambda$

Para calcular el **cuantil** $P(X \leq x_\alpha) = \alpha$

Se calcula la probabilidad acumulada de α por arriba y por abajo, es decir para las dos VA más próximas a α.

1. Si nos piden que el valor sea por debajo, pero con un mínimo → VA de arriba de α
2. Si nos piden que el valor sea por encima, pero con un mínimo → VA de debajo de α
3. Si nos piden que el valor sea por debajo, pero máximo → VA de abajo de α
4. Si nos piden que el valor sea por arriba, pero máximo → VA de arriba de α

¿Por qué? Cuantil de un mínimo → $F(x) = 1 - \alpha$, cuantil de un máximo $F(x) = \alpha$

Arriba/Abajo dependiendo de si queremos que superar o no el α.

Modelos VAC:

- Modelo Exponencial $X \sim Exp(\lambda)$ → Distribución del tiempo entre llegadas (ocurrencias) en un proceso de Poisson.

Función de densidad: $f_x(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$

Función de distribución: $F_x(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Probabilidad de pasar x tiempo sin que pase algo

$E(x) = 1/\lambda$

$V(X) = 1/\lambda^2$

$\lambda =$ Tasa media de ocurrencias por unidad considerada

- Modelo Uniforme $X \sim U(a, b)$ → Probabilidad de pertenecer a un intervalo concreto en un rango, depende de la longitud del intervalo. (**Rangos**)

Función de densidad: $f_x(x) = \dfrac{1}{b-a} \quad para\ a < x < b$

Función de distribución: $F_x(x) = \dfrac{x-a}{b-a} \quad para\ a < x < b$

$a =$ Valor mínimo del rango de X

$b =$ Valor máximo del rango de X

$E(x) = (b+a)/2$

$V(X) = (b-a)^2/12$

- Modelo Normal $X \sim N(\mu,\ \sigma)$ →

Función de densidad: $f_x(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Función de distribución: ?

$\mu =$ Esperanza

$\sigma =$ desviación estándar

$E(x) = \mu$

$V(X) = \sigma^2$

- Estandarizar (preguntan probabilidad dándonos los parámetros) $P\left(Z < \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \%$

→ $\frac{k-\mu}{\sigma} = prob.tabla$ (si $\frac{k-\mu}{\sigma}$ es negativo → $\frac{k-\mu}{\sigma} = 1 - \ prob.tabla$).

- Cuando te dan un % y 2 de tres variables ($k,\ \mu,\ \sigma$) y te piden que averigües la restante

$$P\left(Z<\frac{k-\mu}{\sigma}\right)=\%\ que\ te\ dicen \rightarrow \frac{k-\mu}{\sigma}=prob\ que\ corresponde\ en\ la\ tabla$$

TCL (Teorema Central de Límite):

- Distribución de la variable suma $S_n=\sum X_{i_{n\ gran}} \rightarrow N(n\mu,\sigma\sqrt{n}) \rightarrow \frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$
- Mitjana $\overline{X}_n=\frac{\sum X_i}{n} \rightarrow N(\mu,\sigma\sqrt{n}) \rightarrow \frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\sum X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$
- Se puede pasar de distribución binomial a normal si $n>30 \rightarrow\ \mu=E(X)\ y\ \sigma=\sqrt{V(X)}$

  Se hace cuando k es muy grande
- Se puede pasar de distribución de Poisson a normal $\rightarrow \mu=\lambda\ y\ \sigma=\sqrt{\lambda}$

  Se hace cuando k es muy grande
- Cuando piden un intervalo con probabilidad de x % $\rightarrow$ calcular $c=x+\ (1-x)/2$

  Intervalo máximo $\rightarrow P(Z<M)=P\left(Z<\frac{M-\mu}{\sigma}\right)=c \rightarrow M=\mu+\sigma\cdot c$

  Intervalo mínimo $\rightarrow m=\mu-\sigma\cdot c$

Observaciones de VAC:

- Por definición $P(X=x)=0$, por lo que $f_x(x)$ no es una probabilidad
- $P(x<a)=P(x\leq a)\quad a\in\mathbb{N}$
- Las funciones de distribución calculan $P(x<a)$ para calcular $P(x>a)=1-P(x<a)$
- $P(x<-a)=1-P(x<a)$
- $P(x>-a)=P(x<a)$

Nota: cuando nos dan los datos con ciertas unidades y nos dicen calcular con otras pasar los parámetros.

Tablas

distribución **NORMAL ESTANDARIZAI**

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	$\boxed{0.5832}$	$\boxed{0.5871}$	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664

$P(Z<0.21)=0.5832$

$P(Z\leq ?)=0.59 \rightarrow X=0.22$

Función de distribución **BINOMIAL**

N	X	0,05	0,1	0,15
2	0	0,9025	0,8100	0,7225
	1	0,9975	0,9900	0,9775
3	0	0,8574	0,7290	0,6141
	1	0,9928	0,9720	0,9393
	2	0,9999	0,9990	$\boxed{0,9966}$

$X\sim B(n=3,\qquad p=0.15)$

$P(X\leq 2)=0.9966$

$P(X=2)=P(X\leq 2)-P(X<1)=0.9966-0.9393=0.0573$

$P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-0.9966=0.0034$

Si hay que redondear se redondea al más próximo

Bloque 4 – Inferéncia estadística

Conceptos básicos:

- **Parámetro**: parte de la **población** que queremos hacer la estimación.
- **Muestra**: es una fracción del parámetro que se usa para obtener datos, ya que analizar a toda la parte de la población que queremos analizar se haría muy difícil.
- **Estadístico**: Cualquier indicador que se obtenga a partir de los datos de la muestra.
- **Estimador**: estadístico de una muestra que se usa para obtener el valor de un parámetro de la población.

Estimación puntual de μ es la media muestral $\rightarrow \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

Error tipo o error estándar es la variabilidad (valores muy dispersos) del estimador $\rightarrow se = \sigma/\sqrt{n}$

Cuando la σ es desconocida $\rightarrow \widehat{se} = 1/\sqrt{n}$

Parámetro ($\boldsymbol{\theta}$) (población)	**Estimador ($\overline{\boldsymbol{\theta}}$) (Muestra)**
μ (esperanza, media poblacional)	$\bar{x}$ (media muestral)
σ^2 (variancia poblacional) σ (desviación tipo poblacional)	s^2 (variancia muestral) s (desviación tipo muestral)
π (probabilidad)	p (proporción)

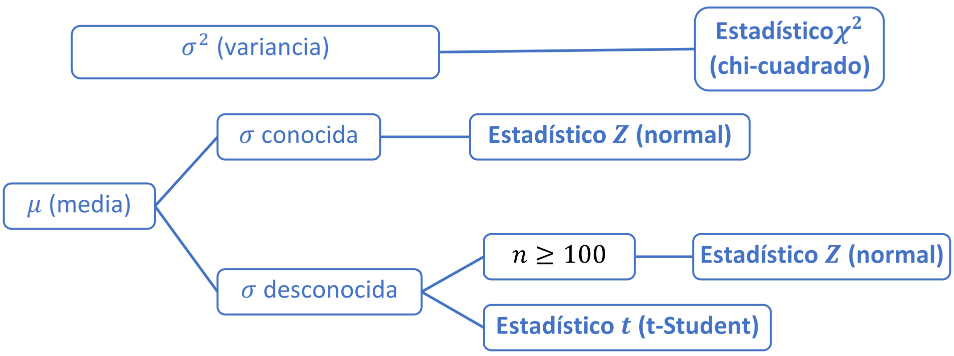
Propiedades de los estimadores:

- No tener sesgo (biaix en catalán) → Cuando la diferencia entre la esperanza y la estima es nula.
- Ser eficiente → Cuando no tiene sesgo y la variancia es menor.

Intervalos de confianza (estimar un parámetro)

Mecánica

1- Definir el estadístico usado
2- Especificar distribución



3- Indicar las premisas necesarias para decir que sigue la distribución
4- Delimitar el nivel de confianza (usualmente $1 - \alpha = 95\% \rightarrow \alpha = 5\%$)
Dónde $\alpha = 1 - porcentaje\ que\ nos\ dicen$
5- Calcular el intervalo → Usando la distribución especificada
6- Interpretar el resultado → El tanto % de las veces VA estará en el intervalo dado

El **error tipo** es igual al denominador del estadístico.

- **Error tipo de la media**: es la desviación "habitual" de la media muestral $\bar{x}$ respecto a la media de la población μ. Se calcula $S^2/\sqrt{n}$.

- **Error tipo de la proporción**: es la desviación "habitual" de la proporción de la muestra p respecto a la proporción real π. Se calcula $\sqrt{\frac{\pi\cdot(\pi-1)}{n}}$

Nota: $\pi = p$, pero si no hay diferencia → $\pi = p = 0{,}5$.

Pruebas de Hipótesis (Refutar un parámetro)

1- Escoger una variable según los objetivos del estudio (La variable que queremos demostrar)
2- Escoger un diseño y un estadístico

π (probabilidad) — **Estadístico Z Binomial**

3- Definir la hipótesis nula $H_0: \mu =$ media o $\pi =$ proporción y la hipótesis alternativa H_1
   $H_1 : \mu \neq$ media o $\pi \neq \%$ bilateral
   $H_1 : \mu \neq$ media o $\pi < \%$ unilateral
4- Especificar la distribución del estadístico si H_0 fuera cierto (y sus premisas)
5- Contrastar H_0 Dos alternativas para hacerlo
   a. Si $|z| > z_{1-\alpha}$ (unilateral) o $|z| > z_{1-\alpha/2}$ (bilateral) → H_0 Se rechaza (es poco fiable)
   b. Calcular el valor P → Si P $< \alpha$ → H_0 Se rechaza (es poco fiable)
6- Añadir la estimación para el intervalo $IC(1-\alpha)$

```
Intervalos de confianza
binom.test() # Binomial
# Estadístico t-Student
t.test(datos1, datos2, var.equal=TRUE, conf.level=prob)$conf.int  # Independientes
t.test(Diferencia*2, var.equal=TRUE, conf.level=prob)$conf.int # Apareadas
var.test() # Fisher
prop.test() # Proporciones
chisq.test() # Proporciones Pearson
```

```
mean () # Calcula la media
sd() # Calcula la desviación
var() # Calcula la variancia
pt, pf, pnorm # Para calcular el p-valor
qt, qf, qnorm # Para calcular el punto crítico
```

Bloque 5 – Diseño de experimentos

Tipos de recogida de datos:

- Muestras **independientes**: cada caso se mide de manera independiente (los datos pertenecen a una variable o a otra, no a ambas).
- Muestras **apareadas**: cada caso da lugar a dos medidas, pares de medidas (los datos pueden pertenecer a más de 1 variable a la vez).

Guía:

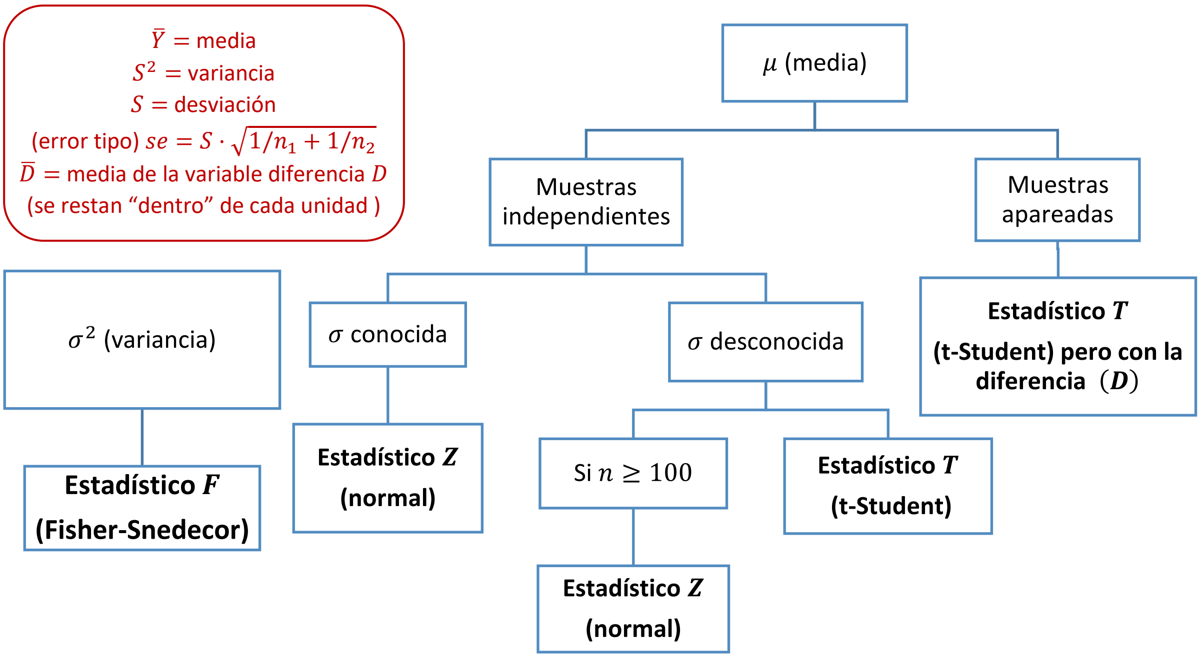
1. Definir las **variables.**
2. Decidir el **estadístico.**
3. Definir la **hipótesis**:
   i. La hipótesis nula **siempre es la misma**: H_0: $\mu_A = \mu_B$ (μ o σ^2)
   ii. La hipótesis alternativa depende de si queremos que sea
      i. Bilateral (ambos extremos): H_1: $\mu_A \neq \mu_B$ (μ o σ^2)
      ii. Unilateral (un extremo): H_1: $\mu_A < \mu_B$ o H_0: $\mu_A > \mu_B$ (μ o σ^2)
4. **Distribución** del **estadístico** que sigue H_0 y sus premisas.
5. **Calcular** el estadístico
6. Calcular el **P-valor** (tener en cuenta la hipótesis alternativa) o el **punto crítico**:
   i. Si es bilateral → calcular el p-valor de uno de los extremos y multiplicar por 2.
   ii. Si es unilateral → calcular el p-valor de un extremo.

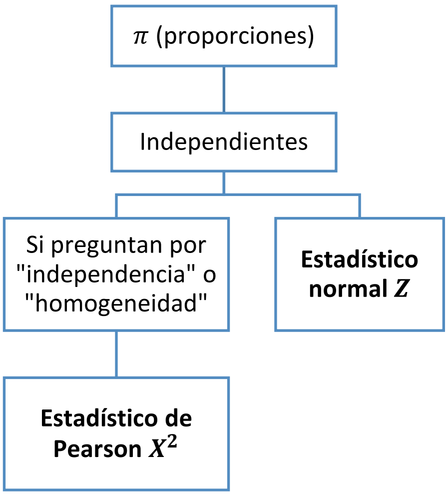
Si es el **punto crítico**:

- $|t| > t_{1-\alpha}$ (unilateral) → Rechazar H_0.
- $|t| > t_{1-\alpha/2}$ (bilateral) → Rechazar H_0.

7. **Conclusión:** mirar que criterio de decisión tiene el estadístico para rechazar la H_0.

$\bar{Y}$ = media
S^2 = variancia
S = desviación
(error tipo) $se = S \cdot \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$
$\bar{D}$ = media de la variable diferencia D
(se restan "dentro" de cada unidad)





$$P = \frac{\textit{número de aciertos}}{\textit{número total}}$$

f_{ij} = frecuencia de casos observados en la fila "i", columna "j"

$$e_{ij} = \frac{e_i \cdot e_j}{e_N} = \frac{(\textit{total de la fila } i) \cdot (\textit{total de la columna } j)}{\textit{total de los totales}}$$

f_{ij}	C	D	Total
A	f_{11}	f_{12}	Total fila 1
B	f_{21}	f_{22}	Total fila 2
	Total col. 1	Total col. 2	Total de los totales

e_{ij}	C	D	Total
A	e_{11}	e_{12}	Total fila 1
B	e_{21}	e_{22}	Total fila 2
	Total col. 1	Total col. 2	Total de los totales

$(f_{ij} - e_{ij})^2/e_{ij}$	C	D	Total
A	X_{11}	X_{12}	
B	X_{21}	X_{22}	
			$\sum X^2$

Bloque 6 – Previsión

Estudios observacionales: se trata de estudios dónde vemos lo que sucede y sirven para predecir, anticipar, prever…

Estudios experimentales: se trata de estudios en los que podemos interactuar, por lo que podemos intervenir y cambiar el futuro.

Modelo: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_i + \varepsilon_1$

Parte determinista de Y

Parte aleatoria de Y

Parámetros

β_0 = Constante al origen

Y_i = Valor de la variable respuesta Y en el caso i-ésimo

β_1 = Pendiente de la recta

X_i = Valor que toma la condición X en el caso i-ésimo

ε_i = Error aleatorio o distancia de la recta del caso i-ésimo / error de predicción

$S^2 = \sigma^2$ = Variancia residual o variancia de los $\varepsilon_i \rightarrow$ cuanto mayor sea σ los valores estarán más dispersos y por lo tanto mayor variabilidad habrá.

S = Desviación típica del término aleatorio del modelo

$\hat{\beta}_0 = b_0$ = Estimación del término independiente

$\hat{\beta}_1 = b_1$ = Estimación término lineal / pendiente estimada

Son los estimadores de β_0 y β_1

$\bar{Y}$ = Media de la variable respuesta

S_{XY} = Covariancia muestral

$r = r_{XY}$ = Correlación muestral / coeficiente de Pearson

$r_{XY}^2 = R^2$ = coeficiente de determinación

$$0 \leq R^2 \leq 1 \rightarrow \begin{cases} \textit{más cerca del } 1 \rightarrow \textit{más capacidad predictiva y poca variabilidad} \\ \textit{más cerca del } 0 \rightarrow \textit{menos capacidad predictiva y mucha variabilidad} \end{cases}$$

S_Y = Desviación tipo de la variable respuesta / error de estimación del término independiente

S_X = Desviación tipo de la condición / error de estimación del término lineal

Interpretación de los parámetros

Los **parámetros** de la recta han de ser interpretados de acuerdo con sus unidades

La **pendiente** se interpreta:

- Experimentos: La respuesta Y tendrá un cambio esperado de β_1 (unidades de Y) por cada incremento de 1 unidad de la causa X.
- Previsión: una variación de 1 unidad en la variable X se asocia a una variación de β_1 unidades en la variable Y.

La **variancia residual** se interpreta:

- Experimentos: variabilidad de la variable Y.
- Previsión: error de predicción de la variable Y, conociendo el valor de X. (son las fluctuaciones de nuestra previsión, es decir cuanto por encima y por debajo de nuestro valor nos podríamos equivocar).

La **constante** se puede interpretar como el valor que toma la respuesta en absencia de la variable predictora.

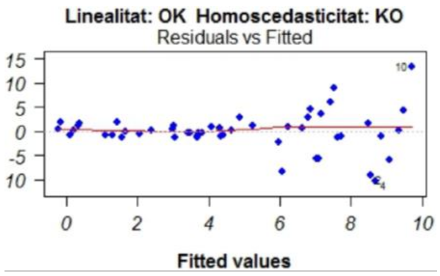
Si el error estándar es demasiado grande → Para **disminuir S_{b1}** hay que aumentar n (número de observaciones).

Inferencia se puede hacer la prueba de hipótesis para β_0, β_1 y σ^2 (seguir el procedimiento habitual, tomando la distribución t-Student como estadístico).

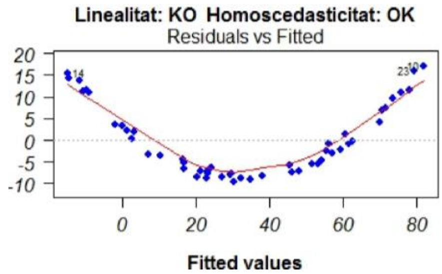
La inferencia con intervalo de confianza: $IC(\mu_1 - \mu_2, 95\%) = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}$, el resultado representaría que por ejemplo la muestra 2 tarde de media entre X e Y segundos menos con un intervalo de confianza del 95%.

Para **validar el modelo lineal** hay que mirar las premisas:

- En la parte determinista:
  - **Linealidad**: en el rango que se nos da que se mantenga igual sobre el eje de la y

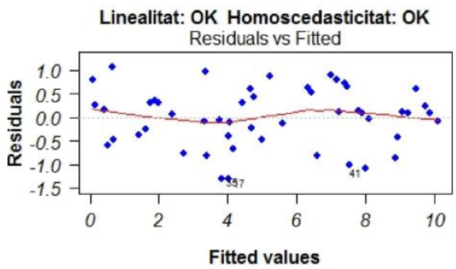


Hay linealidad

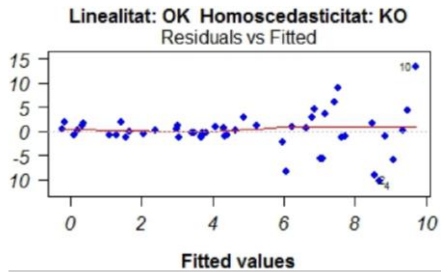


No hay linealidad

- En la parte aleatoria:
  - **Homoscedasticidad**: misma σ^2 para cualquier caso/dato, cuando miramos el gráfico vemos que todos los datos tienen el mismo error.

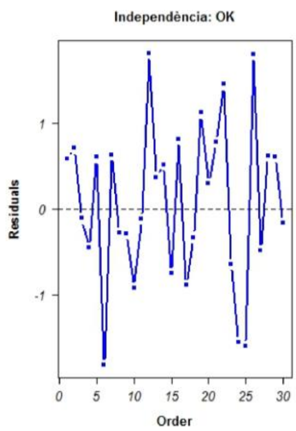


Hay homoscedasticidad

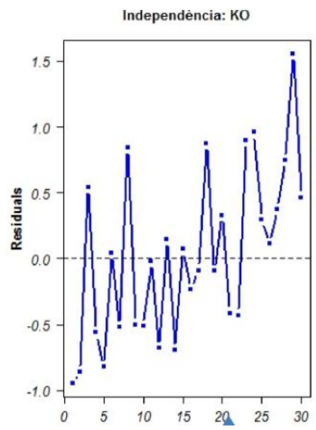


Hay heteroscedasticidad (no hay homoscedasticidad)

  - **Independencia**: Detecta si existe o no dependencia entre los datos.

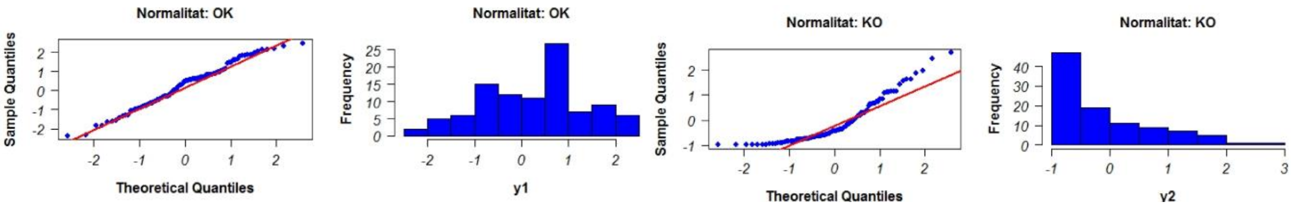


Hay independencia, porque no observamos ningún patrón en el gráfico



No hay independencia, porque observamos un patrón en el gráfico

- **Normalidad**: en el caso de un gráfico que se mantengan los datos sobre la recta qqnorm y en el caso de un histograma que forme una campana.




```
datos <- read.table("clipboard",header=TRUE) # Leemos los valores copiados
# La función lm se usa para ajustar un modelo lineal, sea un modelo de regresión lineal, de análisis de varianza o de análisis de covarianza
mod.lm <- lm(var_respuesta ~ condicion, datos)
# Obtenemos una salida más detallada e informativa
summary(mod.lm)
# Permite modificar distintos parámetros de la ventana gráfica
par(cex.lab = 1.2, cex.axis = 1.2, las = 1, font.lab = 2, font.axis = 3)
# Dibuja el gráfico
plot(var_respuesta ~ condicion, datos, pch = 19, col = 4, cex = 1.2)
# Permite sobreponer una recta de regresión a un gráfico de dispersión
abline(mod.lm, col = 2, lwd = 3)
```

```
## Ejemplo para validación lineal
par(mfrow=c(2,2))
plot(lm(var_respuesta ~ condicion),c(2,1)) # QQ-Norm y Standard Residuals vs. Fitted
hist(rstandard(lm(var_respuesta ~ condicion))) # Histograma de residuos estandarizados
plot (1:10,rstandard(lm(var_respuesta ~ condicion)),type="l") # Orden de los residuos
```

summary(mod.lm) - Ejemplo e interpretación de los datos:

```
Call:
lm(formula = Preu ~ Capacitat, data = datos)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-102.32  -20.89   12.48   36.99   89.21
```

$p - valor_{b_x} < 0.05 \rightarrow$ Indica que es un valor significante, que es importante para nuestra muestra, cuanto más cercano a 0 mejor.

$$t_{b_0} = b_0/S_{b_0}$$
$$t_{b_1} = b_1/S_{b_1}$$

Coefficients:

	Estimate Std.	Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	$b_0 =$ 386.3889	$S_{b_0} =$ 69.6313	$t_{b_0} =$ 5.549	$p - valor_{b_0} =$ 4.40e-05 ***
Capacitat	$b_1 =$ 2.4133	$S_{b_1} =$ 0.4097	$t_{b_1} =$ 5.891	$p - valor_{b_1} =$ 2.28e-05 ***

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: $S =$ 57.94 on *grados de libertad* $=$ 16 degrees of freedom
Multiple R-squared: $R^2 =$ 0.6844, Adjusted R-squared: 0.6647
F-statistic: 34.7 on 1 and 16 DF, p-value: 2.278e-05

$\bar{Y}$