TEORÍA CUÁNTICA DE JUEGOS

Hackathon cuántico - GRUPO 4 - Madrid

Pablo Viñas
Gabriel Escrig
Juan Gil
Adriana Palos
Pablo Veganzones

Abstract

En este trabajo se pretende realizar una pequeña introducción a la teoría cuántica de juegos para dos jugadores, utilizando el dilema del prisionero como ejemplo por excelencia. Aplicando las reglas cuánticas a la teoría clásica, y a partir de algoritmos cuánticos implementados en el software Quiskit se consiguen diferentes resultados en las jugadas óptimas que para las reglas clásics. Además, comprobamos los mismos resultados recreando estos mismos algoritmos en un sistema cuántico real, como es el ordenador cuántico en línea de IBM.

1. Introducción

La teoría de juegos permite explicar cómo los individuos, a través de su comportamiento racional de carácter estratégico entre participantes que actúan dirigidos por sus propios intereses, adoptan determinadas decisiones. Como se puede intuir, esto nos permite desarrollar y justificar estrategias óptimas a la hora de abordar problemas, asunto que tiene una implicación directa en las ciencias sociales, ya que nos permite **justificar** incluso **predecir** el comportamiento humano frente a la toma de decisiones.

A este hecho, surge de manera natural la extensión directa de la clásica teoría de juegos al dominio cuántico, de modo que podamos aprovechar las propiedades cuánticas que nos ofrece la física de la información como la computación cuántica. El hecho de incorporar fenómenos cuánticos va a **redefinir** las reglas de la teoría de juegos, de modo que tengamos una superposición y entrelazamiento en los estados iniciales y una superposición de estrategias a utilizar en los estados iniciales.

El hecho de poder explorar estos fenómenos cuánticos puede ser el germen de explicaciones del comportamiento humano cuando se tengan en cuenta estos nuevos sistema de reglas, justificación que nos sería imposible de alcanzar con los conocimientos clásicos.

2. Desarrollo teórico

Para poder hacer claro el carácter cuántico que nos dotan las nuevas reglas hemos decidido explorar el **dilema del prisionero**. Este es un problema fundamental de la teoría de juegos que nos intenta justificar el comportamiento humano al enfrentarse a un problema de castigos, lo cual nos permitirá estudiar de manera canónica esta diferencia entre algoritmos *cuánticos* y *clásicos*. A esta altura, nos es necesario explicar el dilema del prisionero *clásico* para meternos en contexto del problema real que queremos abordar.

La enunciación clásica del dilema del prisionero es:

La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato. Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, cinco años, y el primero será liberado. Si uno calla y el cómplice confiesa, el primero recibirá esa pena y será el cómplice quien salga libre. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a tres años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos durante un años por un cargo menor.

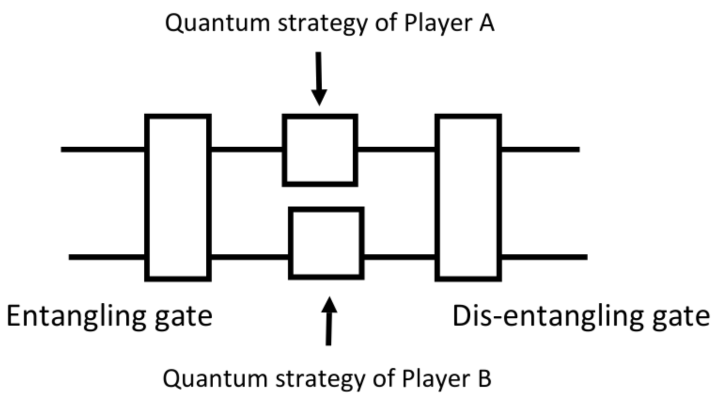
Lo que podría resumirse en la siguiente tabla como:

Condena en años (A, B)	**A lo niega**	**A confiesa**
B lo niega	Condena (1, 1)	Condena (5, 0)
B confiesa	Condena (0, 5)	Condena (3, 3)

Y salimos del supuesto que ambos prisioneros son completamente **egoístas** siendo su única meta reducir su propia estancia en la cárcel, de modo que no van a tener en cuenta la opción de confesar los dos, ya que por más que beneficie a ambos, nuestros presos quieren el beneficio propio. De este modo, se alcanza lo que se conoce como **el equilibrio de Nash**, o el equilibrio del miedo. Este es un concepto el cual asume que cada jugador conoce y ha adoptado su mejor estrategia y todos conocen la estrategia de los otros. En otras palabras, es una situación en la cual todos los jugadores han puesto en práctica una estrategia que maximiza sus ganancias dadas las estrategias de los otros. Como ambos son egoístas, y piensan que el otro va a ser egoísta, *clásicamente* este problema va a tender a colapsar en que **ambos confiesan**.

Ahora vamos a "cuantizar" este juego a partir de los tres métodos citados anteriormente:
- **Superposición** de estados cuánticos iniciales.
- **Entrelazamiento** cuántico de estos iniciales
- **Superposición** de las estrategias para ser aplicadas en los estados iniciales.

De este modo, podemos generalizar cualquier juego en teoría de juegos cuántica a partir del siguiente esquema:



El hecho de cuantizar una teoría de juegos nos va a transformar las estrategias en matrices unitarias del estado inicial dado en el espacio de Hilbert [2]. De este modo el estado de un jugador va a estar representado por un qubit. Un algoritmo cuántico genérico que sea capaz de resolver un problema de teoría de juegos cuántica va a empezar con la creación de un estado cuántico entrelazado. Una vez tengamos creado el estado entrelazado van a tomar las decisiones A y B. Esto es aplicar las matrices de decisión de A y B al estado cuántico entrelazado como se puede apreciar en el esquema anterior. Finalmente des-entrelazamos los estados y realizamos una medición, de modo que si ejecutamos el algoritmo un número relativamente grande de veces obtendremos una representación estadística de los resultados que nos minimizan la función coste tanto para A como para B (en el dilema del prisionero esto sería minimizar los años de prisión). Nótese en este punto la gran diferencia entre el dilema del prisionero en un juego clásico y en un juego cuántico, en el problema clásico: para un problema, el pleno conocimiento del as preferencias de ambas partes puede ayudar a encontrar el resultado óptimo posible, esto puede resolverse en la teoría clásica recurriendo a árbitro tercero, que recoge en secreto la información de ambas partes y luego propone una solución óptima que es vinculante para las partes. En la la teoría cuántica es el entrelazamiento cuántico el que puede desempeñar el papel de dicho arbitro.

De este modo, el resultado en el juego cuántico se obtiene por el colapso del estado transformado resultante, de manera que la gama de estrategias permitidas para los jugadores cuánticos es muchísimo más rica que en un caso clásico, y por lo tanto, el resultado del juego puede ser optimizado.

Los operadores que vamos a usar (obtenidos de la biografía), donde C representa no confesar (cooperar) y D representa confesar (no cooperar), son los siguientes:

$$|C\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |D\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{J} = \exp\left\{ i\gamma \hat{D} \otimes \hat{D}/2 \right\},$$

Donde J es la matriz de entrelazamiento que entrelaza un estado inicial formado por los dos qubits en el estado 0 (es decir C) de la forma:

$$|\psi_i\rangle = \widehat{J}\,|CC\rangle = \cos\frac{\gamma}{2}\,|CC\rangle + i\sin\frac{\gamma}{2}\,|DD\rangle$$

Al ser las estrategias matrices 2x2 unitarias formarán parte del grupo SU(2), de modo que podemos generalizar las estrategias como:

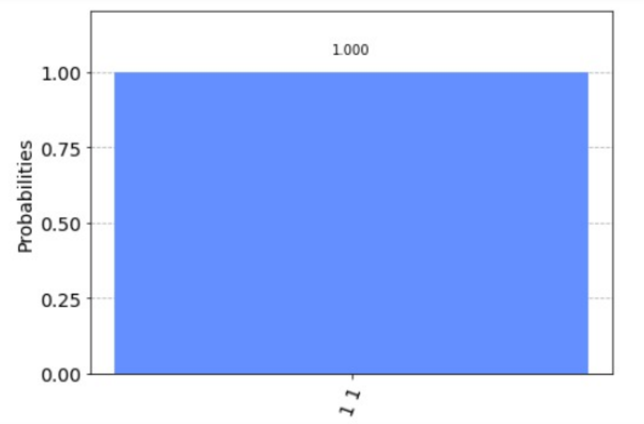
$$\hat{U}(\delta, \phi, \alpha)e^{i\delta} \begin{pmatrix} e^{i\phi}cos(\frac{\theta}{2}) & e^{i\alpha}sin(\frac{\theta}{2}) \\ -e^{-i\alpha}sin(\frac{\theta}{2}) & e^{-i\phi}cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

Y la elección de estos parámetros será clave para la estrategia de cada jugador. Para nuestro algoritmo del prisionero vamos a tomar que los prisioneros son egoístas, y lo que se quiere minimizar es el tiempo que se estará en prisión, es decir, la condena. Esta función coste se va a construir a partir de los parámetros del problema (la primera Tabla) y la probabilidad de que cada suceso ocurra (dependiendo esta probabilidad de la estrategia utilizada, es decir, de los parámetros delta, phi y alfa), de modo que:

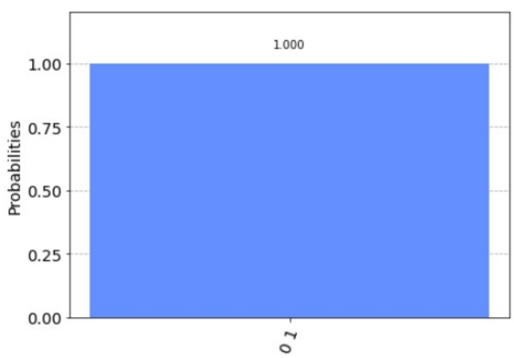
$$\begin{aligned} \$_A &= 3P_{CC} + 1P_{DD} + 5P_{DC} + 0P_{CD} \\ \$_B &= 3P_{CC} + 1P_{DD} + 0P_{DC} + 5P_{CD} \end{aligned}$$

4. Resultados

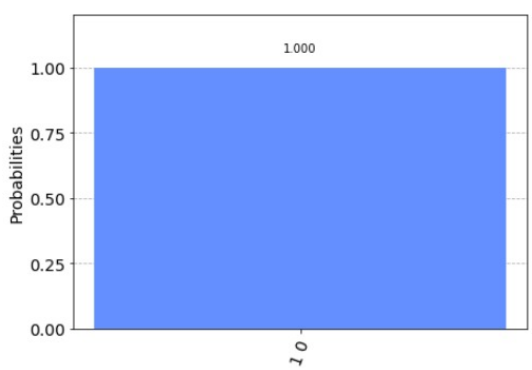
Como se explica en el desarrollo teórico, el equilibrio de Nash en el dilema del prisionero clásico se alcanza cuando ambos buscan el bien propio y confiesan. Esta situación clásica implica que las matrices unitarias Ux definidas en el desarrollo teórico no contienen factores complejos y, en consecuencia, $\alpha = \phi = 0$, tanto para U_A como para U_B. Dado que δ representa una fase global y considerándola también 0 reproducimos, como era de esperar, el resultado clásico.



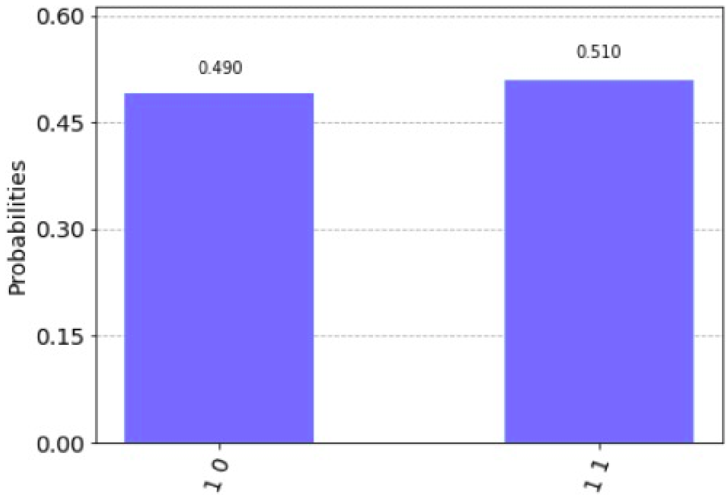
Dado que $|1\rangle$ representa confesar, este histograma demuestra que la solución estable para ambos prisioneros es confesar. A continuación, se ejecuta "proceso(pi,0,0,0,0,0,0,0)" lo que implica que el jugador 1 aplique una puerta, $U_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, que alterna entre confesar y no confesar. Dado que U_B es la identidad, el sistema colapsa a buscar el beneficio de A dándose, con probabilidad 1, el estado $|01\rangle$, es decir, A confiesa y B no.



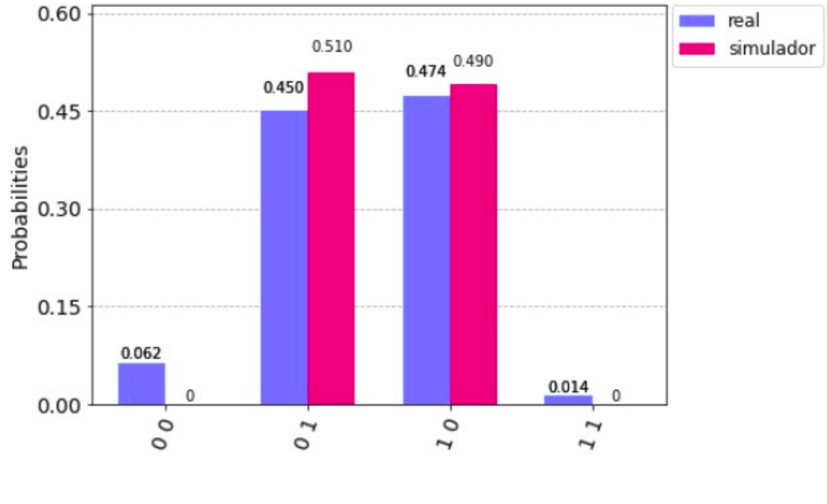
De manera análoga, si se trabaja sobre "proceso(0,pi,0,0,0,0,0,0)" el resultado será el anterior cambiando A por B. Es decir, en este caso A no confiesa mientras que B sí.



Este resultado demuestra la ventaja de seguir una estrategia cuántica frente a una clásica (matriz identidad): independientemente de la estrategia seguida por el jugador clásico, el jugador cuántico siempre obtiene la mejor solución, solución en la que él es "premiado" mientras que el jugador clásico es "penalizado".
Por último, el caso "proceso(0,pi,pi/4,0,0,3*pi/2,pi/4,pi/2)" representa el dilema del prisionero en el que el primer jugador emplea $U_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ como elección, mientras que el jugador B tiene $U_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, también conocidas como puerta "s" y "x" respectivamente. En este caso, la estrategia óptima para los jugadores será que uno confiese y otro no, con probabilidad ½.
Una forma de analizar este resultado, ayudándonos de la tabla escrita en el desarrollo teórico, sería comprobar que si A y B tienen que elegir 2 veces en esta situación entonces la suma de años que tendrían que estar en prisión sería (5,5) si el primer jugador confiesa en una ocasión y lo niega en la otra, y viceversa para el segundo jugador; mientras que si ambos confiesan las dos veces entonces la condena sería mayor: (6,6).



Finalmente, la implementación de esta simulación en el ordenador cuántico de IBM permite comprobar que los resultados obtenidos en la simulación corresponden con el resultado real. La diferencia principal reside, como era de esperar, en el ruido de la máquina.



5. Conclusiones

En este trabajo, hemos realizado un pequeño estudio de la cuantización en teoría de juegos, haciendo especial hincapié en el Dilema del Prisionero. Al considerar diferentes situaciones, el juego muestra propiedades que pueden superar a la versión clásica de este juego. Suponiendo que los jugadores jueguen el con reglas cuánticas, además de presentarnos resultados distintos, la solución del juego es más eficiente que la clásica [1].

Pero estos juegos cuánticos, lejos de ser un divertimento de teóricos, podrían formar parte de las tecnologías cuánticas del futuro. Algunas de las aplicaciones prácticas que podrían tener este tipo de juegos cuánticos podrían ser ayudar a los *traders* a construir un mercado de valores resistente a los choques. Y juegos cuánticos podrían aportar nuevos conocimientos sobre fenómenos naturales desconcertantes, como la super-conductividad de alta temperatura, etc [1]. Aunque a estas alturas nadie sabe con certeza de qué aplicaciones serán más fructíferas, jugando con las reglas cuánticas, cada uno se convertirá en un ganador

6. Motivación para trabajos posteriores

Proponemos para futuros *hackatons* y como extensión de este problema la generalización de este algoritmo para cualquier conjunto de parámetros premio/castigo de un juego general (extendiendo las matrices decisión para más problemas diferentes del dilema del prisionero), lo cual se podría implementar obteniendo los parámetros que minimizan la función costo y evaluarlos en las correspondientes matrices de decisión, pudiendo obtener las soluciones óptimas para los distintos tipos de juegos (por ejemplo obteniendo el análogo cuántico de el juego de la gallina, el juego del ultimátum, la caza del ciervo, y así para los juegos característicos que se estudian en la teoría de juegos *clásica*).

7. Referencias

[1] Szopa, M., 2014. How Quantum Prisoner's Dilemma Can Support Negotiations. *Optimum. Studia Ekonomiczne*, (5(71), pp.90-102.

[2] Khan, F., Solmeyer, N., Balu, R., & Humble, T. (2018). Quantum games: a review of the history, current state, and interpretation. *Quantum Information Processing*, *17*(11). doi: 10.1007/s11128-018-2082-8.

[3] DU, J., XU, X., LI, H., ZHOU, X., & HAN, R. (2002). PLAYING PRISONER'S DILEMMA WITH QUANTUM RULES. *Fluctuation And Noise Letters*, *02*(04), R189-R203. doi: 10.1142/s0219477502000993.

[4] Eisert, J., Wilkens, M., & Lewenstein, M. (1999). Quantum Games and Quantum Strategies. *Physical Review Letters*, *83*(15), 3077-3080. doi: 10.1103/physrevlett.83.3077.