

Pràctica 7: Pèndol simple. 23-24

Objectius: [Resolució de EDOs, Mètode d'Euler, segon ordre, convergència](#)

— Nom del programa [P7-23-24.f90](#).

Considera la dinàmica d'un pèndol simple de massa 0.98 kg i longitud $\ell = 1.07\text{m}$, que ve descrita per l'equació diferencial,

$$\ell\ddot{\phi} = -g \sin \phi \quad (0.23)$$

amb $g = 10.44 \text{ ms}^{-2}$ (situat a Saturno). Considera $t \in (0, 7T_N)$, amb $T_N = 2\pi/\omega_N$ i $\omega_N = \sqrt{g/\ell}$. Programa mètodes d'Euler normal i de segon ordre per calcular $\phi(t)$ i $\dot{\phi}(t)$.

El de segon ordre ve definit per l'algorisme,

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \vec{f}(x_n, \vec{y}_n) \\ \vec{k}_2 &= \vec{f}(x_n + 3h/4, \vec{y}_n + (3/4)h\vec{k}_1) \\ \vec{y}_{n+1} &= \vec{y}_n + \frac{h}{3}\vec{k}_1 + \frac{2h}{3}\vec{k}_2 \end{aligned} \quad (0.24)$$

- Petites oscil·lacions.** Estudia la dinàmica del pèndol per a $\phi(0) = 0.025$ rad amb $\dot{\phi}(0) = 0$ rad/s. Fes una figura [P7-23-24-fig1.png](#) amb $\phi(t)$ vs. t , comparant els dos mètodes amb la predicció obtinguda aproximant $\sin \phi \simeq \phi$. Fes servir **1500** passos de temps.
- Oscil·lacions grans.** Estudia la dinàmica del pèndol per $\phi(0) = \pi - 0.15$ rad amb $\dot{\phi}(0) = 0$ rad/s. Fes una figura [P7-23-24-fig2.png](#) amb $\phi(t)$ vs. t , comparant els resultats obtinguts amb els dos mètodes. Genera una figura [P7-23-24-fig3.png](#) comparant les trajectòries a l'espai fàsic, $(\phi, \dot{\phi})$. Fes servir **1500** passos de temps.
- Energia.** Calcula l'energia cinètica, $K(t) = (1/2)m(\dot{\phi}(t))^2\ell^2$, potencial $V(t) = -mg\ell \cos(\phi(t))$ i total $E_{\text{total}}(t) = K(t) + V(t)$ del pèndol (fes dues funcions, **EKIN**($\phi, \dot{\phi}$) i **EPOT**($\phi, \dot{\phi}$)). Pel cas $\phi(0) = \pi - 0.025$ rad, amb $\dot{\phi}(0) = 0.12$ rad/s estudia l'evolució d' $K(t)$ i $V(t)$. Genera una figura [P7-23-24-fig4.png](#) comparant l'evolució de l'energia cinètica i total amb el temps calculades amb els dos mètodes. Fes servir **1500** passos de temps.

Pels apartats d),e),extra) fes servir només el mètode de segon ordre.

- Transició.** Considera la dinàmica a partir de $\phi(0) = 0$ amb $\dot{\phi}(0) = 2\sqrt{g/\ell} \pm 0.05 \text{ rad/s}$. Compara la dinàmica del dos casos i fes una figura mostrant les trajectòries a l'espai fàsic [P7-23-24-fig5.png](#). A què es correspon la transició observada? Fes servir **6000** passos de temps i un $t \in (0, 15T_N)$.
- Convergència del mètode.** Per $\phi(0) = 2.87$ rad i $\dot{\phi}(0) = 0$ rad/s i $t \in [0, 11T_N]$ estudia l'evolució de l'energia total del sistema com a funció del temps fent servir **300**, **550**, **1000** i **20000** passos de temps. Genera una figura [P7-23-24-fig6.png](#) amb la comparació.

Extra) **Animació.** Treballa amb un nombre de passos adient. Genera una animació gif del moviment del pèndol en un cas d'oscil·lacions grans, mostrant $\phi(t)$ i $\dot{\phi}(t)$ i el moviment a l'espai fàsic, [P7-ani.gif](#).

Entregable: [P7-23-24.f90](#), [P7-23-24-fig1.png](#), [P7-23-24-fig2.png](#), [P7-23-24-fig3.png](#), [P7-23-24-fig4.png](#), [P7-23-24-fig5.png](#), [P7-23-24-fig6.png](#), [P7-23-24-resf.dat](#), scripts de gnuplot, [P7-ani.gif](#)