

# Pràctica 7: Pèndol simple. 23-24

Objectius: Resolució de EDOs, Mètode d'Euler, segon ordre, convergència

— Nom del programa **P7-23-24.f90**.

Considera la dinàmica d'un pèndol simple de massa **0.98 kg** i longitud  $\ell = 1.07\text{m}$ , que ve descrita per l'equació diferencial,

$$\ell\ddot{\phi} = -g \sin \phi \quad (0.21)$$

amb  $g = 10.44 \text{ ms}^{-2}$  (situat a Saturno). Considera  $t \in (0, 7T_N)$ , amb  $T_N = 2\pi/\omega_N$  i  $\omega_N = \sqrt{g/\ell}$ . Programa mètodes d'Euler normal i un de segon ordre per calcular  $\phi(t)$  i  $\dot{\phi}(t)$ .

El de segon ordre ve definit per l'algorisme,

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \vec{f}(x_n, \vec{y}_n) \\ \vec{k}_2 &= \vec{f}(x_n + h/2, \vec{y}_n + (1/2)h\vec{k}_1) \\ \vec{y}_{n+1} &= \vec{y}_n + h\vec{k}_2 \end{aligned} \quad (0.22)$$

- a) **Petites oscil·lacions.** Estudia la dinàmica del pèndol per a  $\phi(0) = 0.025$  rad amb  $\dot{\phi}(0) = 0$  rad/s. Fes una figura **P7-23-24-fig1.png** amb  $\phi(t)$  vs.  $t$ , comparant els dos mètodes amb la predicció obtinguda aproximant  $\sin \phi \simeq \phi$ . Fes servir **1500** passos de temps.
- b) **Oscil·lacions grans.** Estudia la dinàmica del pèndol per  $\phi(0) = \pi - 0.15$  rad amb  $\dot{\phi}(0) = 0$  rad/s. Fes una figura **P7-23-24-fig2.png** amb  $\phi(t)$  vs.  $t$ , comparant els resultats obtinguts amb els dos mètodes. Genera una figura **P7-23-24-fig3.png** comparant les trajectòries a l'espai fàsic,  $(\phi, \dot{\phi})$ . Fes servir **1500** passos de temps.
- c) **Energia.** Calcula l'energia cinètica,  $K(t) = (1/2)m(\dot{\phi}(t))^2\ell^2$ , potencial  $V(t) = -mg\ell \cos(\phi(t))$  i total  $E_{\text{total}}(t) = K(t) + V(t)$  del pèndol (fes dues funcions, **EKIN**( $\phi, \dot{\phi}$ ) i **EPOT**( $\phi, \dot{\phi}$ )). Pel cas  $\phi(0) = \pi - 0.025$  rad, amb  $\dot{\phi}(0) = 0.12$  rad/s estudia l'evolució d' $K(t)$  i  $V(t)$ . Genera una figura **P7-23-24-fig4.png** comparant l'evolució de l'energia cinètica i total amb el temps calculades amb els dos mètodes. Fes servir **1500** passos de temps.

Pels apartats d),e),extra) fes servir només el mètode de segon ordre.

- d) **Transició.** Considera la dinàmica a partir de  $\phi(0) = 0$  amb  $\dot{\phi}(0) = 2\sqrt{g/\ell} \pm 0.05$  rad/s. Compara la dinàmica del dos casos i fes una figura mostrant les trajectòries a l'espai fàsic **P7-23-24-fig5.png**. A què es correspon la transició observada? Fes servir **6000** passos de temps i un  $t \in (0, 15T_N)$ .
- e) **Convergència del mètode.** Per  $\phi(0) = 2.87$  rad i  $\dot{\phi}(0) = 0$  rad/s i  $t \in [0, 11T_N]$  estudia l'evolució de l'energia total del sistema com a funció del temps fent servir **300, 550, 1000 i 20000** passos de temps. Genera una figura **P7-23-24-fig6.png** amb la comparació.

Extra) **Animació.** Treballa amb un nombre de passos adient. Genera una animació gif del moviment del pèndol en un cas d'oscil·lacions grans, mostrant  $\phi(t)$  i  $\dot{\phi}(t)$  i el moviment a l'espai fàsic, **P7-ani.gif**.

Entregable: **P7-23-24.f90, P7-23-24-fig1.png, P7-23-24-fig2.png, P7-23-24-fig3.png, P7-23-24-fig4.png, P7-23-24-fig5.png, P7-23-24-fig6.png, P7-23-24-resf.dat, scripts de gnuplot, P7-ani.gif**