# Tarea grupal AVF

Adrián Sanjurjo Garcia

Universidade de A Coruña

22 de abril de 2021

# Índice

# Introducción

- Problema inicial:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0\end{aligned} \qquad (1)$$

- Reescribimos:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{f}(\omega) = A\,\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} \qquad (2)$$

- $\rho$ densidad, $c_0$ velocidad del sonido en el medio.

# Sistema de leyes hiperbólico.

- Diagonalizamos $A$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -c_0 & 0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

- Matrices de paso:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -c_0\rho_0 & c_0\rho_0 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{c_0\rho_0} \\ 1 & \frac{1}{c_0\rho_0} \end{pmatrix} \tag{4}$$

- Cambio de variable $\vec{\omega} = P\vec{v}$ en 1:

$$\vec{v}_t + \Lambda\vec{v}_x = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} v_{1t} - c_0 v_{1x} = 0 \\ v_{2t} + c_0 v_{2x} = 0 \end{cases}} \tag{5}$$

# Sistema estrictamente hiperbólico

- Sistema estrictamente hiperbólico $\leftrightarrow$ Todos sus autovalores son reales.
- Autovalores del problema $\lambda^{\pm} = \pm c_0 \Leftrightarrow$ Estrictamente hiperbólico.

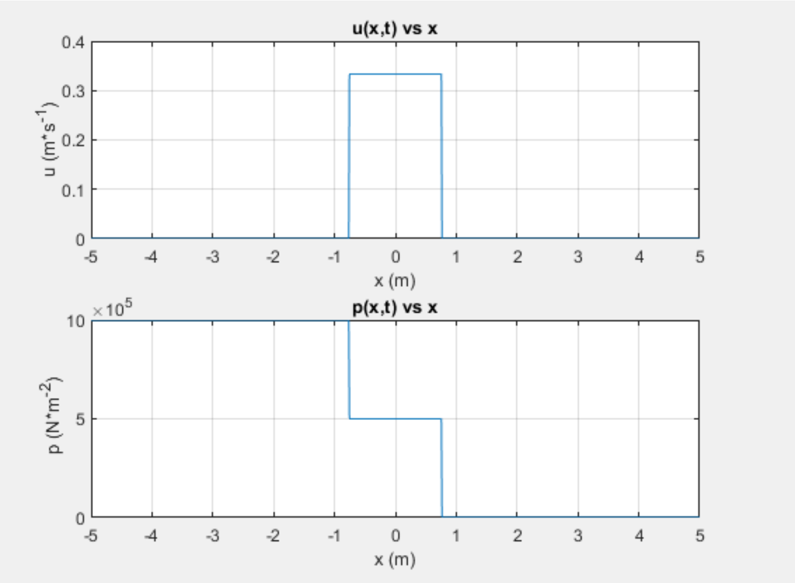
# Solución exacta del problema de Riemann

- Condición inicial del problema de Riemann:

$$\vec{\omega}(x,0) = \vec{\omega}_0(x) = \begin{cases} \vec{\omega}_l = \begin{pmatrix} u_l \\ p_l \end{pmatrix} & x < 0 \\ \vec{\omega}_r = \begin{pmatrix} u_r \\ p_r \end{pmatrix} & x \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

- Datos computacionales:
  1. $\rho_0 = 1000$
  2. $c_0 = 1500$
  3. $u_l = 0, \ p_l = 10^6, \ u_r = 0, \ p_r = 10^3$

# Solución exacta del problema de Riemann



# Solución exacta del problema de Cauchy

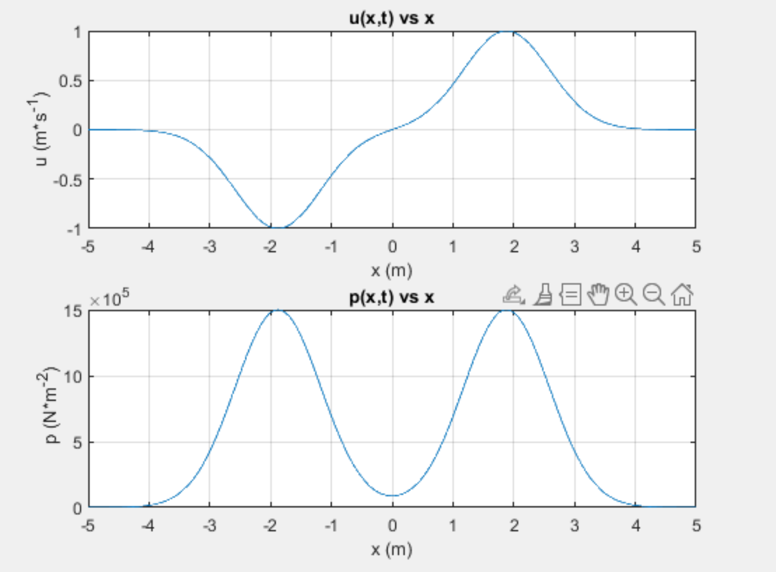
- El cambio de 5 implica:

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x + c_0 t) + v_2(x - c_0 t) \\ (-v_1(x + c_0 t) + v_2(x - c_0 t))\rho_0 c_0^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

- Suponemos la forma de un pulso:

$$v_1(x + c_0 t) = -e^{-(x+c_0 t)^2} \quad , \quad v_2(x - c_0 t) = e^{-(x-c_0 t)^2} \tag{8}$$

# Solución exacta del problema de Cauchy



# Discretización de ambos problemas. Método de Godunov

- Forma del método de Godunov:

$$\vec{\omega}\,_i^{n+1} = \vec{\omega}\,_i^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\vec{f}\,_{i+\frac{1}{2}}^{n} - \vec{f}\,_{i-\frac{1}{2}}^{n}\right\} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\vec{f}_{i+\frac{1}{2}}^{n} &= \frac{1}{2}\left(\vec{f}\,_i^{n} + \vec{f}\,_{i+1}^{n}\right) - \frac{1}{2}|A|\left(\vec{\omega}\,_{i+1}^{n} - \vec{\omega}\,_i^{n}\right)\\ \vec{f}_{i-\frac{1}{2}}^{n} &= \frac{1}{2}\left(\vec{f}\,_{i-1}^{n} + \vec{f}\,_i^{n}\right) - \frac{1}{2}|A|\left(\vec{\omega}\,_i^{n} - \vec{\omega}\,_{i-1}^{n}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

- Donde $|A| = P\ \mathrm{abs}(\Lambda)P^{-1}$, siendo $\mathrm{abs}(\Lambda)$.

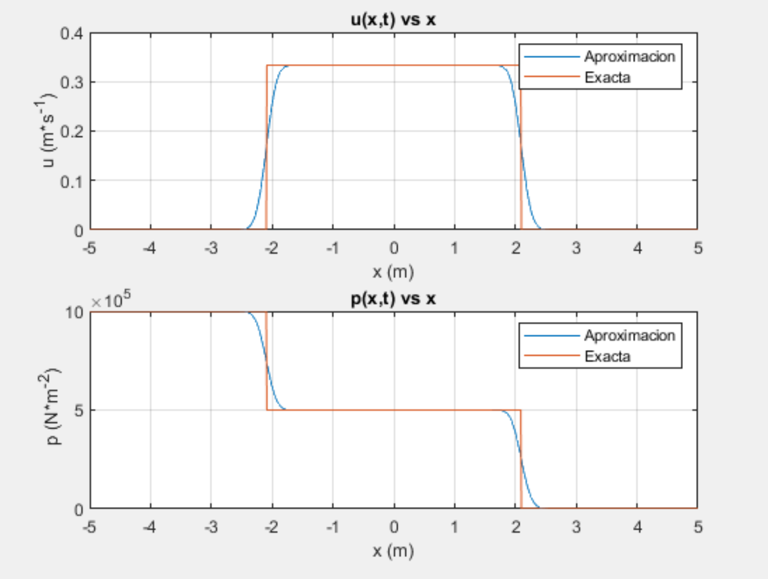
# Discretización de ambos problemas. Método de Godunov

- Resulta:

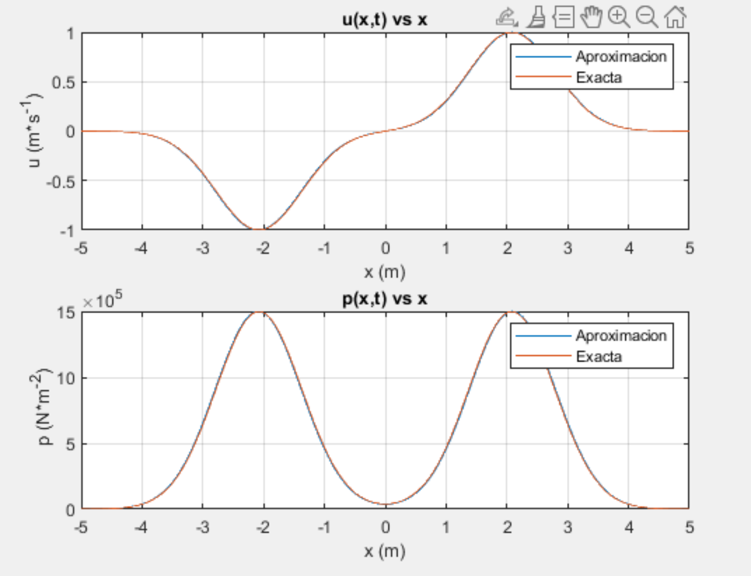
$$\begin{pmatrix} u_i^{n+1} \\ p_i^{n+1} \end{pmatrix} = (1 - c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}) \begin{pmatrix} u_i^n \\ p_i^n \end{pmatrix} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{\rho_0} \\ (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)\rho_0 c_0^2 \end{pmatrix} - c_0 \begin{pmatrix} u_{i+1}^n + u_{i-1}^n \\ p_{i+1}^n + p_{i-1}^n \end{pmatrix} \right\} \tag{11}$$

- N nodos. Condición de frontera: $\vec{\omega}\ _1^n = \vec{\omega}\ _2^n$ y $\vec{\omega}\ _N^n = \vec{\omega}\ _{N-1}^n$.

# Discretización de ambos problemas. Método de Godunov



# Discretización de ambos problemas. Método de Godunov



# Análisis de precisión

$$\text{Norma 1} \longrightarrow \epsilon^1_{\Delta x}(t^f) = \Delta x \sum_{j=1}^{M} ||\omega(x_j, t^f) - \omega_j^N|| \tag{12}$$

$$\text{Norma infinito} \longrightarrow \epsilon^\infty_{\Delta x}(t^f) = \max ||\omega(x_j, t^f) - \omega_j^N|| \tag{13}$$

- Mallados con $\Delta x_k$, $\Delta x_{k+1}$... Si cumplen $\frac{\Delta x_{k+1}}{\Delta x_k} = 2$

$$p_k = \frac{\ln(\mathbb{K}_k)}{\ln(2)} \quad , \quad \mathbb{K}_k = \frac{\epsilon_{\Delta x_k}(t^f)}{\epsilon_{\Delta x_{k+1}}(t^f)} \quad , \quad k = 1, 2 \ldots \tag{14}$$

# Análisis de precisión

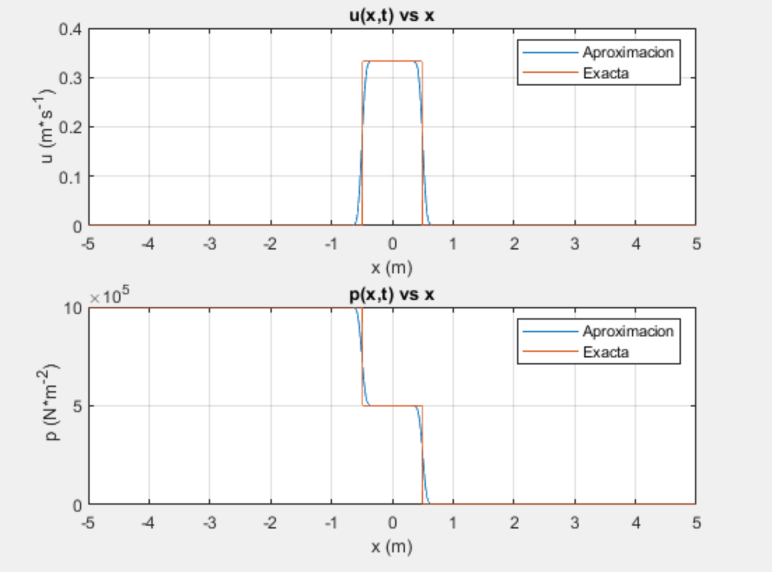
- Tres mallados con 1000, 2000 y 3000 nodos:

| Nodos | $\epsilon^1_{\Delta x}(t^f)$ | $p_k$ | $\epsilon^\infty_{\Delta x}(t^f)$ | $p_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 1000 | 0.01159121 | 1.00000124 | 0.20946289 | 0 |
| 2000 | 0.00579560 | 0.42040201 | 0.20946289 | 0.048011716 |
| 3000 | 0.00380645 | – | 0.20260685 | – |

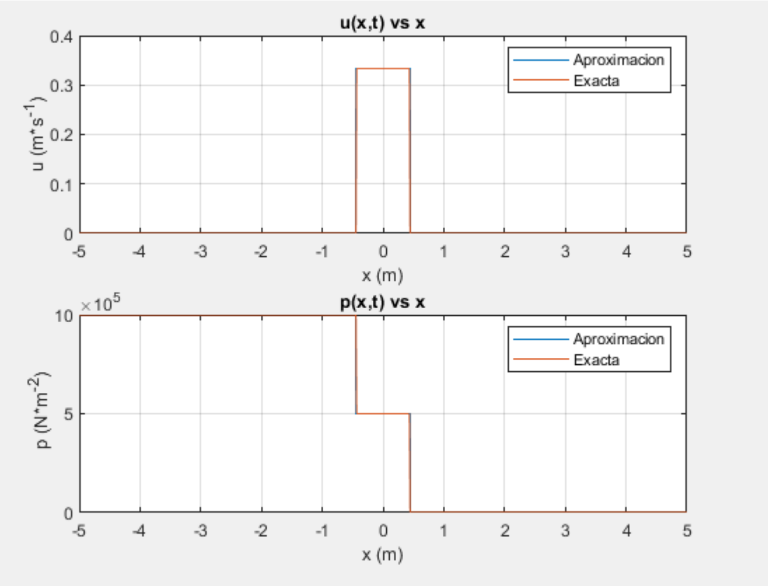
# Estabilidad del método

- Número de Courant
$$\mu = c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{15}$$
- Tres casos posibles:
  - $\mu < 1 \longrightarrow$ Método estable.
  - $\mu = 1 \longrightarrow$ El método converge.
  - $\mu > 1 \longrightarrow$ El método es inestable y no converge
- Comparamos $\mu = 0{,}5$, $\mu = 1$, $\mu = 1{,}5$, :

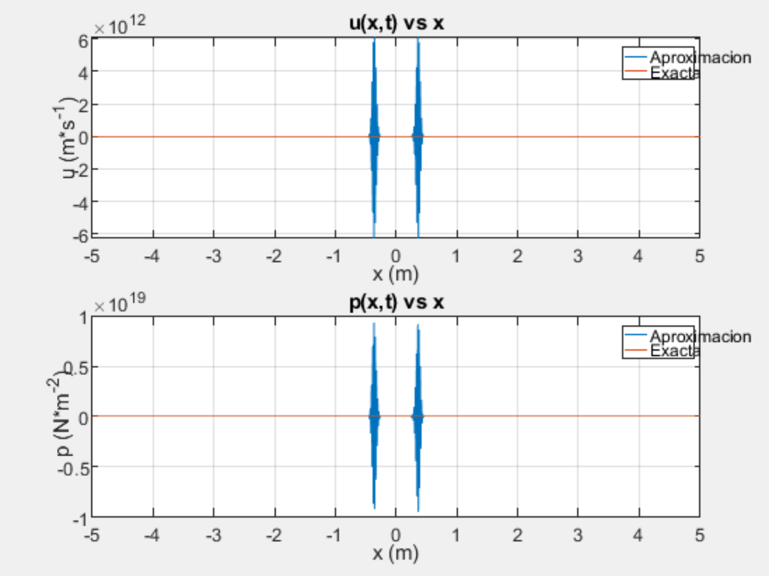
# Estabilidad del método ($\mu = 0{,}5$)



# Estabilidad del método ($\mu = 1$)



# Estabilidad del método ($\mu = 1{,}5$)



# Bibliografía


1. M. E. Vázquez Cendón. *Introducción al método de volúmenes finitos*. Manuais Universitarios, USC Publicacións, 2008.
2. M. E. Vázquez Cendón. *Solving Hyperbolic Equations with Finite Volume Methods*. Springer, 2015.