Ejercicios de Finanzas

Adrián Sanjurjo García
UDC

Marzo 2021

Índice

1. Valoración de productos sin riesgo.

1.1. Ejercicio 1:

Calcular el valor capitalizado de 6000 euros durante 320 días al 2,5 % anual para los casos $n_A = 360$ y $n_A = 365$.

Usamos la fórmula para el valor final de la capitalización simple:

$$P_f = \left(1 + y\frac{n_d}{d_A}\right) P_0 \tag{1}$$

Entonces:

- Para $n_A = 360$:

$$P_f = \left(1 + 0{,}025\frac{320}{360}\right) 6000 \simeq 6133 \tag{2}$$

- Para $n_A = 365$:

$$P_f = \left(1 + 0{,}025\frac{320}{365}\right) 6000 \simeq 6131 \tag{3}$$

Podemos observar que ambos valores son casi iguales, por lo que es indiferente tomar un valor u otro de n_A. En ejercicios posteriores tomaremos $n_A = 365$.

1.2. Ejercicio 2:

Calcula el valor capitalizado de 30000 euros ingresados el 01-02-2021 y retirados el 01-03-2021 al 2.5 % anual con $n_A = 365$. Repetir el cálculo para la misma inversión entre el 01-03-2021 y el 01-04-2021.

Volvemos a hacer uso de 1, resultando en el primer caso con $n_d = 29$:

$$P_f = \left(1 + 0{,}025\frac{28}{365}\right) 30000 \simeq 30058 \tag{4}$$

Mientras que para el segundo, teniendo $n_d = 32$:

$$P_f = \left(1 + 0{,}025\frac{31}{365}\right) 30000 \simeq 30064 \tag{5}$$

1.3. Ejercicio 3.

Suponiendo que conoce la siguiente tabla de tipos aplicables para una inversión de 6000 euros a 10 años:

Años	Tipo (%)
0 - 5	2.5
5 - 7	2.65
7 - 8	2.8
8 - 9	2.9
9 - 10	3.05

Deteminar el valor capitalizado al final de la inversión.

Haciendo uso de la fórmula de la capitalización compuesta anual:

$$P_f = (1 + y_{n-1,n}) \times (1 + y_{n-2,n-1}) \times ... \times (1 + y_{0,1})P_0 \tag{6}$$

Siendo cada paréntsesis correspondiente a un año distinto. En este caso tenemos el mismo interés en varios años seguidos. En este caso, el interés será:

$$P_n = (1 + y)^n P_{0,n} \tag{7}$$

Siendo n el número de años que tienen dicha capitalización. Entonces, para nuestro caso particular, resulta:

$$P_f = (1{+}0{,}0305) \times (1{+}0{,}029) \times (1{+}0{,}028) \times (1{+}0{,}0265)^2 \times (1{+}0{,}025)^5 \times 6000 \simeq 7797 \tag{8}$$

1.4. Ejercicio 4.

Para una inversión de 6000 euros al 2,5 % anual, determinar el valor capitalizado al cabo de un año, cuando los intereses se acumulan anual, semestral, trimestral, mensual, semanal o diariamente. Repetir el cálculo para una inversión a 10 años.

La fórmula de la capitalización compuesta general es:

$$P_f = \left(1 + \frac{y_{n-1,n}}{m}\right)^m \times \left(1 + \frac{y_{n-2,n-1}}{m}\right)^m \times ... \times \left(1 + \frac{y_{0,1}}{m}\right)^m \times P_0 \tag{9}$$

Así pues, tratamos los distintos casos para un mismo año:

- Anual:
$$P_f = (1 + \frac{0{,}025}{1})^1 6000 = 6150 \tag{10}$$

- Semestral:
$$P_f = (1 + \frac{0{,}025}{2})^2 6000 \simeq 6150 \tag{11}$$

- Trimestral:
$$P_f = (1 + \frac{0{,}025}{4})^4 6000 \simeq 6151 \tag{12}$$

- Mensual:
$$P_f = (1 + \frac{0{,}025}{12})^{12} 6000 \simeq 6152 \tag{13}$$

- Semanal:
$$P_f = (1 + \frac{0{,}025}{52})^{52} 6000 \simeq 6152 \tag{14}$$

- Diario:
$$P_f = (1 + \frac{0{,}025}{365})^{365} 6000 \simeq 6152 \tag{15}$$

Como vemos alcanza un valor máximo en 6152. Para el caso de diez años:

- Anual:
$$P_f = (1 + \frac{0{,}025}{1})^{1\times 10} 6000 \simeq 7680 \tag{16}$$

- Semestral:
$$P_f = (1 + \frac{0{,}025}{2})^{2\times 10} 6000 \simeq 7692 \tag{17}$$

- Trimestral:
$$P_f = (1 + \frac{0{,}025}{4})^{4\times 10} 6000 \simeq 7698 \tag{18}$$

- Mensual:
$$P_f = (1 + \frac{0{,}025}{12})^{12\times 10} 6000 \simeq 7702 \tag{19}$$

- Semanal:
$$P_f = (1 + \frac{0{,}025}{52})^{52\times 10} 6000 \simeq 7703 \tag{20}$$

- Diario:
$$P_f = (1 + \frac{0{,}025}{365})^{365\times 10} 6000 \simeq 7704 \tag{21}$$

Se puede apreciar que el efecto de la capitalización compuesta general es más evidente cuantos más años pasen.

1.5. Ejercicio 5.

Para el ejercicio del caso de capitalización compuesta, repetir los cálculos, cuando los intereses se acumulan semestral, trimestral o mensualmente.

En este caso, se ha de modificar la ecuación 9, de tal forma que usemos los intereses anuales del ejercicio 3. La ecuación resultaría:

$$\begin{aligned} P_f = {} & (1 + \frac{0{,}0305}{m})^m \times (1 + \frac{0{,}029}{m})^m \times (1 + \frac{0{,}028}{m})^m \\ & \times (1 + \frac{0{,}0265}{m})^{2\times m} \times (1 + \frac{0{,}025}{m})^{5\times m} \times 6000 \end{aligned} \tag{22}$$

A partir de 22 calculamos los tres casos propuestos:

- Semestral (m=2) $\Rightarrow P_f \simeq 7810$
- Trimestral (m=3) $\Rightarrow P_f \simeq 7817$
- Mensual (m=12) $\Rightarrow P_f \simeq 7822$

1.6. Ejercicio 6.

Para una inversión de 6000 euros al 2,75 % a 1 año, compara la capitalización obtenida en el caso simple, en los casos compuestos acumulando intereses trimestral, mensual, semanal y diariamente, y la capitalización continua. Calcula la capitalización compuesta acumulando intereses cada hora.

En este caso, además de usar las fórmulas 1 y 9 para un único año, también utilizamos la fórmula de la capitalización continua, cuya fórmula es:

$$P_f = e^{ny} P_0 \tag{23}$$

Entonces, comparando caso por caso:

- Capitalización simple:

$$P_f = (1 + 0{,}0275)\, 6000 = 6165 \tag{24}$$

- Capitalización compuesta trimestral:

$$P_f = \left(1 + \frac{0{,}0275}{4}\right)^4 6000 \simeq 6167 \tag{25}$$

- Capitalización compuesta mensual:

$$P_f = \left(1 + \frac{0{,}0275}{12}\right)^{12} 6000 \simeq 6167 \tag{26}$$

- Capitalización compuesta semanal:

$$P_f = \left(1 + \frac{0{,}0275}{52}\right)^{52} 6000 \simeq 6167 \tag{27}$$

- Capitalización compuesta diaria:

$$P_f = \left(1 + \frac{0{,}0275}{365}\right)^{365} 6000 \simeq 6167 \tag{28}$$

- Capitalización contínua:

$$P_f = e^{1\times 0{,}025} 6000 \simeq 6167 \tag{29}$$

Como se puede ver, la capitalización compuesta tiene como límite el valor obtenido en la capitalización contínua 29, ya que justo esta capitalización se define como la compuesta tomando $m \to \infty$.

1.7. Ejercicio 7.

Obtén la capitalización continua para la inversión del ejercicio propuesto en el caso de capitalización compuesta.

Aplicamos la fórmula 23 para los datos de dicho ejercicio, de forma análoga a lo que realizamos en 22:

$$P_f = e^{1\times 0{,}0305} \times e^{1\times 0{,}029} \times e^{1\times 0{,}028} \times e^{2\times 0{,}0265} \times e^{5\times 0{,}025} \times 6000 \simeq 7824 \tag{30}$$

1.8. Ejercicio 8.

Calcula la TAE en % de una inversión al tipo nominal del 2,5 %, que paga intereses cada mes. Repite el cálculo si los intereses son anuales, semestrales, trimestrales, semanales, diarios o contínuos.

La fórmula general del TAE para capitalización compuesta es:

$$y^* = \left(1 + \frac{y}{m}\right)^m - 1 \tag{31}$$

Mientras que la contínua es:

$$y^* = e^y - 1 \tag{32}$$

Calculamos caso por caso:

- Compuesta anual:

$$y^* = \left(1 + \frac{0{,}025}{1}\right)^1 - 1 \simeq 0{,}0249 \tag{33}$$

- Compuesta semestral:

$$y^* = \left(1 + \frac{0{,}025}{2}\right)^2 - 1 \simeq 0{,}0251 \tag{34}$$

- Compuesta trimestral:

$$y^* = \left(1 + \frac{0{,}025}{4}\right)^4 - 1 \simeq 0{,}0252 \tag{35}$$

- Compuesta mensual:

$$y^* = \left(1 + \frac{0{,}025}{12}\right)^{12} - 1 \simeq 0{,}0253 \tag{36}$$

- Compuesta semanal:

$$y^* = \left(1 + \frac{0{,}025}{52}\right)^{52} - 1 \simeq 0{,}0253 \tag{37}$$

- Compuesta diaria:

$$y^* = \left(1 + \frac{0{,}025}{1}\right)^1 - 1 \simeq 0{,}0253 \tag{38}$$

- Continua:

$$y^* = e^{0{,}025} - 1 \simeq 0{,}0253 \tag{39}$$

1.9. Ejercicio 9.

Para los tipos nominales del 2 %, 2,5 %, 3 % y 5 % aplicados a una capitalización continua, determina el % de TAE.

Usando la fórmula 32, para los distintos intereses, resulta:

- $y = 2 \Rightarrow y^* \simeq 0{,}0202$
- $y = 2{,}5 \Rightarrow y^* \simeq 0{,}0253$
- $y = 3 \Rightarrow y^* \simeq 0{,}0304$
- $y = 5 \Rightarrow y^* \simeq 0{,}0513$

1.10. Ejercicio 10.

Compara, en términos de TAE, una inversión que paga intereses del 2,1 % anual con una que paga el 2 % semanal.

Realizamos el cálculo con la fórmula de TAE compuesta para ambos casos:

- Compuesta anual, $y = 2{,}1\,\%$:

$$y^*_{y=0{,}021,m=1} = \left(1 + \frac{0{,}021}{1}\right)^1 - 1 = 0{,}021 \tag{40}$$

- Compuesta semanal, $y = 2\,\%$:

$$y^*_{y=0{,}02,m=52} = \left(1 + \frac{0{,}02}{52}\right)^{52} - 1 \simeq 0{,}0202 \tag{41}$$

Donde se puede ver que la anual es mayor que la semanal.

1.11. Ejercicio 11.

Elabora un programa en MATLAB que proporcione la TAE de una inversión en el caso de capitalización continua y compuesta (en el caso no general).

Junto a este documento se adjunta este y otros programas realizados en archivos .m . El código correspondiente es:

```
%%%% Programa para calcular la TAE.

% Lista de tipos de acumulacion. Elegir en la linea 8 la posicion del tipo
% de acumulacion en la lista.
acumulacion=["anual","semestral","trimestral","mensual","semanal","diaria","↩
    horaria"];

fprintf("Acumulacion compuesta")
TAE_comp(2.5,acumulacion(1))        %% Llamada a la funcion que calcula la TAE↩
     compuesto, con un interes de 2.5%

fprintf("Acumulacion continua")     %% Llamada a la funcion que calcula la TAE↩
     continua, con un interes de 2.5%
TAE_cont(2.5)

function yp=TAE_comp(y,acumulacion)
```

```
    y=y/100;
    if acumulacion == "anual"
        m=1;
    elseif acumulacion == "semestral"
        m=2;
    elseif acumulacion == "trimestral"
        m=4;
    elseif acumulacion == "mensual"
        m=12;
    elseif acumulacion == "semanal"
        m=52;
    elseif acumulacion == "diaria"
        m=365;
    elseif acumulacion == "horaria"
        m=8760;
    end
    yp=(1+y/m)^m-1;
end

function yp=TAE_cont(y)
    y=y/100;
    yp=exp(y)-1;
end
```

1.12. Ejercicio 12

Calcula el valor actualizado de 6000 euros a recibir dentro de 6 a nos para una tasa de interés constante del 3 % anual en el caso simple, compuesto mensual y continuo.

En este caso usamos la fórmula de actualización simple, acutalización compuesta y actualización continua, dadas por las expresiones, respectivamente:

$$P_{actual} = P_f \left(1 + y\frac{n_d}{n_A}\right)^{-1} \tag{42}$$

$$P_{actual} = P_f \left(1 + \frac{y}{m}\right)^{-m\ n} \tag{43}$$

$$P_{actual} = P_f\ e^{-ny} \tag{44}$$

Donde resultan:

- Actualización simple:

$$P_{actual} = 6000 \left(1 + 0{,}03\frac{6 \times 365}{365}\right)^{-1} \simeq 5084{,}75 \tag{45}$$

- Actualización compuesta mensual:

$$P_{actual} = 6000 \left(1 + \frac{0{,}03}{12}\right)^{-12\times 6} \simeq 5012{,}74 \tag{46}$$

- Actualización continua:

$$P_{actual} = 6000\ e^{-6\times 0{,}03} \simeq 5011{,}62 \tag{47}$$

1.13. Ejercicio 13.

Calcula la actualización simple de un valor futuro, P, a recibir dentro de n años, suponiendo que la tasa de interés entre el año $i-1$ y el i es y_i. En esta situación calcula la actualización compuesta en el caso de m composiciones por año.

La fórmula de actualización simple original es 42, sin embargo hemos de modificarla para el caso de tener distintos intereses cada año. Puesto que no es compuesta, es decir, no parte del valor anterior de capitalización, la fórmula resultante sería:

$$P_{actual} = P_f \left(1 + \sum_{i=1}^{n} y_{i-1,i} \frac{n_{d,i-1}}{n_A}\right)^{-1} \tag{48}$$

Donde $y_{i-1,i}$ es la tasa de interés entre el año $i-1$ y el i en tanto por uno. Teniendo en cuenta que si se realiza el cálculo tomando todos los días de cada año, tendremos que $n_{d,i-1} = n_A$, resultando la fórmula:

$$P_{actual} = P_f \left(1 + \sum_{i=1}^{n} y_{i-1,i}\right)^{-1} \tag{49}$$

En el caso de la compuesta con m actualizaciones por año, se modifica la ecuación 43 acorde a lo propuesto en el enunciado, resultando:

$$P_{actual} = P_f \left(1 + \frac{y_{n-1,n}}{m}\right)^{-m} \times \left(1 + \frac{y_{n-2,n-1}}{m}\right)^{-m} \times ... \times \left(1 + \frac{y_{0,1}}{m}\right)^{-m} \tag{50}$$

La principal diferencia entre 43 y 50 es que la primera supone el mismo interés anual durante n años, mientras que la segunda acepta distintos intereses cada año durante n años.

1.14. Ejercicio 14.

En los casos del ejercicio anterior calcula el valor actualizado, simple y con composición semestral, de 6000 euros a recibir dentro de 10 años, sabiendo que la tasa de intereses viene dada por la tabla:

Años	Tipo (%)
0 - 5	2.5
5 - 7	2.65
7 - 8	2.8
8 - 9	2.9
9 - 10	3.05

Para el caso de la actualización simple, usando la ecuación 49:

$$P_{actual} = 6000\,(1 + 5 \times 0{,}025 + 2 \times 0{,}0265 + 0{,}028 + 0{,}029 + 0{,}0305)^{-1} \simeq 4741 \tag{51}$$

Mientras que para el caso compuesto semestral, mediante 50:

$$
\begin{aligned}
P_{actual} = 6000\left(1+\frac{y_{0{,}0305}}{2}\right)^{-2} \times \left(1+\frac{0{,}029}{m}\right)^{-2} \times \left(1+\frac{0{,}028}{m}\right)^{-2} \\
\times \left(1+\frac{0{,}0265}{m}\right)^{-2\times 2} \times \left(1+\frac{0{,}025}{m}\right)^{-2\times 5} \simeq 4609
\end{aligned}
\tag{52}
$$

1.15. Ejercicio 15.

Calcula el valor de un contrato de futuros a 24 meses y un precio pactado de 23 euros sobre un activo, cuyo precio actual es de 30 euros y siendo el tipo de interés anual del 5 % para ese vencimiento.

Haciendo uso de la ecuación:

$$
F_T(t) = S(t) - K\ e^{-r_{(t,T)}(T-t)} \tag{53}
$$

Tenemos como datos que $K = 23$, $S(t) = 30$, $r_{(t,T)} = 0{,}02$ y $T - t = 2$ años. Por lo que sustituyendo en 53:

$$
F_T(t) = 30 - 23\ e^{0{,}05\times 2} \simeq 9{,}188 \tag{54}
$$

1.16. Ejercicio 16.

Repite el cálculo para el caso en que el activo pague 2 euros al cabo de seis, doce, dieciocho y veinticuatro meses, con tipos de 2, 3, 4 y 5 por ciento a los meses antes indicados.

En este caso, la ecuación 53 se modifica añadiendo el término $-I(t)$, correspondiente al pago de rentas. Con los datos dados, la expresión correspondiente resulta:

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= S(t) - I(t) - K\ e^{-r_{(t,T)}(T-t)} \\
&= 30 - 2\left(e^{-0{,}02\times\frac{1}{2}} + e^{-0{,}03\times 1} + e^{-0{,}04\times\frac{3}{2}} + e^{-0{,}05\times 2}\right) - 23\ e^{-0{,}05\times 2} \simeq 0{,}408
\end{aligned}
\tag{55}
$$

1.17. Ejercicio 17.

Repite el cálculo para el caso en que el activo pague una tasa de dividendo del 2 %.

Modificamos la ecuación 55 añadiendo el término de pago de dividendos:

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= S(t)e^{-d(T-t)} - K\ e^{-r_{(t,T)}(T-t)} \\
&= 30e^{-0{,}02\times 2} - 23\ e^{-0{,}05\times 2} \simeq 8{,}0124
\end{aligned}
\tag{56}
$$

1.18. Ejercicio 18.

Calcular el precio de emisión de un bono a 10 años con valor principal de 1000 euros, que paga cupones anuales de 6 euros, suponiendo que el tipo

de interés con vencimientos de 1 a 5 años es del 3 % y a cada año adicional hasta 10 se incrementa un 0,25 %. Haz el cálculo suponiendo que los tipos corresponden a capitalización simple, compuesta y continua.

Comenzando con la capitalización simple, su fórmula de bonos es:

$$B = \frac{P}{(1 + \sum_{j=1}^{m} y_j)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{(1 + \sum_{j=1}^{i} y_j)} \tag{57}$$

Por lo que, con estos datos:

$$\begin{aligned} B = & \frac{6}{1+0{,}03} + \frac{6}{1+0{,}03\times 2} + \frac{6}{1+0{,}03\times 3} + \frac{6}{1+0{,}03\times 4} \frac{6}{1+0{,}03\times 5} \frac{6}{1+0{,}0325\times 6} \\ & + \frac{6}{1+0{,}035\times 7} + \frac{6}{1+0{,}0375\times 8} + \frac{6}{1+0{,}04\times 9} + \frac{6}{1+0{,}0425\times 10} \\ & + \frac{1000}{1+0{,}0425\times 10} \simeq 749 \end{aligned} \tag{58}$$

Para el caso de la capitalización compuesta, la fórmula del valor de emisión del bono viene dada por la expresión:

$$B = \frac{P}{(1 + y_m)^{t_m}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{(1 + y_i)^{t_i}} \tag{59}$$

Por lo que, bajo los datos dados por el enunciado:

$$\begin{aligned} B = & \frac{6}{1{,}03} + \frac{6}{1{,}03^2} + \frac{6}{1{,}03^3} + \frac{6}{1{,}03^4} + \frac{6}{1{,}03^5} + \frac{6}{1{,}0325^6} \\ & + \frac{6}{1{,}035^7} + \frac{6}{1{,}0375^8} + \frac{6}{1{,}04^9} + \frac{6}{1{,}0425^{10}} + \frac{1000}{1{,}0425^{10}} \simeq 709{,}326 \end{aligned} \tag{60}$$

Mientras que para la capitalización contínua, la fórmula es:

$$B = Pe^{-y_m t_m} + \sum_{i=1}^{m} C_i e^{-y_i t_i} \tag{61}$$

Entonces, resulta:

$$\begin{aligned} B = & 6e^{-0{,}03} + 6e^{-0{,}03\times 2} + 6e^{-0{,}03\times 3} + 6e^{-0{,}03\times 4} + 6e^{-0{,}03\times 5} + 6e^{-0{,}0325\times 6} \\ & + 6e^{-0{,}035\times 7} + 6e^{-0{,}0375\times 8} + 6e^{-0{,}04\times 9} + 6e^{-0{,}0425\times 10} + 1000e^{-0{,}0425\times 10} \\ & \simeq 703{,}39 \end{aligned} \tag{62}$$

1.19. Ejercicio 19.

Calcular la expresión de duración y la convexidad de un bono en el caso de capitalización compuesta y contínua.

Siendo B definido por:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{P}{(1+y)^{t_m}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{(1+y)^{t_i}} && \text{Capitalización compuesta} \\
B &= Pe^{-yt_m} + \sum_{i=1}^{m} C_i e^{-yt_i} && \text{Capitalizacion continua}
\end{aligned} \tag{63}
$$

Las expresiones de la duración **D** y la convexidad **C** vienen dadas por:

$$
\mathbf{D} = -\frac{1+y}{B}\frac{dB}{dy} \quad , \quad \mathbf{C} = \frac{1}{B}\frac{d^2B}{dy^2} \tag{64}
$$

Comenzando con la capitalización compuesta, la duración es:

$$
\mathbf{D} = (1+y)\frac{\frac{Pt_m}{(1+y)^{t_m+1}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i t_i}{(1+y)^{t_i+1}}}{\frac{P}{(1+y)^{t_m}} + \sum_{j=1}^{m} \frac{C_j}{(1+y)^{t_j}}} \tag{65}
$$

Y la convexidad:

$$
\mathbf{C} = \frac{\frac{P(t_m+1)t_m}{(1+y)^{t_m+2}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i(t_i+1)t_i}{(1+y)^{t_i+2}}}{\frac{P}{(1+y)^{t_m}} + \sum_{j=1}^{m} \frac{C_j}{(1+y)^{t_j}}} \tag{66}
$$

Mientras que para el caso de la capitalización continua, la duración resulta:

$$
\mathbf{D} = \frac{(1+y)\left\{Pt_m e^{-yt_m} + \sum_{i=1}^{m} C_i t_i e^{-yt_i}\right\}}{Pe^{-yt_m} + \sum_{i=j}^{m} C_j e^{-yt_j}} \tag{67}
$$

Y la convexidad:

$$
\mathbf{C} = \frac{Pt_m^2 e^{-yt_m} + \sum_{i=1}^{m} C_i t_i^2 e^{-yt_i}}{Pe^{-yt_m} + \sum_{i=j}^{m} C_j e^{-yt_j}} \tag{68}
$$

1.20. Ejercicio 20.

Calcular la expresión de duración y la convexidad de un bono a 10 años con valor principal de 1000 euros, que paga cupones anuales de 6 euros, suponiendo que el tipo de interés con vencimientos de 1 a 5 años es del 3 % y a cada año adicional hasta 10 se incrementa un 0,25 %. Haz el cálculo suponiendo que los tipos corresponden a capitalización compuesta y capitalización continua.

Para la realización de este ejercicio se ha realizado un código en matlab debido a la complejidad de los cálculos. Para empezar, necesitamos encontrar el valor de la y de la TIR para los casos compuesto y continuo. Estos valores los obtenemos aplicando el método de bisección sobre la funciones de la TIR 63, donde obtenemos:

$$
y_{compuesto} = 0{,}042237828610830 \quad , \quad y_{continuo} = 0{,}042237784450248 \tag{69}
$$

Por lo que con los valores de 69 podemos calcular la duración y la convexidad del caso compuesto y continuo:

- Caso compuesto:

$$
\mathbf{D} = 9{,}34817 \quad , \quad \mathbf{C} = 96{,}89015 \tag{70}
$$

- Caso continuo:

$$\mathbf{D} = 10{,}07824 \qquad , \qquad \mathbf{C} = 95{,}55373 \tag{71}$$

A continuación se anexa el código usado para dichos cálculos:

```
format long

% Funciones de calculo de la TIR.
% Datos iniciales: intereses y tiempo maximo.

y=[0.03,0.03,0.03,0.03,0.03,0.0325,0.035,0.0375,0.04,0.0425];
tm=10;

% Precio de emision de los bonos, caso compuesto y continuo,
% respectivamente
B_1=B_comp(y,tm);
B_2=B_cont(y,tm);


% y de la TIR en el caso compuesto
fprintf("Valor de y para el caso compuesto")
Y1=dicot_TIR(0.03,0.05,@TIR_comp,B_1,tm)
% Comprobacion para el caso continuo
p1=TIR_comp(Y1,B_1,tm);

der_B1=d_TIR_comp(Y1,tm);
der2_B1=d2_TIR_comp(Y1,tm);

% Duracion para el caso compuesto
fprintf("Duracion para el caso compuesto")
D1=-(1+Y1)*der_B1/B_1

% Convexidad para el caso compuesto
fprintf("Convexidad para el caso compuesto")
C1=der2_B1/B_1



% y de la TIR en el caso continuo
fprintf("Valor de y para el caso continuo")
Y2=dicot_TIR(0.03,0.05,@TIR_cont,B_2,tm)
% Comprobacion para el caso continuo
p2=TIR_cont(Y2,B_2,tm);

der_B2=d_TIR_cont(Y2,tm);
der2_B2=d2_TIR_cont(Y2,tm);

% Duracion para el caso compuesto
fprintf("Duracion para el caso continuo")
D1=-(1+Y2)*der_B2/B_2

% Convexidad para el caso compuesto
fprintf("Convexidad para el caso continuo")
C1=der2_B2/B_2


function c=dicot_TIR(a,b,TIR,B_c,tm)
    c=(a+b)/2;
    fa=TIR(a,B_c,tm);
    fb=TIR(b,B_c,tm);
    fc=TIR(c,B_c,tm);
    if fa*fb<0
        %fprintf("Hay un cambio de signo en el intervalo [a,b]. Aplicando ↩
            dicotomia a la funcion.")
        for i=1:100          % Suponemos por defecto 100 iteraciones.
            if fa*fc<0
                b=c;
```

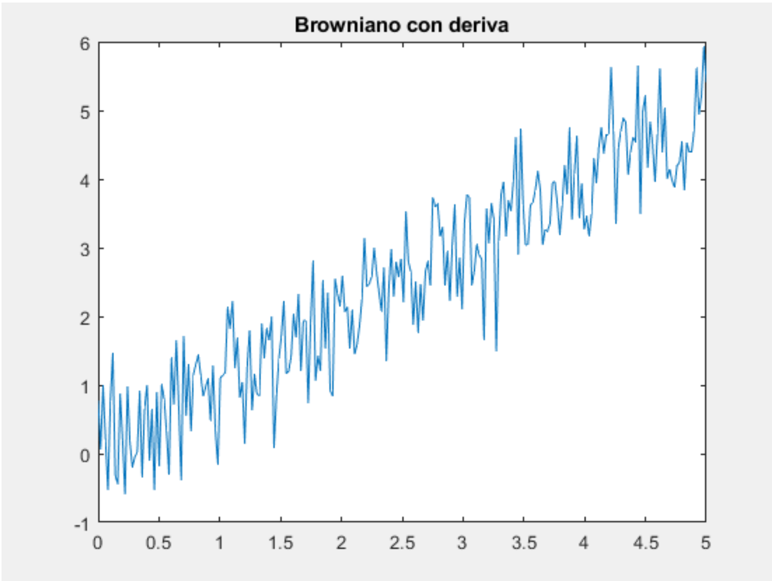
```
                c=(a+b)/2;
                fb=TIR(b,B_c,tm);
                fc=TIR(c,B_c,tm);
            elseif fc*fb<0
                a=c;
                c=(a+b)/2;
                fa=TIR(a,B_c,tm);
                fc=TIR(c,B_c,tm);
            end
        end
    else
        fprintf("No hay cambio de signo en la funcion. Devolvemos el valor 0 ↩
            por defecto.")
        c=0;
    end
end


% FUNCIONES PARTE COMPUESTA

% Funcion precio de emision de bono compuesta
function f=B_comp(y,tm)
    f=0;
    for i=1:tm-1
        f=f+6/(1+y(i))^i;
    end
    f=f+1006/(1+y(tm))^tm;
end

% Funcion que resta la TIR con el valor de emision del bono en el caso ↩
    compuesto, para poder
% aplicar el metodo de dicotomia.
function f=TIR_comp(y,B,tm)
    f=B;
    for i=1:tm-1
        f=f-6/(1+y)^i;
    end
    f=f-1006/(1+y)^tm;
end

%derivada primera de la TIR compuesta
function f=d_TIR_comp(y,tm)
    f=0;
    for i=1:tm-1
        f=-f+6*i/(1+y)^(i+1);
    end
    f=f-1006*tm/(1+y)^(tm+1);
end

%derivada segunda de la TIR compuesta

function f=d2_TIR_comp(y,tm)
    f=0;
    for i=1:tm-1
        f=f+6*i*(i+1)/(1+y)^(i+2);
    end
    f=f+1006*tm*(tm+1)/(1+y)^(tm+2);
end

% FUNCIONES PARTE CONTINUA

% Funcion precio de emision de bono continuna
function f=B_cont(y,tm)
    f=0;
    for i=1:tm-1
        f=f+6*exp(-y(i)*i);
    end
    f=f+1006*exp(-y(tm)*tm);
end
```

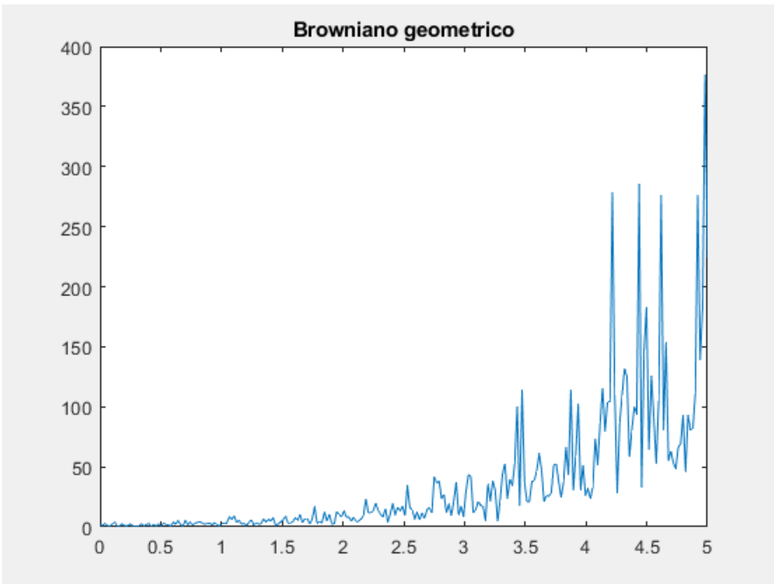
```matlab
% Funcion que resta la TIR con el valor de emision del bono en el caso ↩
    continuo, para poder
% aplicar el metodo de dicotomia.
function f=TIR_cont(y,B,tm)
    f=B;
    for i=1:tm-1
        f=f-6*exp(-y*i);
    end
    f=f-1006*exp(-y*tm);
end

% Funcion derivada primera de la TIR continua
function f=d_TIR_cont(y,tm)
    f=0;
    for i=1:tm-1
        f=f-6*exp(-y*i)*i;
    end
    f=f-1006*exp(-y*tm)*tm;
end

% Funcion derivada segunda de la TIR continua
function f=d2_TIR_cont(y,tm)
    f=0;
    for i=1:tm-1
        f=f+6*exp(-y*i)*i^2;
    end
    f=f+1006*exp(-y*tm)*tm^2;
end
```

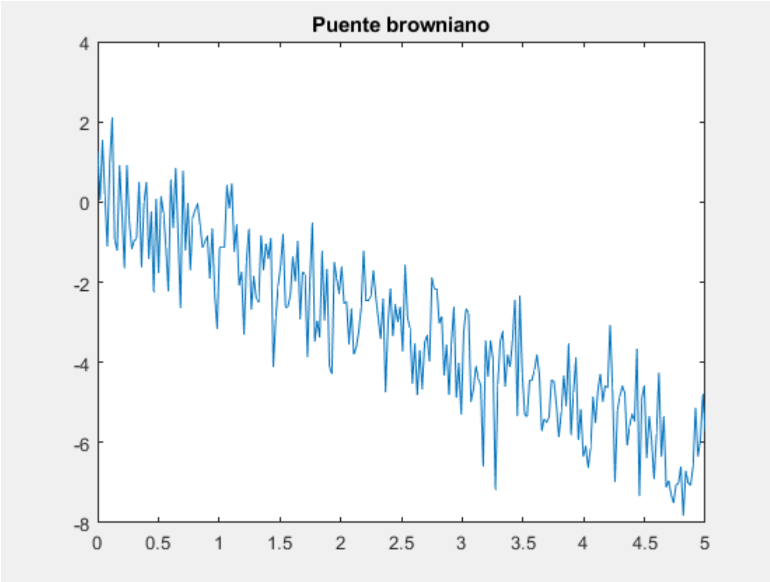
2. Introducción al cálculo estocástico. Precios de activos con riesgo.

2.1. Ejercicio 1.

Para este ejercicio tenemos que representar el browniano con deriva, el geométrico, y el puente browniano, que se adjuntan respectivamente en las siguientes figuras. Posteriormente se adjunta el código con el cual se han programado las tres, correspondiente al archivo Ejercicio2_1.m.








```
%%% Brownianos

L=250;
X = randn(1,L);
t = linspace(0,5,L);

mu=1;
sig=0.6;

Y1=brow_deriv(t,X,mu,sig,L);
Y2=brow_geo(t,X,mu,sig,L);
Y3=puen_brow(t,X,L);

figure(1)
plot(t,Y1)
title('Browniano con deriva')


figure(2)
plot(t,Y2)
title('Browniano geometrico')


figure(3)
plot(t,Y3)
title('Puente browniano')


% Browniano con deriva
function Y = brow_deriv(t,X,mu,sig,L)
    Y = zeros(1,L);
    for i = 1:L
        Y(i) = mu*t(i)+sig*X(i);
    end
end

% Browniano geometrico
function Y = brow_geo(t,X,mu,sig,L)
    Y = zeros(1,L);
    for i = 1:L
        Y(i) =exp(mu*t(i)+sig*X(i));
    end
end

% Puente browniano
```

```
function Y = puen_brow(t,X,L)
    Y = zeros(1,L);
    for i = 1:L
        Y(i) =X(i)-t(i)*X(1);
    end
end
```

2.2. Ejercicio 2.

Calcular la funciones de la media y las covarianzas de los procesos anteriores.

- Browniano con deriva:

$$Y_t = \mu t + \sigma X_t \tag{72}$$

  - Media:

$$\mu_y(t) = E[Y_t] = E[\mu t + \sigma X_t] = E[\mu t] + E[\sigma X_t] = \mu E[t] + \sigma E[X_t] = \mu t \tag{73}$$

  - Covarianza:

$$\begin{aligned} c_y(t,s) &= E[(Y_t - \mu_y(t))(Y_s - \mu_y(s))] = E\left[\sigma^2 X_t X_s\right] = \sigma^2 E[X_t X_s] \\ &= \sigma^2 \min\{t,s\} \end{aligned} \tag{74}$$

  - Browniano geométrico:

$$Y_t = e^{\mu t + \sigma X_t} \tag{75}$$

    - Media:

$$E[Y_t] = E\left[e^{\mu t} e^{\sigma X_t}\right] = e^{\mu t} E\left[e^{\sigma X_t}\right] \tag{76}$$

    Definiendo $X_t = \sqrt{t}z$:

$$E[Y_t] = e^{\mu t} E\left[e^{\sigma \sqrt{t} z}\right] = e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} \tag{77}$$

◦ Covarianza:

$$\begin{aligned}
c_y(t,s) &= E\left[(Y_t-\mu_y(t))(Y_s-\mu_y(s))\right] \\
&= e^{\mu(t+s)}E\left[(e^{\sigma X_t}-e^{\frac{\sigma^2 t}{2}})(e^{\sigma X_s}-e^{\frac{\sigma^2 s}{2}})\right] \\
&= e^{\mu(t+s)}E\left[e^{\sigma X_t}e^{\sigma X_s}-e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}e^{\sigma X_s}-e^{\frac{\sigma^2 s}{2}}e^{\sigma X_t}+e^{\frac{\sigma^2 s}{2}}e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}\right] \\
&= e^{\mu(t+s)}\left\{E\left[e^{\sigma(X_t+X_s)}\right]-E\left[e^{\frac{\sigma^2 t}{2}+\sigma X_s}\right]\right. \\
&\left.-E\left[e^{\frac{\sigma^2 s}{2}+\sigma X_t}\right]+E\left[e^{\frac{\sigma^2(s+t)}{2}}\right]\right\} \\
&= e^{\mu(t+s)}\left\{E\left[e^{\sigma(X_t+X_s)}\right]-e^{\frac{\sigma^2(t+s)}{2}}-e^{\frac{\sigma^2(t+s)}{2}}+e^{\frac{\sigma^2(t+s)}{2}}\right\} \\
&= e^{\mu(t+s)}\left\{E\left[e^{\sigma(X_t+X_s)}\right]-e^{\frac{\sigma^2(t+s)}{2}}\right\} \rightarrow X_t \text{ y } X_s \text{ independientes} \\
&= e^{\mu(t+s)}\left\{E\left[e^{\sigma(X_t-X_s)}\right]E\left[e^{\sigma(2X_s)}\right]-e^{\frac{\sigma^2(t+s)}{2}}\right\} \\
&= e^{\mu(t+s)}\left\{e^{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}}e^{\sigma^2 2s}-e^{\frac{\sigma^2(t+s)}{2}}\right\} \\
&= e^{\mu(t+s)}\left\{e^{\frac{\sigma^2(t+s)}{2}}e^{\sigma^2 s}-e^{\frac{\sigma^2(t+s)}{2}}\right\} \\
&= e^{\mu(t+s)}e^{\frac{\sigma^2(t+s)}{2}}\left(e^{\sigma^2 s}-1\right)
\end{aligned} \tag{78}$$

◦ Puente browniano:

$$Y_t = X_t - tX_1 \tag{79}$$

◦ Media:

$$\mu_y(t) = E[y_t] = E[X_t - tX_1] = E[X_t] - tE[X_1] = 0 \tag{80}$$

◦ Covarianza

$$\begin{aligned}
c_y(t,s) &= E\left[(Y_t-\mu_y(t))(Y_s-\mu_y(s))\right] = E[Y_tY_s] \\
&= E[(X_t-tX_1)(X_s-sX_1)] = E[X_tX_s] - tE[X_sX_1] \\
&- sE[X_1X_t] + tsE[X_1X_1] = \min\{t,s\} - t\min\{1,s\} \\
&- s\min\{t,1\} + t\ s\min\{1,1\} \\
&= \min\{t,s\} - t\min\{1,s\} \\
-s\min\{t,1\} + t\ s
\end{aligned} \tag{81}$$

2.3. Ejercicio 3.

Suponiendo que X es un browniano, calcula las diferenciales estocásticas de los procesos:[1]

- $V_t = X_t^2$

[1] En clase se comentó tomar $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ para los dos primeros procesos.

- $V_t = \exp(X_t - 2t)$
- $V_t = \exp(2S_t)$, siendo $dS_t = \mu S_t dt + \sigma dX_t$, con μ y σ constantes positivas.
- $V_t = \exp(-rt)$, siendo $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t$, con r, μ y σ constantes positivas. En este caso, V_t es el precio descontado del activo S_t al tipo constante r.
- $V_t = f(t, X_t)$, con f suficientemente derivable. Indicar una condición necesaria y suficiente para que el proceso V_t sea martingala.

Utilizando la versión diferencial del Lema de Ito:

$$dV_t = \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial V_t}{\partial y}\right) dt + \beta \frac{\partial V_t}{\partial y} \tag{82}$$

Y evaluando 82 en $y = X_t$, realizamos la derivada estocástica de cada caso:

- $V_t = X_t^2$

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V_t}{\partial X} = 2X \quad , \quad \frac{\partial^2 V_t}{\partial X^2} = 2 \tag{83}$$

Sustituyendo estas derivadas en 82, resulta:

$$dV_t = dt + 2X_t dX_t \tag{84}$$

- $V_t = \exp(X_t - 2t)$

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = -\frac{V_t}{2} \quad , \quad \frac{\partial V_t}{\partial X} = V_t \quad , \quad \frac{\partial^2 V_t}{\partial X^2} = V_t \tag{85}$$

Realizando el proceso análogo al caso anterior, resulta:

$$dV_t = \left(-\frac{V_t}{2} + \frac{V_t}{2}\right) dt + V_t dX_t = V_t dX_t \tag{86}$$

- $V_t = \exp(2S_t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial V_t}{\partial X} &= 2V_t \\ \frac{\partial^2 V_t}{\partial X^2} &= 4V_t \end{aligned} \tag{87}$$

Por lo que su diferencial estocástica:

$$dV_t = \left(4V_t \frac{1}{2}\sigma^2 + \mu S_t 2V_t\right) dt + 2V_t \sigma dX_t = 2V_t(\mu S_t + \sigma^2)dt + 2V_t \sigma dX_t \tag{88}$$

- $V_t = \exp(-rt)$

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = -rV_t \quad , \quad \frac{\partial V_t}{\partial X_t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 V_t}{\partial X_t^2} = 0 \tag{89}$$

Así que resulta:

$$dV_t = -rV_t dt \tag{90}$$

- $V_t = f(t, X_t)$ Para que sea martingala ha de cumplir:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{91}$$

3. Técnica de cobertura dinámica y modelos de Black-Scholes

3.1. Ejercicio 1.

Obtener el modelo de Black-Scholes para dividendos contínuos.
Partimos de:

$$dS_t = (\mu - D_0)S_t dt + \sigma S_t dS \tag{92}$$

Y tenemos que:

$$\pi_t = V_t - \Delta\ S_t \Rightarrow d\pi_t = dV_t - \Delta\ dS_t - D_0\Delta\ S_t dt \tag{93}$$

Sustituyendo 92 en 93:

$$d\pi_t = dV_t - \Delta\ (\mu - D_0)S_t dt - \Delta\sigma S_t dS - D_0\Delta\ S_t dt \tag{94}$$

Además, como tenemos presente la diferencial del proceso V_t, si aplicamos el Lema de Ito:

$$dV_t = \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2} + (\mu - D_0)S_t \frac{\partial V_t}{\partial S}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V_t}{\partial S} dS \tag{95}$$

Ahora bien, suponiendo que la cartera π_t es libre de riesgo:

$$\Delta = \frac{\partial V_t}{\partial S} \tag{96}$$

Y que además no hay arbitraje:

$$d\pi_t = r\pi_t dt = r\left(V_t - S_t \frac{\partial V}{\partial S}\right) dt \tag{97}$$

Igualando las expresiones 94 y 97 y sustituyendo en ellas 95 y 96:

$$\begin{aligned} rV_t dt - rS_t \frac{\partial V}{\partial S} dt = &\left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2} + (\mu - D_0)S_t \frac{\partial V_t}{\partial S}\right) dt \\ &+ \sigma S_t \frac{\partial V_t}{\partial S} dS - \frac{\partial V_t}{\partial S}(\mu - D_0)S_t dt - \frac{\partial V_t}{\partial S}\sigma S_t dS - D_0 \frac{\partial V_t}{\partial S} S_t dt \end{aligned} \tag{98}$$

Vemos que los términos de 98 que contienen un dS se anulan entre ellos, por lo que la expresión se simplifica a los términos factores comunes de dt:

$$\begin{aligned} rV_t - rS_t \frac{\partial V_t}{\partial S} = &\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2} \\ &+ (\mu - D_0)S_t \frac{\partial V_t}{\partial S} - \frac{\partial V_t}{\partial S}(\mu - D_0)S_t - D_0 \frac{\partial V_t}{\partial S} S_t \end{aligned} \tag{99}$$

Agrupando todos los términos de 99 a un lado de la ecuación:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2} + \frac{\partial V_t}{\partial S}(rS_t + \mu S_t - D_0 S_t - \mu S_t + D_0 S_t - D_0 S_t) - rV_t = 0 \tag{100}$$

Por lo que simplificando elementos en 100

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2} + \frac{\partial V_t}{\partial S}\left(r - D_0\right) S_t - rV_t = 0 \tag{101}$$

Que se corresponde con la fórmula de Black - Scholes para dividendos contínuos.

4. Métodos numéricos para valorar opciones con un factor estocástico

4.1. Ejercicio 1.

Obtener el sistema de ecuaciones a resolver en cada paso de tiempo para el esquema del $\theta-$método.

Para obtener dicho esquema en la ecuación 101, hemos de plantear las aproximaciones numéricas del $\theta-$método. Descomponiendo el intervalo temporal $[0,T]$ en $N+1$ intervalos y el intervalo espacial $[0,S_\infty]$ en $M+1$, tenemos las cantidades:

$$\Delta t = \frac{T}{N+1} \qquad , \qquad \Delta S = \frac{S_\infty}{M+1} \tag{102}$$

Por lo que las aproximaciones del $\theta-$método son:

$$\begin{aligned}
t_j^\theta &\simeq \theta t_j + (1-\theta)t_{j+1} \\
C(t_j^\theta, S_i) &\simeq \theta C_{j,i} + (1-\theta)C_{j+1,i} \\
\frac{\partial C_{j,i}}{\partial t} &\simeq \frac{C_{j+1,i}-C_{j,i}}{\Delta t} \\
\frac{\partial C_{j,i}}{\partial S} &\simeq \theta\frac{C_{j,i+1}-C_{j,i}}{\Delta S} + (1-\theta)\frac{C_{j+1,i+1}-C_{j+1,i}}{\Delta S} \\
\frac{\partial^2 C_{j,i}}{\partial S^2} &\simeq \theta\frac{C_{j,i+1}-2C_{j,i}+C_{j,i-1}}{\Delta S^2} + (1-\theta)\frac{C_{j+1,i+1}-2C_{j+1,i}+C_{j+1,i-1}}{\Delta S^2}
\end{aligned} \tag{103}$$

Juntamos todas las expresiones de 103 en la forma discretizada de la ecuación 101, para obtener:

$$\begin{aligned}
&\frac{C_{j+1,i}-C_{j,i}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \theta \frac{C_{j,i+1}-2C_{j,i}+C_{j,i-1}}{\Delta S^2} \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 (1-\theta)\frac{C_{j+1,i+1}-2C_{j+1,i}+C_{j+1,i-1}}{\Delta S^2} + (r-D_0)S_i\theta\frac{C_{j,i+1}-C_{j,i}}{\Delta S} \\
&+ (r-D_0)S_i(1-\theta)\frac{C_{j+1,i+1}-C_{j+1,i}}{\Delta S} - r\theta C_{j,i} + r(1-\theta)C_{j+1,i} = 0
\end{aligned} \tag{104}$$

Reorganizando los términos de la expresión 104, juntamos en la parte derecha de la ecuación a los términos correspondientes al tiempo $j+1$, sacando factores comunes, mientras que en la parte izquierda colocamos los correspondientes al tiempo j:

$$\begin{aligned}
&C_{j,i-1}\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S_i^2\theta}{\Delta S^2} - C_{i,j}\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 S_i^2\theta}{\Delta S^2} - \frac{(r-D_0)S_i\theta}{\Delta S} - r\theta\right] \\
&+ C_{j,i+1}\theta\left[\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S_i^2}{\Delta S^2} + \frac{r-D_0 S_i}{\Delta S}\right] = -C_{j+1,i-1}\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S_i^2}{\Delta S^2}(1-\theta) \\
&- C_{j+1,i}\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma^2 S_i^2(1-\theta)}{\Delta S^2} - \frac{(r-D_0)S_i(1-\theta)}{\Delta S} - (1-\theta)r\right] \\
&- C_{j+1,i+1}\left[\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S_i^2}{\Delta S^2} + \frac{r-D_0 S_i(1-\theta)}{\Delta S}\right]
\end{aligned} \tag{105}$$

Ahora bien, para aligerar los términos renombramos a las cantidades que multiplican a las C en 114:

$$
\begin{aligned}
A_{i,i-1} &= \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S_i^2\theta}{\Delta S^2} \\
A_{i,i} &= \frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 S_i^2\theta}{\Delta S^2} - \frac{(r-D_0)S_i\theta}{\Delta S} - r\theta \\
A_{i,i+1} &= \theta\left[\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S_i^2}{\Delta S^2} + \frac{r-D_0 S_i}{\Delta S}\right] \\
B_{i,i-1} &= -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S_i^2}{\Delta S^2}(1-\theta) \\
B_{i,i} &= -\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 S_i^2(1-\theta)}{\Delta S^2} + \frac{(r-D_0)S_i(1-\theta)}{\Delta S} + (1-\theta)r \\
B_{i,i+1} &= -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S_i^2}{\Delta S^2} - \frac{r-D_0 S_i(1-\theta)}{\Delta S}
\end{aligned}
\tag{106}
$$

Donde $i = 1, 2..., M$. Pero aun necesitamos las ecuaciones para $i = 0$ e $i = M+1$. Para ello usamos las condiciones de contorno. Para el caso de $i = 0$ se toma como condición $C(t, 0) = 0$, la cual en forma discreta resulta:

$$
C_{j,0} = C_{j+1,0} = 0 \tag{107}
$$

Por lo que:

$$
A_{0,0} = 1 \qquad , \qquad B_{0,0} = 1 \tag{108}
$$

Y el resto de términos de la fila 0 son ceros. Mientras tanto la condición de contorno en $M+1$ toma la forma:

$$
\begin{aligned}
&C(t, S_\infty) = S_\infty e^{-D(T-t)} - Ee^{-r(T-t)} \\
&\Rightarrow \theta C_{j,M+1} + (1-\theta)C_{j+1,M+1} = S_j e^{-D(T-t_j^\theta)} - Ee^{-r(T-t_j^\theta)} \\
&\Rightarrow \theta C_{j,M+1} = S_j e^{-D(T-t_j^\theta)} - Ee^{-r(T-t_j^\theta)} - (1-\theta)C_{j+1,M+1}
\end{aligned}
\tag{109}
$$

Así que en este caso tenemos $A_{M+1,M+1} = \theta$, $B_{M+1,M+1} = -(1-\theta)$ y tenemos un término adicional que colocamos en la parte correspondiente a $j+1$. Con esto, podemos ver que el planteamiento del sistema será de la forma $A\vec{c}_j = B\vec{c}_{j+1} + \vec{k}$, donde los vectores $\vec{c}_j$ y $\vec{c}_{j+1}$ son los vectores de coeficientes $C_{n,j}$ y $C_{n,j+1}$ respectivamente, mientras que las matrices A y B son aquellas cuyos coeficientes hemos definido anteriormente, y $\vec{k}$ corresponde al vector con coeficientes 0 salvo el $M+1$, el cual se corresponde con el término que no multiplica a ninguna C obtenido en 118.

El vector $\vec{k}$ tiene sentido colocarlo en ese lado de la ecuación, puesto que también tenemos una condición final sobre el tiempo, por lo que este esquema ha de resolverse hacia atrás en el tiempo, comenzando por $j = N+1$ hasta llegar a $j = 0$, así que el sistema será:

$$
\begin{pmatrix}
A_{0,0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\
0 & A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 \\
0 & 0 & A_{3,1} & A_{3,2} & \dots & 0 \\
. & . & . & . & \dots & . \\
0 & 0 & . & . & \dots & A_{M+1,M+1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
C_{j,0} \\ C_{j,1} \\ C_{j,2} \\ C_{j,3} \\ . \\ C_{j,M+1}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
B_{0,0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\
0 & B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \dots & 0 \\
0 & 0 & B_{3,1} & B_{3,2} & \dots & 0 \\
. & . & . & . & \dots & . \\
0 & 0 & . & . & \dots & B_{M+1,M+1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
C_{j+1,0} \\ C_{j+1,1} \\ C_{j+1,2} \\ C_{j+1,3} \\ . \\ C_{j+1,M+1}
\end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ K
\end{pmatrix}
\tag{110}
$$

Donde los coeficientes vienen dados por 115, 117 y los obtenidos a partir de 118.

4.2. Ejercicio 2.

Black Scholes para vainilla americanas con el θ-método.

En este caso, tomamos las aproximaciones numéricas de 103 para una $P(t, S)$, aplicado sobre el problema:

$$
\begin{aligned}
L(P) = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0 \qquad & \text{en } D = [0, T] \times [0, \infty) \\
P(t, S) \geq \max\{E - S, 0\} \qquad & \text{en } D \\
L(P) \times (P(t, S) - \max\{E - S, 0\}) = 0 \qquad & \text{en } D \\
P(T, S) = \max\{E - S, 0\} \qquad & S > 0 \\
P(t, S) \simeq 0 \qquad & t \in [0, T], S \to \infty \\
P(t, 0) = E \exp(-r(T - t)) \qquad & t \in [0, T]
\end{aligned}
\tag{111}
$$

Lo que nos interesa descomponer mediante discretización es la tercera expresion de 111. Vemos que tenemos dos componentes, $L(P)$ y $(P(t, S) - \max\{E - S, 0\})$. En cuanto a la discretización de $L(P)$, es el mismo procedimiento que la ecuación 104 cambiando las C por P, pero sin realizar el paso posterior de 114, es decir, sin despejar hacia el otro lado ya que en este caso no se puede. Entonces, agrupando los términos de P con sus respectivos subíndices, llegamos a obtener los mismos coeficientes de 115, pero los coeficientes B tendrán el signo cambiado al seguir en el mismo lado de la ecuación. Para este problema entonces los coeficientes serán $\hat{A}_{m,n} = A_{m,n}$, $\hat{B}_{m,n} = -B_{m,n}$, con $A_{m,n}$ y $B_{m,n}$ los del problema anterior y $\hat{A}_{m,n}$ y $\hat{B}_{m,n}$ los de este.

En cuanto al término $(P(t, S) - \max\{E - S, 0\})$, definimos $g_j = \max\{E - S, 0\})$ y discretizamos $P(t, S)$ de acuerdo a la segunda expresión de 103:

$$
P(t, S) - \max\{E - S, 0\} \simeq \theta P_{j,i} + (1 - \theta)P_{j+1,i} - g_j \tag{112}
$$

La ecuación resultante es:

$$\left(P_{j,i-1}\hat{A}_{i,i-1} + P_{j,i}\hat{A}_{i,i} + P_{j,i+1}\hat{A}_{i,i+1} + P_{j+1,i-1}\hat{B}_{i,i-1} + P_{j+1,i}\hat{B}_{i,i} + P_{j+1,i+1}\hat{B}_{i,i+1}\right) \times (\theta P_{j,i} + (1-\theta)P_{j+1,i} - g_j) = 0 \quad (113)$$

De la ecuación 104 y las dos primeras ecuaciones de 102, podemos plantear el problema de complementariedad discreto. Esto es, partiendo de la primera expresión de 102, discretizando para cada i, podemos obtener un sistema de la forma:

$$\hat{A}\vec{P}_j + \hat{B}\vec{P}_{j+1} \leq 0 \Rightarrow \hat{B}\vec{P}_{j+1} \leq -\hat{A}\vec{P}_j \Rightarrow \vec{P}_{j+1} \leq -\hat{B}^{-1}\hat{A}\vec{P}_j = \hat{M}\vec{P}_j \quad (114)$$

Mientras que para $\theta P_{j,i} + (1-\theta)P_{j+1,i} - g_j \geq 0$ hacemos un sistema análogo:

$$\theta\vec{P}_j + (1-\theta)\vec{P}_{j+1} - \vec{g}_j \geq 0 \Rightarrow \theta\vec{P}_j + (1-\theta)\vec{P}_{j+1} \geq \vec{g}_j \quad (115)$$

Entonces 114 y 115 nos conducen al problema de complementariedad discreto de la forma:

$$\left(\hat{M}\vec{P}_j - \vec{P}_{j+1}\right)^T \left(\theta\vec{P}_j + (1-\theta)\vec{P}_{j+1} - \vec{g}_j\right) = 0 \quad (116)$$

Lo cual es equivalente al problema de optimización cuadrática con restricciones:

$$\frac{1}{2}\vec{P}_j^T M\vec{P}_j - \vec{P}_j^T\vec{P}_{j+1} = \min_{y \geq \vec{g}_j}\left(\frac{1}{2}y^T M\ y - y^T P_{j+1}\right) \quad (117)$$

El cual se resuelve mediante el método de relajación con proyección.

5. Modelos Black-Scholes para bonos con un factor estocástico

5.1. Ejercicio 1

- **Deduce la ecuación de Black-Scholes para bono de cupón cero construyendo la cartera:**
$$\pi = B_1 - \Delta B_2 \tag{118}$$
siendo B_i un bono con vencimiento T_i.

- **Indica el valor Δ.**

- **Comprueba que coincide con la obtenida en términos de λ.**

A la cartera definida en 118 le hacemos su diferencial:

$$\begin{aligned} d\pi &= dB_1 - \Delta dB_2 = \mu_1 B_1 dt + \rho_1 B_1 dX - \Delta\mu_2 B_2 dt - \Delta\rho_2 B_2 dX \\ &= (\mu_1 B_1 - \Delta\mu_2 B_2)dt + (\rho_1 B_1 - \Delta\rho_2 B_2)dX \end{aligned} \tag{119}$$

Para tener la cartera libre de riesgos, imponemos la proporción de bonos:

$$B_1 = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}\pi \qquad , \qquad B_2 = \frac{\rho_1}{\Delta(\rho_2 - \rho_1)}\pi \tag{120}$$

Por lo que el término que multiplica a dX en 119 se anula y el resultado final es:

$$d\pi = \frac{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\pi dt \tag{121}$$

Lo cual es obvio que 121 se corresponde con la variación de la cartera libre de riesgo obtenida en la teoría para $\pi = B_1 - B_2$, siendo ambas carteras equivalentes tomando el valor $\Delta = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\frac{\pi}{B_2}$

5.2. Ejercicio 2.

- **Construye una cartera libre de riesgo con opciones V_1 y V_2 con distintas fechas de vencimiento.**

- **Deduce a partir de ella una ecuación de Black-Scholes como la de los bonos en la que interviene el precio del mercado asociado al riesgo de las acciones.**

- **Comprueba que $V(t,S) = S$ es solución de la ecuación y deduce de ello la expresión del precio de mercado del riesgo en caso de acciones. Usando esta expresión deduce la ecuación de Black-Scholes clásica.**

Comenzamos creando la cartera $\pi = V_1(t,S) - V_2(t,S)$ donde:

$$dV_i = \mu_i V_i dt + \rho_i V_i dX \qquad i = 1,2 \qquad , \qquad dS = \mu S dt + \sigma S dX \tag{122}$$

Por lo que haciendo la diferencial de π:

$$
\begin{aligned}
d\pi &= dV_1 - dV_2 = \mu_1 V_{i1} dt + \rho_1 V_1 dX - \mu_2 V_2 dt - \rho_2 V_2 dX \\
&= (\mu_1 V_{i1} - \mu_2 V_2) dt + (\rho_1 V_1 - \rho_2 V_2) dX
\end{aligned} \tag{123}
$$

Tomando:

$$
V_1 = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}\pi \qquad , \qquad V_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\pi \tag{124}
$$

Tendremos una cartera libre de riesgo, así que sustituyendo 124 en 123:

$$
d\pi = \frac{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\pi dt \tag{125}
$$

Tomando el argumento de ausencia de arbitraje:

$$
d\pi = r\pi dt = \frac{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\pi dt \tag{126}
$$

Por lo que:

$$
r = \frac{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \Rightarrow \frac{\mu_1 - r}{\rho_1} = \frac{\mu_2 - r}{\rho_2} \tag{127}
$$

Como hemos definido V_1 y V_2 de forma arbitraria, el cociente para cualquier opción es:

$$
\lambda(r,t) = \frac{\mu - r}{\rho} = \frac{\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) - r}{\frac{\sigma S}{V}\frac{\partial V}{\partial S}} \tag{128}
$$

Por lo que despejando los términos en 128 llegamos a:

$$
\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu S - \lambda\sigma S)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - Vr = 0 \tag{129}
$$

Tomando $V = S$ tenemos:

$$
\mu S - \lambda\sigma S - Sr = S(\mu - \lambda\sigma - r) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{130}
$$

Introduciendo 130 en 129:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu S - \frac{\mu - r}{\sigma}\sigma S)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - Vr \\
&\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - Vr
\end{aligned} \tag{131}
$$

Lo cual se corresponde con la ecuación de Black-Scholes clásica.

5.3. Ejercicio 3.

- **Introduce las condiciones adicionales para un bono convertible callable en cualquier tiempo a un precio constante.**
  En este caso se ha de añadir la condición:

$$
B(t,r) \leq M \tag{132}
$$

- **Introduce las condiciones adicionales para un bono puttable en cualquier tiempo a un precio constante.**
  Ahora se ha de imponer:
  $$B(t,r) \geq m \tag{133}$$

- **Modifica el modelo para un bono convertible en en determinados tiempos.**
  En los tiempos que sea convertible cumple:
  $$\begin{aligned} &\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 B}{\partial S^2} + rS\frac{\partial B}{\partial S} - rB \leq 0 \\ &B(t,S) \geq nS \qquad , \qquad B(T,S) = \max\{nS, P\} \end{aligned} \tag{134}$$
  Mientras que los tiempos en los que no sea convertible cumplirá:
  $$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 B}{\partial S^2} + rS\frac{\partial B}{\partial S} - rB = 0 \qquad , \qquad B(T,S) = P \tag{135}$$

- **Modifica el modelo para un bono que paga determinados cupones en determinados tiempos en lugar de una renta continua por cupones** El modelo incluirá K como la renta continua a pagar:
  $$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 B}{\partial S^2} + rS\frac{\partial B}{\partial S} - rB + K = 0 \tag{136}$$

- **Modifica el modelo en el caso de que el activo pague tasa continua de dividendos.** La K en 136 pasa a ser $K(t)$ con:
  $$B(T,r) = P + c_M \qquad , \qquad B(r,t_i^-) = B(r,t_i^+) + c_i \tag{137}$$