

## Sessió pràctica: quadratures adaptatives

Es vol aproximar el valor de la integral definida

$$I = \int_0^2 \sin(e^{2x}) dx \quad (1)$$

amb una quadratura que permeti de manera automàtica garantir una estima de l'error absolut. A la vista de com varia la funció a l'interval  $(0, 2)$  sembla raonable fer servir una longitud de subinterval més petita a prop de l'extrem  $x = 2$  que a prop de l'extrem  $x = 0$ . Per a reduir el cost de càlcul de la integral  $I$  es planteja, doncs, fer servir una *quadratura de Simpson adaptativa* basada en un algorisme recursiu. Cal implementar una funció, que donada una funció  $f$ , un interval  $(a, b)$  i una tolerància  $\epsilon$ ,

- calcula les aproximacions  $S(a, b)$ ,  $S(a, \frac{a+b}{2})$  i  $S(\frac{a+b}{2}, b)$ , on  $S(u, v)$  denota l'aproximació de la integral amb la quadratura de Simpson simple a l'interval  $(u, v)$
  - estima l'error absolut a l'interval  $(a, b)$  com  $E_{ab} = |S(a, b) - (S(a, \frac{a+b}{2}) + S(\frac{a+b}{2}, b))|$
  - si  $E_{ab} < \epsilon(b - a)$ , l'error és acceptable i retorna el valor de  $S(a, b)$
- altrament, crida a la mateixa funció per a calcular les aproximacions de les integrals a l'interval  $(a, \frac{a+b}{2})$  i a l'interval  $(\frac{a+b}{2}, b)$ .

Implementeu l'algorisme recursiu i respongueu les preguntes següents al document que trobareu a Atenea.

- a) Justifiqueu que aquest algorisme recursiu aplicat al càlcul de la integral a  $(0, 2)$  proporciona una aproximació amb un error absolut (estimat) menor que  $2\epsilon$ .
- b) Useu la funció implementada per a calcular la integral (1) amb  $\epsilon = 10^{-3}$ . Quants intervals sha obtingut?
- c) Modifiqueu la funció per que retorni, a més del valor de la integral, les abscisses dels punts que divideixen l'interval  $(0, 2)$  en subintervals. Representeu gràficament la funció i els punts obtinguts a una figura per visualitzar quins subintervals s'han fet servir en la quadratura adaptativa, per a obtenir una aproximació usant  $\epsilon = 10^{-6}$ .