
Tir parabòlic

El càlcul de la trajectòria del projectil és un problema de tir parabòlic amb fregament, que es pot plantejar com un sistema de 4 Equacions Diferencials Ordinàries (EDOs),

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -R\|\mathbf{v}\|\mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (1)$$

on les funcions incògnita corresponen a les dues components de la posició $\mathbf{x} = (x(t), y(t))^T$ i de la velocitat $\mathbf{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T$, $\mathbf{g} = (0, -9.8)^T$ m/s² és l'acceleració de la gravetat i R és el coeficient de fregament. Aquest coeficient depèn principalment de l'àrea projectada de l'objecte i de la densitat de l'aire, i aquí es pren com $R = 0.00132$ m⁻¹. Per poder resoldre el problema de forma única cal donar condicions inicials, en aquest cas

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0)^T, \quad \mathbf{v}(0) = v_0(\cos \theta, \sin \theta)^T \quad (2)$$

on $v_0 = 100$ m/s és el mòdul de la velocitat inicial i $\theta = \pi/4$ és l'angle sobre l'horitzontal amb que es fa el llançament.

1. Resol la EDO mitjançant el mètode d'Euler i representa la trajectòria del projectil durant 10 segons. Si fas servir $m = 20$ intervals, quina és la posició del projectil als 10 segons?
2. Sigui \mathbf{X}_m , la posició en l'instant final obtinguda mitjançant m passos del mètode d'Euler. L'error d'aquesta aproximació es pot estimar com

$$E = \|\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{2m}\| \quad r = \frac{E}{\|\mathbf{X}_{2m}\|}.$$

Fes servir aquestes expressions per estimar l'error de les aproximacions. Quantes xifres significatives correctes te l'aproximació obtinguda amb $m = 200$? Justifica la teva resposta.

3. Dibuixa una gràfica de convergència amb l'evolució de l'error en funció del número de passos. S'observa el comportament esperat? Justifica la teva resposta.
4. Fes servir la funció `ode45` amb `Events` per, donat un angle θ , determinar la distància recorreguda pel projectil fins a tocar terra, $d(\theta)$. Amb les condicions inicials de l'enunciat, en quin instant arriba el projectil a terra? Quina és la distància horitzontal recorreguda?
5. Determina l'angle θ amb què s'ha de disparar el projectil per arribar a un objectiu situat a 500 m.