



ENSEIRB-MATMECA

Telecommunications Semestre 7

Communications numériques : Projet TS-229

---

**Simulation d'un émetteur / récepteur ADS-B et décodage temps  
réel à l'aide de radio logicielle**

---

Étudiants :

MINIER Pierre

VIRIOT Maël

Encadrants :

ELLOUZE Malek

FERRÉ Guillaume

TAJAN Romain

Octobre 2021

<b>1</b>	<b>Prise en main de la chaîne de communication ADSB</b>	<b>2</b>
1.1	Théorie . . . . .	2
1.1.1	Réécriture du signal émis $s_l(t)$ . . . . .	2
1.1.2	Exemple avec le signal [1, 0, 0, 1, 0] . . . . .	3
1.2	Vérification . . . . .	6
1.2.1	Sur l'exemple de la séquence [1, 0, 0, 1, 0] . . . . .	6
1.2.2	Probabilité d'erreur binaire théorique $P_{eb}$ . . . . .	6
1.2.3	Simulation du taux d'erreur binaire . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Densité spectrale de puissance</b>	<b>9</b>
2.1	Théorie . . . . .	9
2.1.1	Moment d'ordre 1 du signal $s_l(t)$ . . . . .	9
2.1.2	Auto-corrélation du signal $s_l(t)$ . . . . .	9
2.1.3	Auto-corrélation moyennée de $s_l(t)$ . . . . .	10
2.1.4	Densité spectrale de puissance (DSP) . . . . .	11
2.2	Vérification . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Synchronisation en temps</b>	<b>13</b>
4.1	Théorie . . . . .	13
4.1.1	Ordre de grandeur de l'effet Doppler . . . . .	13
4.1.2	Utilisation du carré du module de l'enveloppe du signal reçu . . . . .	14
4.1.3	Inégalité de Cauchy . . . . .	14
4.2	Vérification . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Synchronisation en fréquence</b>	<b>16</b>
5.1	Théorie . . . . .	16
5.2	Vérification . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Autres tâches</b>	<b>18</b>

# 1 Prise en main de la chaîne de communication ADSB

## 1.1 Théorie

### 1.1.1 Réécriture du signal émis $s_l(t)$

Tout d'abord, remarquons que :

$$p_{b_k}(t) = \begin{cases} p_0(t) = p(t) + \frac{1}{2}\Pi_{T_s}\left(t - \frac{T_s}{2}\right) & \text{si } b_k = 0 \\ p_1(t) = -p(t) + \frac{1}{2}\Pi_{T_s}\left(t - \frac{T_s}{2}\right) & \text{si } b_k = 1 \end{cases}$$

en notant  $\Pi_\theta(t)$  la fonction porte de largeur  $\theta$  centrée en 0. On a ensuite :

$$\begin{aligned} s_l(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{b_k}(t - kT_s) \\ &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ b_k=0}} \left[ p(t) + \frac{1}{2}\Pi_{T_s}\left(t - \frac{T_s}{2} - kT_s\right) \right] + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ b_k=1}} \left[ -p(t) + \frac{1}{2}\Pi_{T_s}\left(t - \frac{T_s}{2} - kT_s\right) \right] \\ &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ b_k=0}} A_k p(t - kT_s) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ b_k=1}} A_k p(t - kT_s) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ b_k=0}} \Pi_{T_s}\left(t - \frac{T_s}{2} - kT_s\right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ b_k=1}} \Pi_{T_s}\left(t - \frac{T_s}{2} - kT_s\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k p(t - kT_s) + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Pi_{T_s}\left(t - \frac{T_s}{2} - kT_s\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k p(t - kT_s) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$s_l(t) = 0.5 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k p(t - kT_s)$$

### 1.1.2 Exemple avec le signal [1, 0, 0, 1, 0]

#### Représentation de $s_l(t)$

Lorsqu'on applique la formule ci-dessus avec le signal [1, 0, 0, 1, 0] en entrée, on obtient :

$$s_l(t) = \frac{1}{2} - p(t) + p(t - T_S) + p(t - 2T_S) - p(t - 3T_S) + p(t - 4T_S)$$

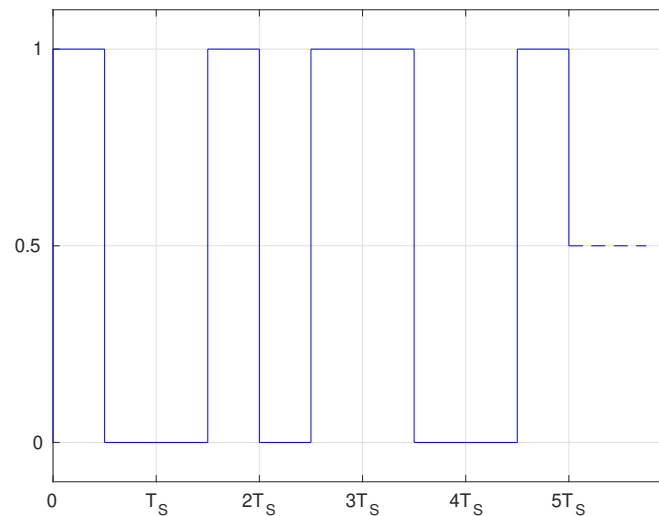


FIGURE 1.1 –  $s_l(t)$  avec le signal d'entrée [1 0 0 1 0]

#### Représentation de $r_l(t)$

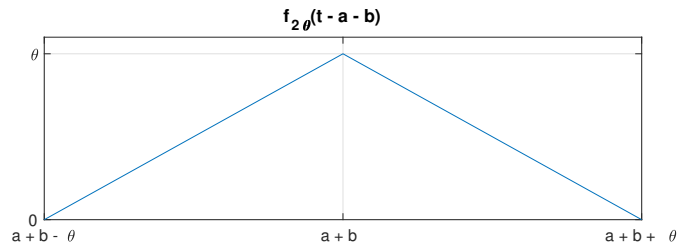
Sur  $[0, 5T_S]$ , on peut réécrire  $s_l(t)$  avec des portes :

$$s_l(t) = \Pi_{\frac{T_S}{2}}\left(t - \frac{T_S}{4}\right) + \Pi_{\frac{T_S}{2}}\left(t - \frac{7T_S}{4}\right) + \Pi_{T_S}(t - 3T_S) + \Pi_{\frac{T_S}{2}}\left(t - \frac{19T_S}{4}\right)$$

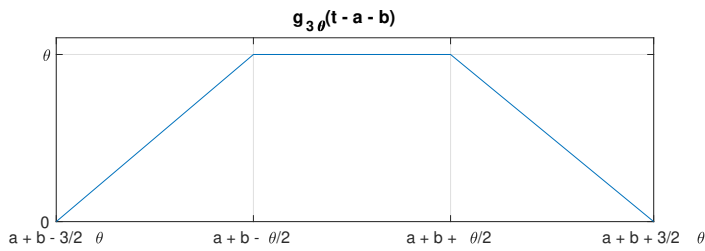
Avec un bruit  $n_l(t)$  nul, on a :

$$\begin{aligned} r_l(t) &= s_l(t) * p^*(T_S - t) \\ &= s_l(t) * p(t - T_S) \quad \text{car } p(t) \text{ est réel et composé de portes} \\ &= s_l(t) * \frac{1}{2} \left[ -\Pi_{\frac{T_S}{2}}\left(t - \frac{T_S}{4}\right) + \Pi_{\frac{T_S}{2}}\left(t - \frac{T_S}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

On doit alors calculer des produits de convolutions entre des portes de mêmes support ou de support temporel modifié d'un facteur 2. On note :



$$f_{2\theta}(t-a-b) = \Pi_{\theta}(t-a) * \Pi_{\theta}(t-b)$$



$$g_{3\theta}(t-a-b) = \Pi_{2\theta}(t-a) * \Pi_{\theta}(t-b)$$

On obtient finalement :

$$r_l(t) = \frac{1}{2} \left[ -f_{T_S} \left( t - \frac{T_S}{2} \right) + f_{T_S}(t - T_S) - f_{T_S}(t - 2T_S) + f_{T_S} \left( t - \frac{5T_S}{2} \right) - g_{\frac{3}{2}T_S} \left( t - \frac{13T_S}{4} \right) \right. \\ \left. + g_{\frac{3}{2}T_S} \left( t - \frac{15T_S}{4} \right) - f_{T_S}(t - 5T_S) + f_{T_S} \left( t - \frac{11T_S}{2} \right) \right]$$

On représente ces différentes composantes sur un même graphique, puis on les somme pour obtenir  $r_l(t)$  :

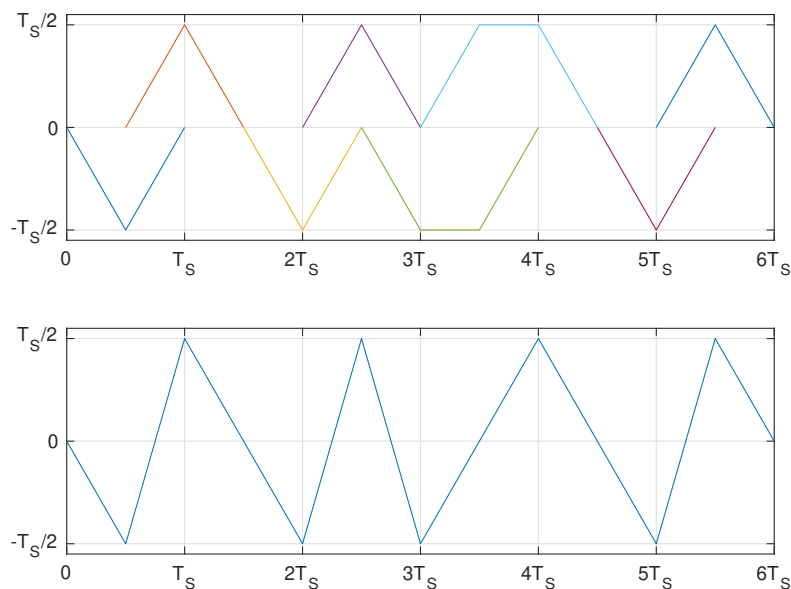


FIGURE 1.2 – Représentation de  $r_l(t)$

## Représentation de $r_m$

En échantillonnant à  $T_S$  la figure 1.2, on obtient :

$$r_m = \delta(t - T_S) - \delta(t - 2T_S) - \delta(t - 3T_S) + \delta(t - 4T_S) - \delta(t - 5T_S)$$

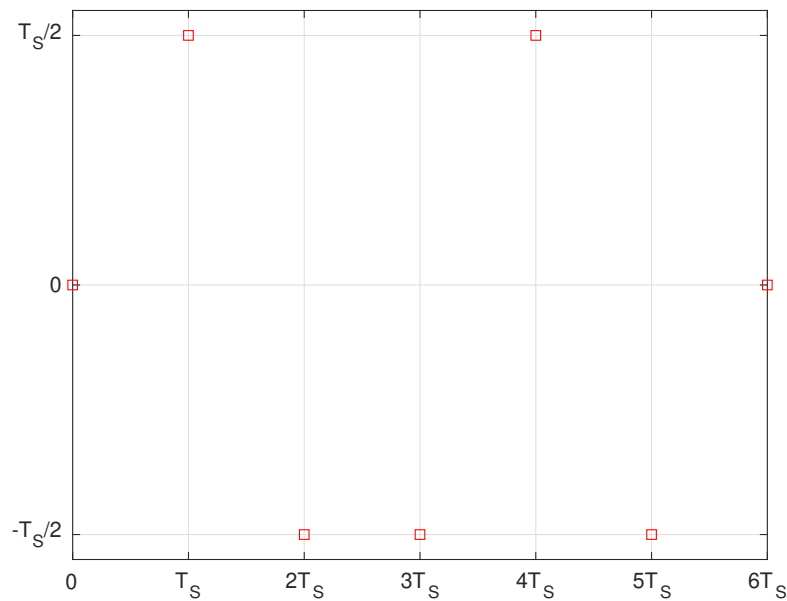


FIGURE 1.3 – Représentation de  $r_m$

## Rôle du bloc de décision

On observe un décalage de  $T_S$  avec ces différentes opérations.

En considérant la règle suivante :

$$b_{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta(t - kT_S) \text{ est porté par un signe } + \text{ dans } r_m \\ 0 & \text{si } \delta(t - kT_S) \text{ est porté par un signe } - \text{ dans } r_m \end{cases}$$

on retrouve la séquence initiale  $[1, 0, 0, 1, 0]$ .

## 1.2 Vérification

### 1.2.1 Sur l'exemple de la séquence [1, 0, 0, 1, 0]

On retrouve les allures théoriques des figures 1.1 et 1.6. Pour que les pentes de  $s_l(t)$  soit plus verticales, il faut augmenter la fréquence d'échantillonnage.

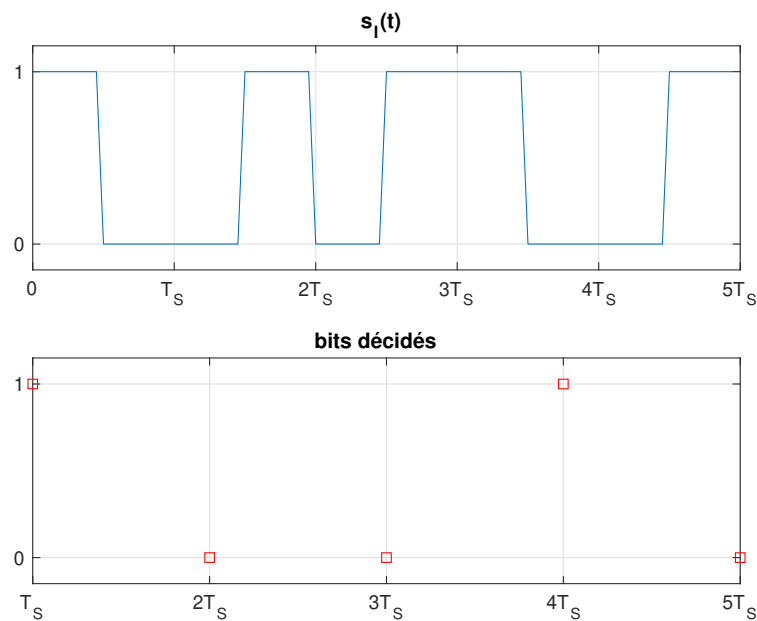


FIGURE 1.4 – Vérification des allures

### 1.2.2 Probabilité d'erreur binaire théorique $P_{eb}$

Les bits sont identiquement distribués, les symboles  $A_k$  conservent donc cette propriété. On notera  $\sigma^2$  la variance des ces symboles et  $R_g(t)$  la fonction d'auto-corrélation du filtre de mise en forme. Calculer la  $P_{eb}$  revient à calculer l'air jaune de la figure 1.5.

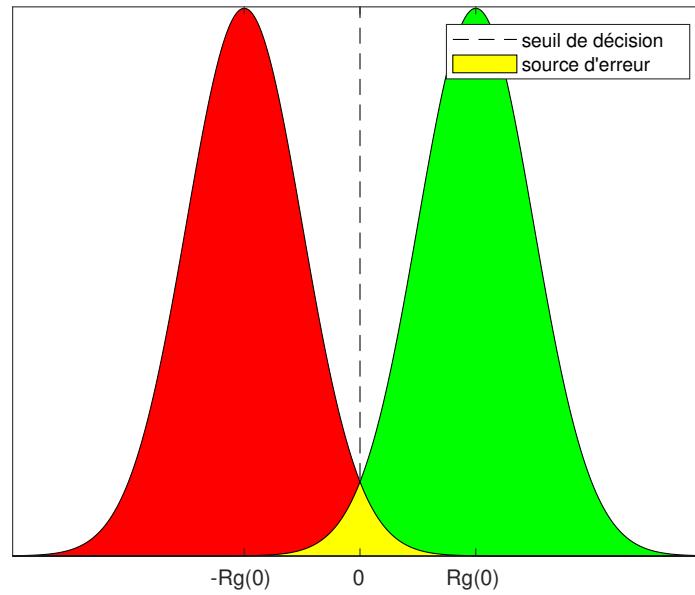


FIGURE 1.5 – Représentation des densités de probabilité

$$\begin{aligned}
 P_{eb} &= \sum_{i \in \Omega_S} \mathbb{P}(\text{erreur}|i) \mathbb{P}(i) \quad \Omega_S \text{ est l'ensemble des symboles} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_S} \sum_{\substack{j \in \Omega_S \\ j \neq i}} \mathbb{P}(j|i) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbb{P}[R_g(0) | -R_g(0)] + \frac{1}{2} \mathbb{P}[-R_g(0) | R_g(0)] \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - R_g(0)}{\sigma} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x + R_g(0)}{\sigma} \right)^2 \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{R_g(0)}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} z^2 \right) dz + \frac{1}{2} \int_{+\infty}^{-\frac{R_g(0)}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} z^2 \right) dz \\
 &= \frac{1}{2} Q \left( \frac{R_g(0)}{\sigma} \right) + \frac{1}{2} Q \left( \frac{R_g(0)}{\sigma} \right) \quad \text{en utilisant la symétrie de la gaussienne centrée} \\
 &= Q \left( \frac{R_g(0)}{\sigma} \right) \quad Q(x) \text{ est la fonction queue de gaussienne}
 \end{aligned}$$

Exprimons cette  $P_{eb}$  en fonction du rapport  $\frac{E_b}{N_0}$  : Tout d'abord, nous avons :

$$\begin{cases} \sigma^2 = \sigma_b^2 R_g(0) & \text{avec } \sigma_b \text{ la variance des bits émis} \\ \sigma_b^2 = \frac{N_0}{2} & \text{par définition du modèle du bruit thermique utilisé} \end{cases}$$



D'où  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} R_g(0)$

Exprimons maintenant  $R_g(0)$  en fonction de  $\frac{E_b}{N_0}$  :

L'énergie binaire est  $E_b = P_{moy} T_b$  avec  $P_{moy} = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{s_l(t)}(f) df$

On utilise ensuite la formule de Benett :

$$\begin{aligned} \Gamma_{s_l(t)} &= \frac{1}{T_S} |G(f)|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_S(n) \exp(-j2\pi f n T_S) \\ &= \frac{1}{T_S} |G(f)|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(n) \exp(-j2\pi f n T_S) \\ &= \frac{1}{T_S} |G(f)|^2 \end{aligned}$$

Nous avons alors :  $E_b = \frac{T_b}{T_S} \int_{\mathbb{R}} |G(f)|^2 df = \frac{1}{T_S} R_g(0) = R_g(0)$

Finalement :  $\frac{R_g(0)}{\sigma} = R_g(0) \sqrt{\frac{2}{N_0 R_g(0)}} = \sqrt{\frac{2R_g(0)}{N_0}} = \sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}$

$$P_{eb} = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

### 1.2.3 Simulation du taux d'erreur binaire

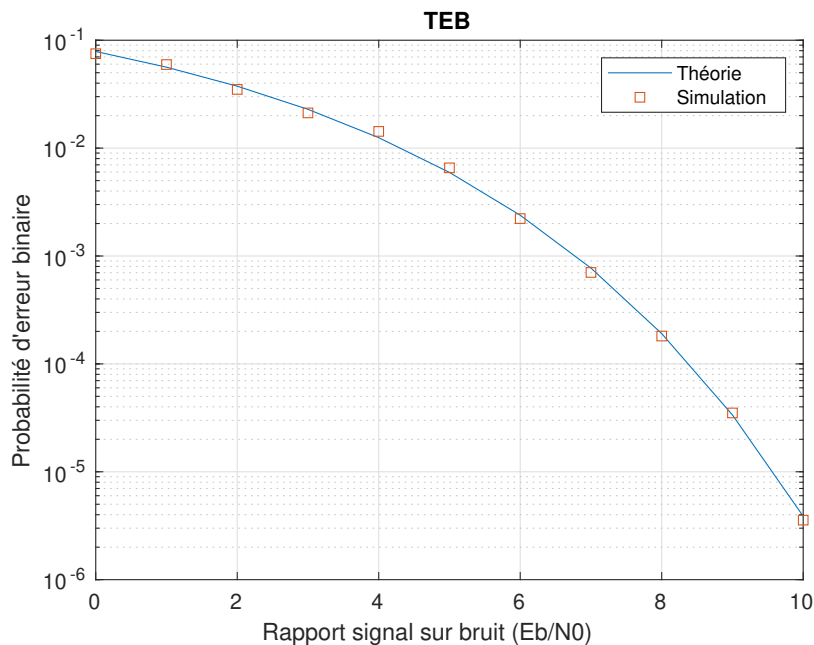


FIGURE 1.6 – Simulation et taux d'erreur binaire théorique

## 2 Densité spectrale de puissance

### 2.1 Théorie

#### 2.1.1 Moment d'ordre 1 du signal $s_l(t)$

$$\begin{aligned}
 m_{s_l}(t) &= \mathbb{E}[s_l(t)] = \frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(t - kT_S) \mathbb{E}[A_k] \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(t - kT_S) [1\mathbb{P}(A_k = 1) - 1\mathbb{P}(A_k = -1)] \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(t - kT_S) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$m_{s_l}(t)$  est indépendant du temps et vaut 0.5

#### 2.1.2 Auto-corrélation du signal $s_l(t)$

$$\begin{aligned}
 R_{s_l}(t) &= \mathbb{E}[s_l(t)s_l^*(t + \tau)] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k p(t - kT_S) \right) \left( \frac{1}{2} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} A_l p(t + \tau - lT_S) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} + 2 \times \left( \frac{1}{2} \times 0 \right) + \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} p(t - kT_S) p(t + \tau - lT_S) \mathbb{E}[A_k A_l]
 \end{aligned}$$

Le tableau 2.1 donne la loi de  $A_k A_l$  pour  $k \neq l$  avec entre parenthèse la probabilité associée. On observe que l'on obtient la même loi que  $A_k$ . On en déduit que  $\mathbb{E}[A_k A_l] = 0$  pour  $k \neq l$ .

$A_l \backslash A_k$	$A_k = -1$ (1/2)	$A_k = 1$ (1/2)
$A_l = -1$ (1/2)	$A_k A_l = 1$ (1/4)	$A_k A_l = -1$ (1/4)
$A_l = 1$ (1/2)	$A_k A_l = -1$ (1/4)	$A_k A_l = 1$ (1/4)

TABLE 2.1 – Lois de  $A_k A_l$  pour  $k \neq l$

Lorsque  $k = l$ ,  $A_k A_l$  est la loi constante égale à 1. On obtient alors :

$$R_{s_l}(t, \tau) = 0.25 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(t - kT_S)p(t + \tau - kT_S)$$

### 2.1.3 Auto-corrélation moyennée de $s_l(t)$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{s_l}(\tau) &= \frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} R_{s_l}(t, \tau) dt \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{T_S} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{T_S} p(t - kT_S)p(t + \tau - kT_S) dt \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{T_S} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{kT_S}^{(k+1)T_S} p(t)p(t + \tau) dt \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{T_S} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)p(t + \tau) dt \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} p(t)p(t + \tau) dt \end{aligned}$$

$\tilde{R}_{s_l}(\tau)$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Pour la suite du calcul, on considère la figure 2.1.

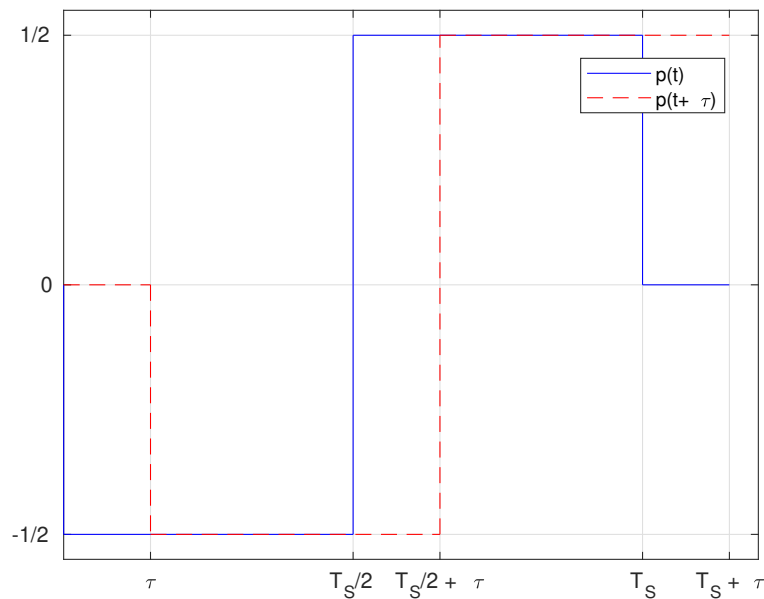


FIGURE 2.1 – Représentation de  $p(t)$  et de  $p(t+\tau)$

- Si  $\tau > T_S$ , alors  $\tilde{R}_{s_l}(\tau) = \frac{1}{4}$
- Sur  $[0, T_S/2]$ ,  $\tilde{R}_{s_l}(\tau)$  croît linéairement
- Sur  $[T_S/2, T_S]$ ,  $\tilde{R}_{s_l}(\tau)$  décroît linéairement

On calcule les valeurs clefs :

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{s_l}(0) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{T_S} \left( \frac{T_S}{4} + \frac{T_S}{4} \right) = \frac{3}{4} \\ \tilde{R}_{s_l}\left(\frac{T_S}{2}\right) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{T_S} \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times T_S = 0 \\ \tilde{R}_{s_l}(T_S) &= \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de  $\tilde{R}_{s_l}(\tau)$  et les points plus haut, on obtient la figure 2.2.

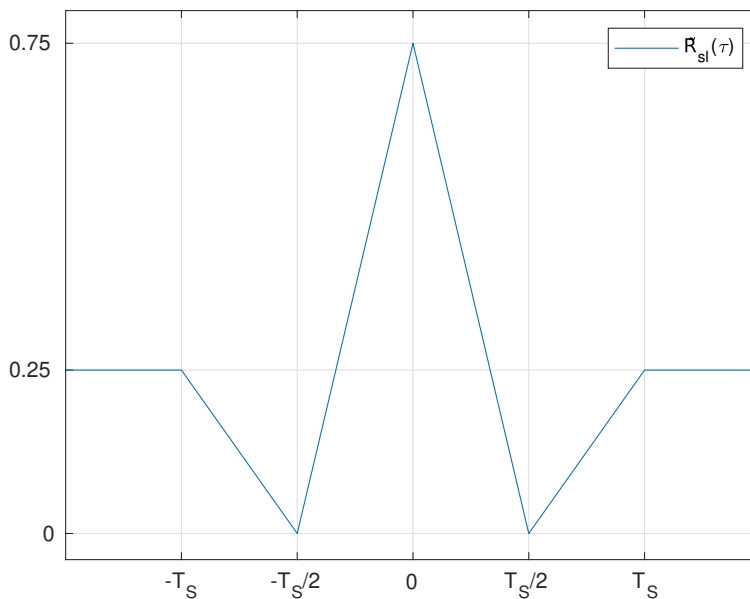


FIGURE 2.2 – Représentation de  $\tilde{R}_{s_l}(\tau)$

### 2.1.4 Densité spectrale de puissance (DSP)

En reprenant les précédents calculs, on remarque que  $\tilde{R}_{s_l}(\tau)$  fait intervenir l'expression de la fonction d'auto-corrélation de  $p(t)$  que l'on notera  $R_{pp}(\tau)$  :

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{s_l}(\tau) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{T_S} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)p(t+\tau)dt \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{T_S} R_{pp}(\tau)\end{aligned}$$

On applique la transformée de Fourier :  $\Gamma_{s_l}(f) = \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{1}{T_S} \times T.F.[R_{pp}(\tau)]$

On utilise ensuite le théorème de Wiener-Khintchine :  $T.F.[R_{pp}(\tau)] = |P(f)|^2$

Une expression de  $p(t)$  étant  $p(t) = \frac{1}{2} \left[ -\Pi_{\frac{T_S}{2}} \left( t - \frac{T_S}{4} \right) + \Pi_{\frac{T_S}{2}} \left( t - \frac{3T_S}{4} \right) \right]$ , on a :

$$\begin{aligned}
 |P(f)|^2 &= \left| -\frac{1}{2} \frac{T_S}{2} \text{sinc} \left( f \frac{T_S}{2} \right) \exp \left( -j \frac{\pi}{2} f T_S \right) + \frac{1}{2} \frac{T_S}{2} \text{sinc} \left( f \frac{T_S}{2} \right) \exp \left( -j \frac{3\pi}{2} f T_S \right) \right|^2 \\
 &= \frac{T_S^2}{16} \text{sinc}^2 \left( f \frac{T_S}{2} \right) \left| \exp \left( -j \pi f T_S \right) - \exp \left( j \frac{\pi}{2} f T_S \right) + \exp \left( -j \frac{\pi}{2} f T_S \right) \right|^2 \\
 &= \frac{T_S^2}{16} \text{sinc}^2 \left( f \frac{T_S}{2} \right) |2j|^2 \left| \sin \left( -\frac{\pi}{2} f T_S \right) \right|^2 \\
 &= \frac{T_S^2}{16} \text{sinc}^2 \left( f \frac{T_S}{2} \right) \times 4 \times \left( \frac{\pi}{2} f T_S \right)^2 \text{sinc}^2 \left( f \frac{T_S}{2} \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{16} T_S^4 f^2 \text{sinc}^4 \left( f \frac{T_S}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{s_l}(f) = \frac{1}{4} \delta(f) + \frac{\pi^2}{16} T_S^3 f^2 \text{sinc}^4 \left( f \frac{T_S}{2} \right)$$

## 2.2 Vérification

On observe quelques divergences numériques, mais les courbes se superposent.

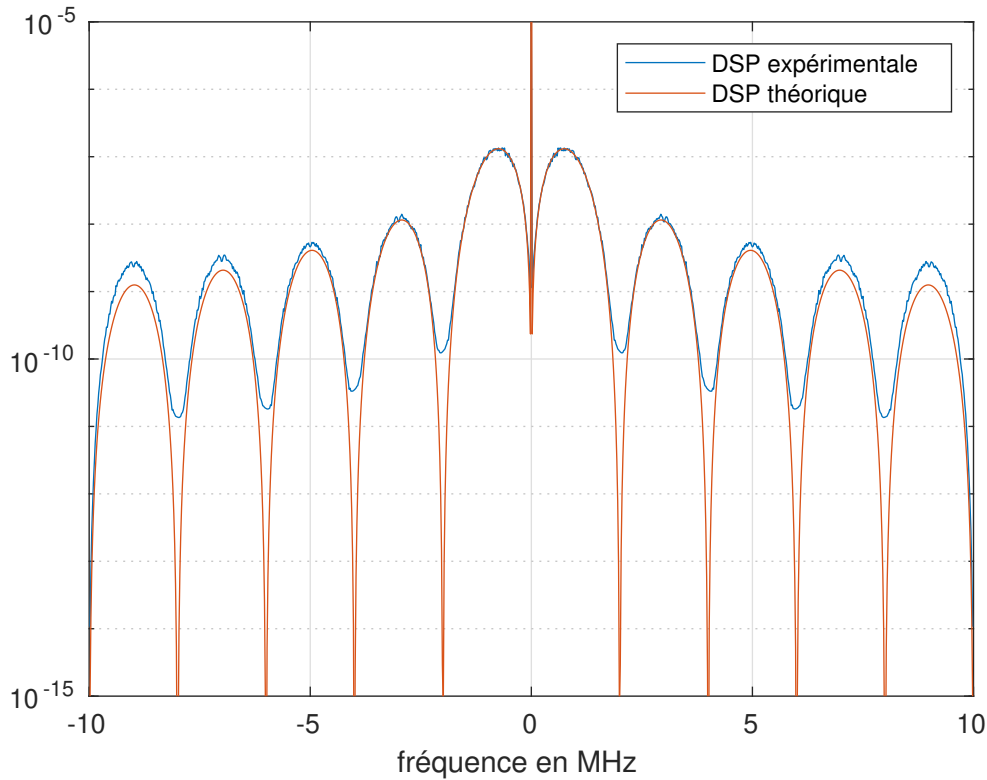


FIGURE 2.3 – Comparaison des DSP obtenues

## 4 Synchronisation en temps

### 4.1 Théorie

#### 4.1.1 Ordre de grandeur de l'effet Doppler



FIGURE 4.1 – Un avion se déplaçant durant un temps symbole

Si l'on considère la situation décrite par la figure 4.1, alors

- L'onde 1 arrive au récepteur à la date  $t1 + \frac{d1}{c}$ , avec  $c$  la célérité de l'onde
- L'onde 2 arrive au récepteur à la date  $t1 + TS + \frac{d1}{c} + \frac{vTS}{c}$ , avec  $v$  la vitesse de l'avion

$$\begin{aligned}\Delta t &= \left| t1 + TS + \frac{d1}{c} + \frac{vTS}{c} - t1 - \frac{d1}{c} \right| \\ &= TS \left( 1 + \frac{v}{c} \right) \\ f_R &= \frac{1}{TS} \frac{1}{1 + \frac{v}{c}}\end{aligned}$$

Avec  $f_R$  la fréquence de réception. Le décalage à la réception vaut alors

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left| \frac{1}{TS} - f_R \right| \\ &= \frac{1}{TS} \frac{v}{c - v}\end{aligned}$$

Le décalage dû à l'effet Doppler est de 3 kHz

### 4.1.2 Utilisation du carré du module de l'enveloppe du signal reçu

$$\begin{aligned}
 |y_l(t)|^2 &= [s_l(t - \delta_t) \cos(2\pi\delta_f t) + n_l(t)]^2 + [s_l(t - \delta_t) \sin(2\pi\delta_f t)]^2 \\
 &= s_l^2(t - \delta_t) \cos^2(2\pi\delta_f t) + 2s_l(t - \delta_t) \cos(2\pi\delta_f t) n_l(t) + n_l^2(t) + s_l^2(t - \delta_t) \sin^2(2\pi\delta_f t) \\
 &= s_l^2(t - \delta_t) + 2s_l(t - \delta_t) \cos(2\pi\delta_f t) n_l(t) + n_l^2(t)
 \end{aligned}$$

$$z_l(t) = 2s_l(t - \delta_t) \cos(2\pi\delta_f t) n_l(t) + n_l^2(t)$$

$z_l(t)$  n'est pas un bruit blanc gaussien et est dépendant de  $s_l(t)$ .

### 4.1.3 Inégalité de Cauchy

L'inter-corrélation est un produit scalaire. Nous avons donc :

$$\delta'_t, |I_{r_l s_p}(\delta'_t)| \leq \sqrt{I_{s_p s_p}(\delta'_t)} \sqrt{I_{r_l r_l}(\delta'_t)}$$

Or l'inter-corrélation entre un signal et lui-même est l'auto-corrélation (notée R)

$$\begin{cases} I_{s_p s_p}(\delta'_t) = R_{s_p}(\delta'_t) \geq R_{s_p}(0) \\ I_{r_l r_l}(\delta'_t) = R_{r_l}(\delta'_t) \geq R_{r_l}(0) \end{cases}$$

;

$$\begin{aligned}
 |I_{r_l s_p}(\delta'_t)| &\leq \sqrt{R_{s_p}(0)} \sqrt{R_{r_l}(0)} \\
 \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} r_l(t) s_p^*(t - \delta'_t) dt \right|}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |s_p(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |r_l(t)|^2 dt}} &\leq 1 \\
 \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} r_l(t) s_p^*(t - \delta'_t) dt \right|}{\sqrt{\int_0^{T_p} |s_p(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{\delta'_t}^{\delta'_t + T_p} |r_l(t)|^2 dt}} &\leq 1
 \end{aligned}$$

Car  $r_l(t) \neq 0$  uniquement sur  $[\delta'_t, \delta'_t + T_p]$  et  $s_p(t) \neq 0$  et  $s_p(t) \neq 0$  uniquement sur  $[0, T_p]$ .

$$\delta'_t \leq 1$$

## 4.2 Vérification

Sur la figure 4.2, on voit que l'on perd 5dB pour un taux d'erreur binaire de  $10^{-3}$ . La moitié est due à l'utilisation du module au carré sur  $y_l(t)$  et l'autre moitié est due aux erreurs d'estimation de  $\delta_t$ .

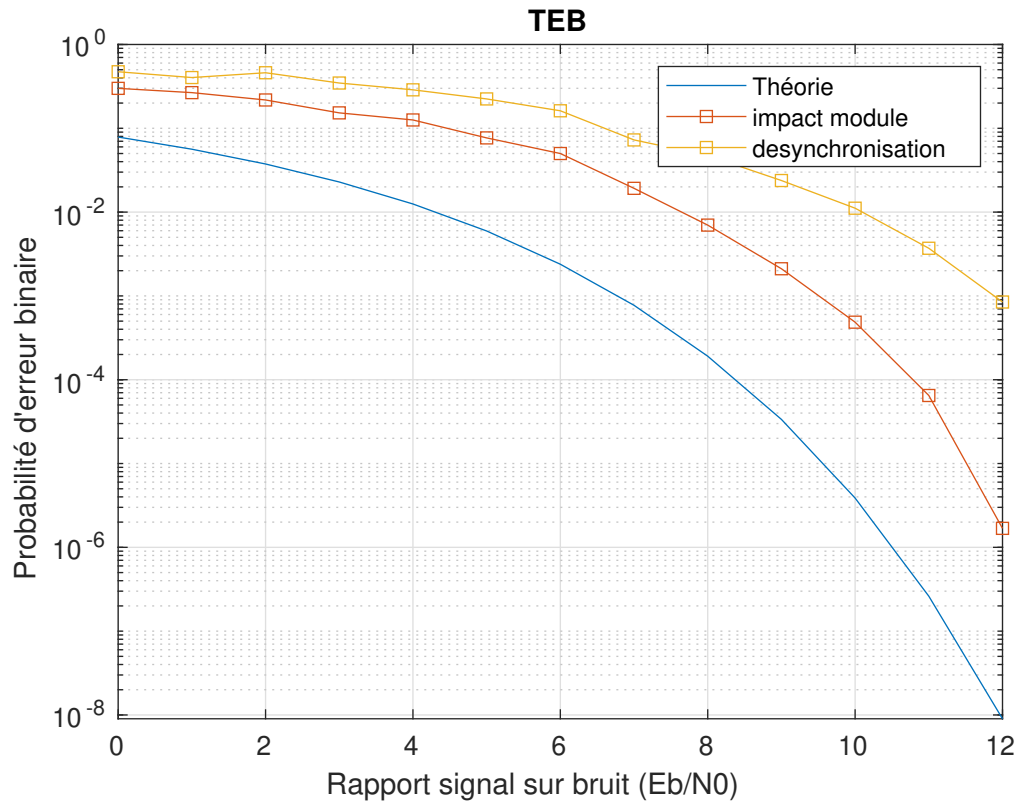


FIGURE 4.2 – Taux d'erreurs binaires



## 5 Synchronisation en fréquence

### 5.1 Théorie

En sortie du canal, nous avons  $y_l(t)$ , désynchronisé temporellement de  $\delta_t$  et fréquentiellement de  $\delta_f$ .

$$y_l(t) = s_l(t - \delta_t) \exp(-j2\pi\delta_f t) + n_l(t)$$

On note  $\Delta_f$  une fréquence. On définit alors le signal  $u_l(t)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_l(t) &= y_l(t) \exp(j2\pi\Delta_f t) \\ &= s_l(t - \delta_t) \exp[j2\pi(\Delta_f - \delta_f)t] + n_l(t) \exp(j2\pi\Delta_f t) \\ &= s_l(t - \delta_t) \exp[j2\pi(\Delta_f - \delta_f)t] + \tilde{n}_l(t) \end{aligned}$$

On étudie la phase de  $u_l(t)$  suivant  $\Delta_f$ . On notera  $\phi_{signal}(\Delta_f, t)$  la phase du signal *signal* à l'instant  $t$  :

$$\phi_{u_l}(\Delta_f, t) = 2\pi(\Delta_f - \delta_f)t + \phi_{\tilde{n}_l}(\Delta_f, t)$$

Lorsque  $\Delta_f$  est très différent de  $\delta_f$ , le module de  $\phi_{u_l}(\Delta_f, t)$  est important. Et lorsque  $\Delta_f$  se rapproche de  $\delta_f$ , le module de  $\phi_{u_l}(\Delta_f, t)$  est faible. On exploite cette propriété en sommant sur  $t$ . De cette manière, on cherche à minimiser la fonction suivante :

$$\Phi_{u_l}(\Delta_f) = \int |\phi_{u_l}(\Delta_f, t)| dt$$

On obtient ainsi une estimation de  $\delta_f$

$$\tilde{\delta}_f = \arg \min_{\Delta_f} \Phi_{u_l}$$

## 5.2 Vérification

Sans bruit, le minimum s'identifie sans problème comme le montre la figure 5.1.

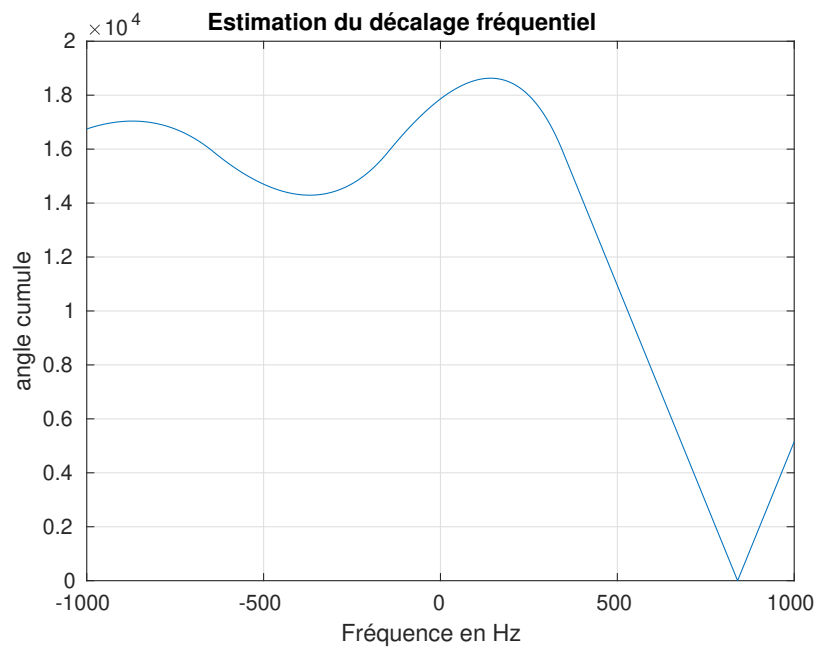


FIGURE 5.1 – Sans bruit, l'estimation est sans erreur

Avec du bruit, le pic s'affaisse et les erreurs sont de l'ordre de quelques Hertz pour une variance de 5.

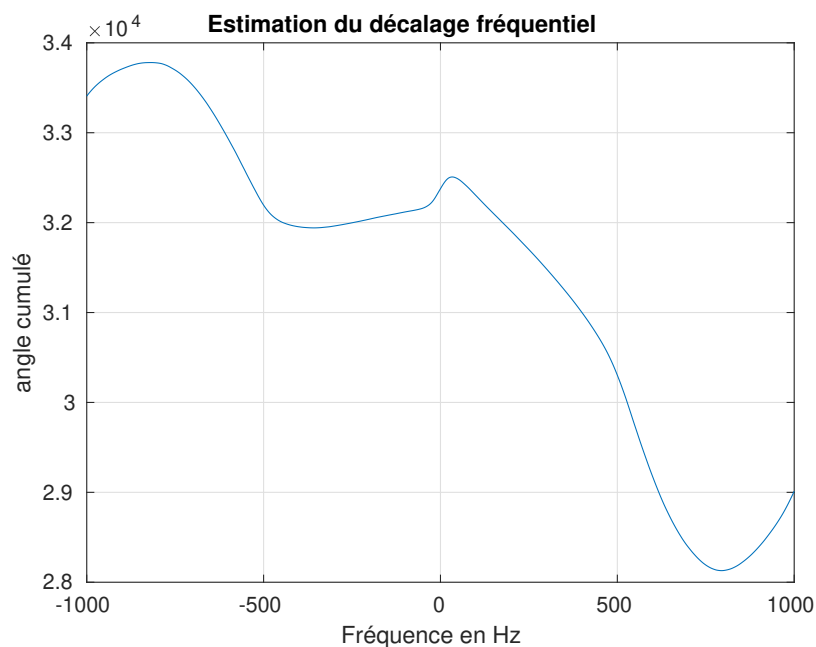


FIGURE 5.2 – Un décalage de 788 Hz estimé à 794 Hz

L'algorithme est robuste si l'on considère l'ensemble du signal  $y_l(t)$  mais prend un certain temps à s'exécuter. On peut ne considérer qu'une seule partie du signal pour aller plus rapidement.

## 6 Autres tâches

Les tâches 3, 6 ont entièrement été réalisées sur Matlab.

La tâche 7 a également été commencée.