

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ELECTRONIQUE,  
INFORMATIQUE, TÉLÉCOMMUNICATIONS, MATHÉMATIQUE ET  
MÉCANIQUE DE BORDEAUX



---

Systèmes de navigation GPS et inertielle :  
Navigation par satellites

---

Elèves :

Pierre MINIER

Alexandre VALADE

Encadrant :

Audrey GIREMUS

16 décembre 2022

## 1 Introduction

La navigation par GPS fait partie des systèmes de navigation dits extéroceptifs, car c'est un système externe au récepteur qui lui permet de déterminer sa position, par opposition aux systèmes dits proprioceptifs.

Dans le cas du GPS, ce sont 24 satellites qui orbitent autour de la Terre et annoncent à tous les récepteurs dans leur champ de vision leur position ainsi que celle de tous les autres satellites de la constellation.

Le récepteur de son côté compare les signaux reçus par tous les satellites dans son champ de vision, sélectionne les 4 meilleurs, et se base sur le délai de propagation des messages GPS pour calculer sa position par triangulation.

On se propose dans ce TP d'implémenter un système de positionnement GPS. Ce système est testé pour une trajectoire réalisée dans Talence. Sa résistance aux interférences et aux phénomènes multi-trajets est ensuite testée. Enfin, la Dilution of Precision (DOP) a été évaluée.

## 2 Repères utilisés

### 2.1 Changement de repère : de ECEF à NED

Deux repères sont considérés pour ce TP :

1. ECEF : repère de référence ayant pour origine  $O$  le centre de la Terre. Son axe  $x$  pointe sur l'intersection du plan de l'écliptique et du méridien de Greenwich, et son axe  $z$  pointe vers le pôle Nord. Son axe  $y$  est défini de sorte à former un trièdre direct.
2. NED : repère local dans lequel le véhicule est localisé. Il se situe à la surface de la Terre, et ses axes pointent à la verticale locale, vers le Nord et vers le Sud. Il est centré sur un point de référence  $P_0$ .

Pour passer du repère ECEF au repère NED, la matrice de passage suivante est utilisée :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \cos \varphi & -\sin \varphi & -\cos \lambda \cos \varphi \\ -\sin \lambda \sin \varphi & \cos \varphi & -\cos \lambda \sin \varphi \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{bmatrix} \quad (1)$$

avec  $\lambda$  la latitude du point  $P_0$ , et  $\varphi$  sa longitude. Cette matrice  $\mathbf{M}$  est obtenue à partir des deux rotations élémentaires décrite sur la Figure 1.



FIGURE 1 – Les rotations de repères élémentaires

La Figure 1a est associée à la matrice de rotation (2) et la Figure 1b à (3).

$$\mathbf{R}_{ECEF \rightarrow (x'y'z)} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \mathbf{R}_{(x'y'z) \rightarrow NED} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & 0 & -\cos \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{bmatrix} \quad (3)$$

Pour obtenir  $\mathbf{M}$  (1), il suffit d'appliquer successivement ces deux rotations, c'est-à-dire de multiplier  $\mathbf{R}_{ECEF \rightarrow (x'y'z)}$  par  $\mathbf{R}_{(x'y'z) \rightarrow NED}$ . Finalement, la formule de passage d'un référentiel à l'autre est :

$$\mathbf{X}^1 = \mathbf{M} \mathbf{X}^2 + \mathbf{X}_0^1$$

où  $\mathbf{X}^1$  est le point d'intérêt dans le repère 1,  $\mathbf{X}^2$  est le même point dans le repère 2, et  $\mathbf{X}_0^1$  représente les coordonnées de  $P_0$  dans le repère 1.

## 2.2 Point de référence

Afin d'estimer la position du véhicule dans le repère local NED, on a besoin d'un point de référence permettant de linéariser les calculs. Sa latitude et sa longitude sont fournies, permettant de déterminer ses coordonnées dans le repère local grâce au programme 11h2xyz fourni.

## 3 L'algorithme des moindres carrés

### 3.1 Trajectoire du véhicule

La trajectoire obtenue par l'algorithme des moindres carrés est représentée en bleu sur la Figure 2 dans le repère local NED. La trajectoire réelle du véhicule est tracée à titre de comparaison en orange. Sur certaines parties, les courbes se superposent presque parfaitement, avec des décalages allant jusqu'à 16 mètres.

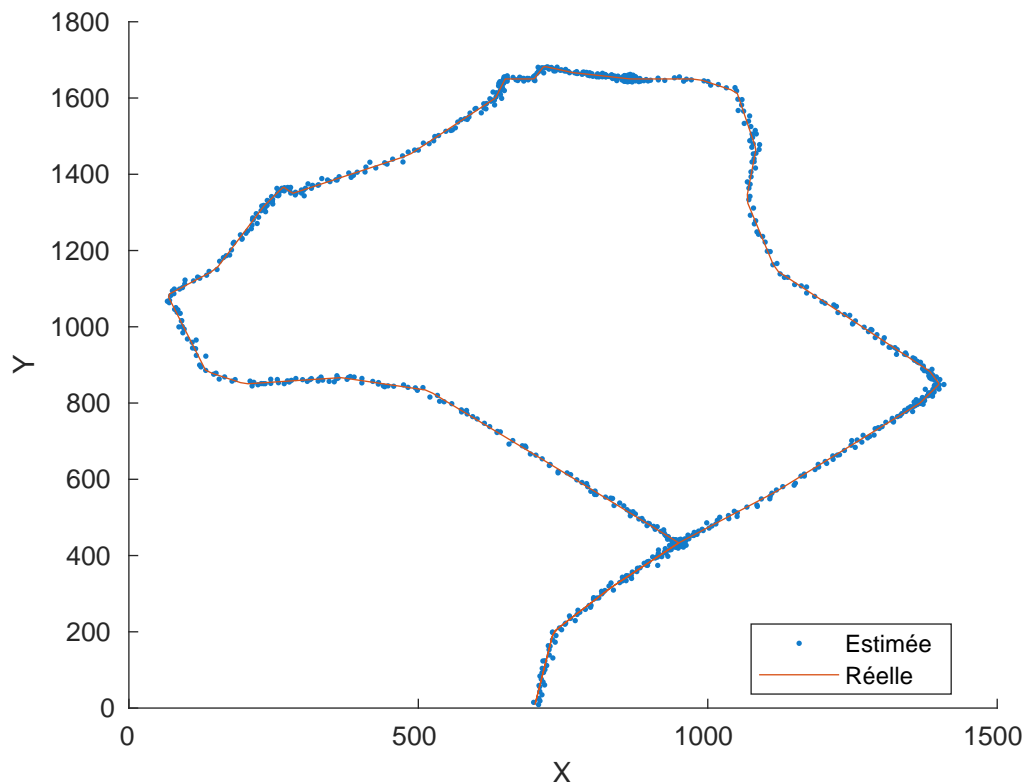


FIGURE 2 – Trajectoire réelle et estimée

### 3.2 Interférences

Pour simuler des interférences, du bruit de mesure est ajouté aux pseudos distances GPS mesurées et communiquées par les satellites grâce à la fonction `randn` de MATLAB :

```

1 for i = 1:N
2     PRN_interf = PRN + sqrt(sigma2(i)) * randn(size(PRN)); % ajout bruit de mesure
3     target.ecef = eval_traj(ref, sat.ecef, PRN_interf); % algo moindres carrés
4     loss.interf(i) = norm(target.ecef(1:2, :) - Xloc.ecef(1:2, :)); % ecart a la trajectoire
5 end

```

Code 1 – Simulation d'interférences

Le résultat de cette simulation est donné sur la Figure 3. Le comportement de l'erreur quadratique des mesures réelles et estimées est linéaire pour de fortes variances du bruit de mesure. Comme ajouter des interférences amène de l'aléatoire, la courbe obtenue oscille. Pour y remédier, la simulation a été effectuée 1000 fois puis moyennée. C'est pourquoi la courbe de la Figure 3 est lissée.

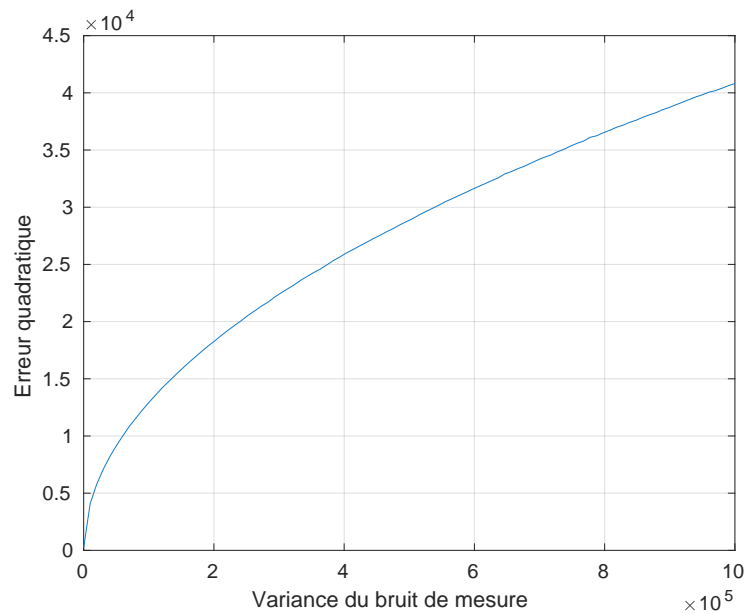


FIGURE 3 – Influence des interférences

### 3.3 Multi-trajets

Pour simuler un multi-trajet, un biais de mesure est ajouté aux pseudos distances GPS relevé d'un ou plusieurs satellites. C'est-à-dire qu'un décalage constant est ajouté.

```

1 for i = 1:M
2     PRN_multi_t = PRN;                                % restaure les mesures
3     PRN_multi_t(4, :) = PRN(4, :) + bias(i);          % ajout du biais sat 4
4     target.ecef = eval_traj(ref, sat.ecef, PRN_multi_t); % algo moindres carres
5     loss.interf(i) = norm(target.ecef(1:2, :) - Xloc.ecef(1:2, :)); % ecart à la trajectoire
6 end

```

Code 2 – Simulation de multi-trajets

Le résultat est donné sur la Figure 4, l'erreur évolue quadratiquement avec le biais sur un satellite. Le minimum n'est pas atteint en zéro car les données de référence utilisées doivent avoir un léger biais à l'origine.

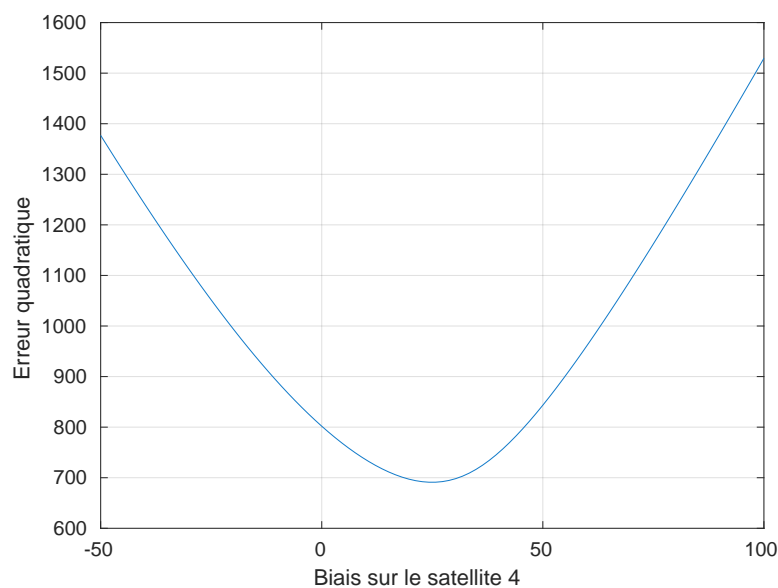


FIGURE 4 – Influence des multi-trajets

## 4 Dilution Of Precision (DOP)

La qualité de la géométrie de la constellation de satellites vue depuis le récepteur a son importance. En effet, si les satellites sont par exemple tous alignés avec le récepteur, il est alors impossible d'estimer la position de la cible ; les équations liant les paramètres du vecteur d'état  $\mathbf{X}$  sont toutes proportionnelles : le système n'est pas inversible. Ce cas là reste tout de même particulier. La *Dilution Of Precision* (DOP) est une métrique évaluant les cas intermédiaires.

### 4.1 Expression de la DOP

La DOP se définit en (4) à partir la racine carrée de l'erreur quadratique  $RMSE$  commise sur l'estimation du vecteur d'état  $\mathbf{X}$  et de l'écart type  $\sigma$  du bruit de mesure.

$$RMSE = \sigma \times DOP \quad (4)$$

#### 4.1.1 Expression de $\hat{\mathbf{X}}$

$\hat{\mathbf{X}}$  est la solution au problème (5) des moindres carrés.

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{Z} - \mathbf{H}\mathbf{X}\|^2 \quad (5)$$

$$= \arg \min_{\mathbf{X}} (\mathbf{Z} - \mathbf{H}\mathbf{X})^T (\mathbf{Z} - \mathbf{H}\mathbf{X})$$

$$= \arg \min_{\mathbf{X}} \left( \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} - 2\mathbf{X}^T \mathbf{H}^T \mathbf{Z} + \mathbf{X}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{X} \right) \quad (6)$$

La fonction à minimiser de l'expression (6) se dérive selon  $\mathbf{X}$ . Une fois sa dérivée mise à zéro (7), un minimiseur est obtenu (8) car la dérivée seconde est  $2\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  : une matrice semi-définie positive.

$$\mathbf{0} = -2\mathbf{H}^T \mathbf{Z} + 2\mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{X}} \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Z} \quad (8)$$

#### 4.1.2 Expression de l'erreur d'estimation

L'erreur d'estimation est développée en (9) et permet d'expliciter le RMSE dans le prochain paragraphe.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Z} - \mathbf{X} \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{X} + \mathbf{w}) - \mathbf{X} \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{H}) \mathbf{X} + (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{w} - \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X} + (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{w} - \mathbf{X} \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{w} \end{aligned} \quad (9)$$

#### 4.1.3 Développement du RMSE

En développant la définition du RMSE rappelée en (10), l'expression (11) s'obtient et permet par identification des termes de la définition (4) d'obtenir une formulation explicite pour la  $DOP$  (12).

$$\begin{aligned} RMSE &= \sqrt{\mathbb{E} [\|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\|^2]} \\ &= \sqrt{\mathbb{E} \left[ (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}) (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})^T \right]} \\ &= \sqrt{\mathbb{E} \left[ \text{Trace} \left( (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{w} \mathbf{w}^T \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \right) \right]} \\ &= \sqrt{\text{Trace} \left( (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbb{E} [\mathbf{w} \mathbf{w}^T] \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \right)} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\sigma^2 \text{Trace}\left((\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{H}) (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}\right)} \\
&= \sigma \sqrt{\text{Trace}\left((\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}\right)}
\end{aligned} \tag{11}$$

$$DOP = \sqrt{\text{Trace}\left((\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}\right)} \tag{12}$$

## 4.2 Le long de la trajectoire du véhicule

La Figure 5a donne les DOP calculés à chaque instant ; la Figure 5b les erreurs quadratiques entre les positions du plan  $(O, x, y)$  estimées et réelles. Un pic de DOP est obtenu entre les échantillons 600 et 700. Il coïncide avec la perte des données d'un satellite supplémentaire (passant de 7 à 6 sur cette période). Malgré cette perte d'information, l'erreur quadratique est inchangée. On en conclut qu'être dans la vision de 6 ou 7 satellites est ici équivalent.

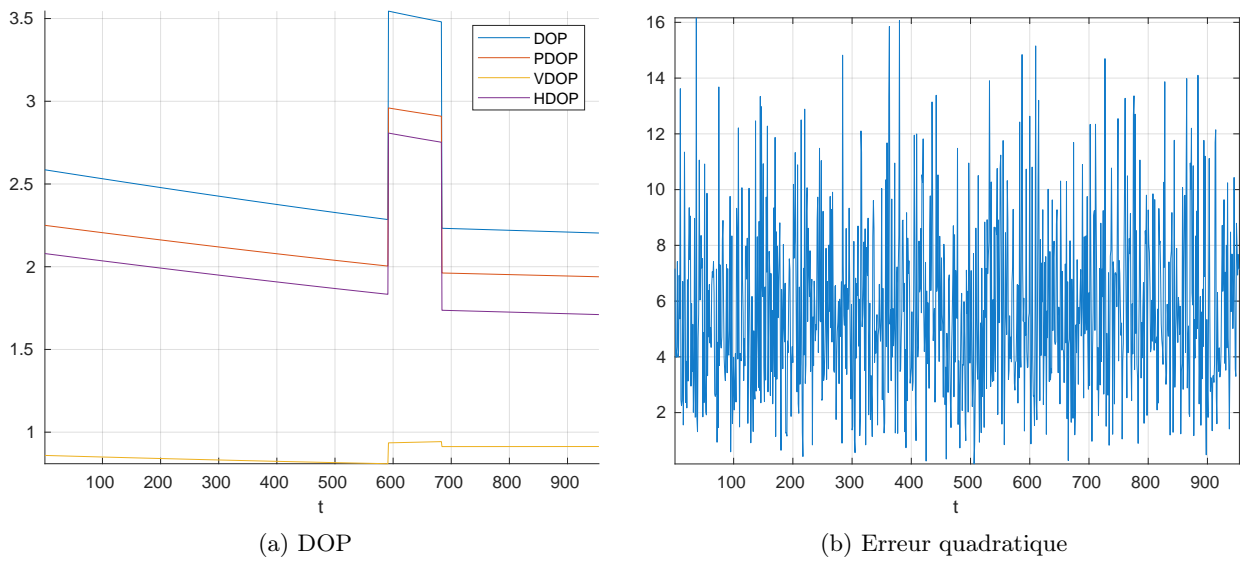


FIGURE 5 – Comparaison du *Dilution of Precision* avec l'erreur quadratique commise sur l'estimation

## 5 Conclusion

En linéarisant les équations issues de l'algorithme des moindres carrés autour d'un point de référence, il est possible de mettre en oeuvre un programme simple pouvant traiter les données de satellites pour estimer la position d'un véhicule avec une erreur maximale de 16 mètres. Les erreurs quadratiques du traitement développé croissent linéairement avec l'ajout d'interférences et quadratiquement en présence de multi-trajets. Il est également possible d'estimer les instants où la constellation des satellites n'est pas optimale avec le calcul de la DOP, sous réserve d'inverser une matrice  $(4 \times 4)$ .