

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ÉLECTRONIQUE,
INFORMATIQUE, TÉLÉCOMMUNICATIONS, MATHÉMATIQUE ET
MÉCANIQUE DE BORDEAUX



Filtrage Particulaire : application au suivi de cibles

Élèves :

Pierre MINIER
Alexandre VALADE

Encadrant :

Audrey GIREMUS

29 janvier 2023

Table des matières

Introduction	1
1 Modélisation	1
1.1 Vecteurs et matrices du modèle d'état	1
1.2 Conversion plan-polaire	1
1.3 Fonction de vraisemblance	1
2 Programmation	2
2.1 Filtre bootstrap (SIR)	2
2.2 Utilité du ré-échantillonnage	2
3 Robustesse	3
3.1 Initialisation	3
3.2 Nombre de particules	3
3.3 Écart-type des bruits	4
3.3.1 Bruit de mesure	4
3.3.2 Bruit de modèle	4
Conclusion	5

Introduction

Le filtrage particulaire est une méthode d'estimation de la densité de probabilité d'un système dynamique qui utilise un grand nombre de particules pour représenter cette densité. Il est souvent utilisé pour résoudre des problèmes de filtrage de Kalman, tels que la détection de cibles, la navigation et la reconnaissance de formes. Il est particulièrement utile dans les cas où les modèles de système et de mesure sont incertains ou non linéaires.

Le principe fondamental du filtrage particulaire est de générer des particules qui représentent les différentes possibilités de l'état du système à un instant donné. Ces particules sont ensuite utilisées pour effectuer des prévisions de l'état futur du système en utilisant les lois de dynamique du système. Les particules sont ensuite mises à jour en utilisant les observations mesurées, en utilisant une technique d'échantillonnage appelée rééchantillonnage.

La méthode permet d'estimer la densité de probabilité de l'état du système à un instant donné en utilisant la distribution de probabilité de toutes les particules. Cependant, le filtrage particulaire est généralement plus coûteux en termes de calculs que les autres méthodes de filtrage, en particulier lorsque le nombre de particules est élevé.

1 Modélisation

1.1 Vecteurs et matrices du modèle d'état

Le vecteur d'état considéré est le suivant :

$$\underline{\mathbf{x}}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \dot{\mathbf{x}}[k] \\ \mathbf{y}[k] \\ \dot{\mathbf{y}}[k] \end{bmatrix} \quad (1)$$

Avec un développement de Taylor à l'ordre 2 $x(t)$ s'approxime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + (t - t_0)\dot{x}(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\ddot{x}(t_0) + o(t^2) \\ x(kT) &= x((k-1)T) + T\dot{x}((k-1)T) + \frac{T^2}{2}\ddot{x}((k-1)T) + o(T^2) \\ x[k] &= x[k-1] + T\dot{x}[k-1] + \frac{T^2}{2}u_x[k-1] + o(T^2) \end{aligned}$$

Comme $x[k]$ et $y[k]$ sont indépendants et suivent le même modèle, la mise à jour du vecteur $\underline{\mathbf{x}}[k]$ est donnée par l'équation (2) où les matrices $\Phi(k, k-1)$ d'évolution de l'état et $G(k)$ de gain de bruit sont identifiables.

$$\underline{\mathbf{z}}[k] = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}[k-1] + \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ 0 & T \end{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}[k-1] \quad (2)$$

1.2 Conversion plan-polaire

Les fonctions (3) et (4) associent à un point du plan de coordonnées (x,y) la distance géométrique r entre ce point et le radar ainsi que l'angle θ formé entre le sol et la cible.

$$\begin{aligned} h_r : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} h_\theta : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

1.3 Fonction de vraisemblance

$\mathbf{z}[k]$ et $\mathbf{x}[k]$ sont respectivement le vecteur d'observation et un vecteur modèle à l'instant k . La mise en place du filtre nécessite de connaître la vraisemblance de l'observation sachant le modèle :

$$\mathbb{P}(\mathbf{z}[k] | \mathbf{x}[k]) = \mathbb{P}(\mathbf{r}^m[k] | \mathbf{x}[k]) \mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}^m[k] | \mathbf{x}[k])$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}^m[k] - \mathbf{r}[k])^2}{2\sigma_r^2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} \exp\left(-\frac{(\theta^m[k] - \theta[k])^2}{2\sigma_\theta^2}\right)$$

Pour obtenir les probabilités $\mathbb{P}(\mathbf{r}^m[k] | \mathbf{x}[k])$ et $\mathbb{P}(\theta^m[k] | \mathbf{x}[k])$, le raisonnement suivant est utilisé :

$$z = h(x) + v \Leftrightarrow v = z - h(x)$$

$$\mathbb{P}(z|x) = \mathbb{P}_v(z - h(x))$$

2 Programmation

2.1 Filtre bootstrap (SIR)

La fonction `simu_modele_etat` retourne directement une matrice de dimension $(4 \times N)$, où 4 est le nombre d'états et N le nombre de particules. Cette méthode permet d'éviter l'utilisation de boucles `for`, et de rendre le filtrage particulière plus efficace. Au cours de l'implémentation du filtre, une seule boucle est utilisée pour passer de l'instant k au suivant $k + 1$. Ces optimisations permettent de réaliser rapidement des tests sur un grand nombre de réalisations, sans être dépendants des tirages aléatoires de l'algorithme.

La figure 1 donne le résultat du filtrage avec les paramètres $\sigma_u = 2m/s^2$, $\sigma_r = 50m$, $\sigma_\theta = \pi/100$ et $T = 1s$. La courbe orange est la trajectoire réelle, et la courbe bleue est le résultat du filtrage sur les données disponibles.

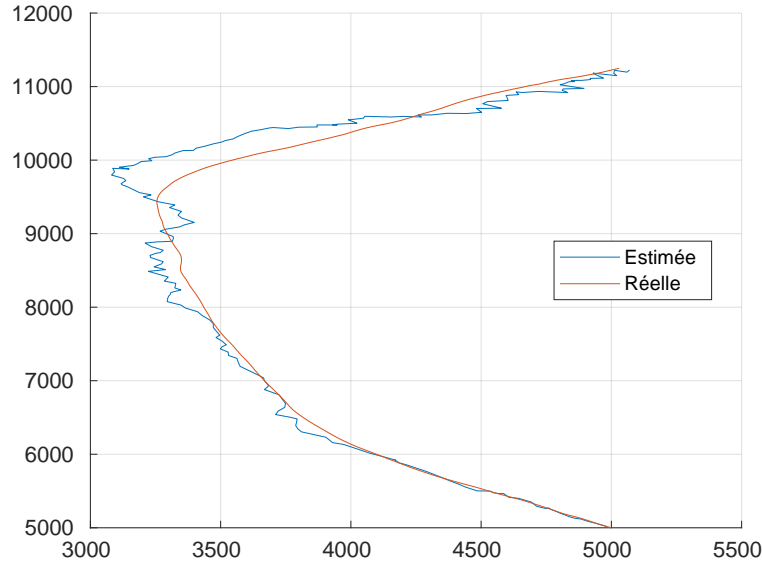


FIGURE 1 – Résultat du filtrage particulière

2.2 Utilité du ré-échantillonnage

Le filtrage particulière nécessite l'estimation de la densité de probabilité d'un système dynamique, qui consiste à utiliser un grand nombre de particules pour représenter cette densité. L'introduction d'un rééchantillonnage a pour but de s'assurer que chaque particule reflète correctement la densité de probabilité actuelle, en éliminant les particules qui ont une faible probabilité et en créant de nouvelles pour les régions où la probabilité est plus élevée.

Il n'est pas judicieux de réaliser un rééchantillonnage à chaque pas de temps car cela entraînerait une perte de performance et une augmentation de la complexité de l'algorithme. Il est généralement recommandé de réaliser un rééchantillonnage lorsque le nombre de particules efficaces (c'est-à-dire celles qui ont une probabilité non négligeable) est trop faible par rapport au nombre total de particules. Ici, le seuil pris est de 70% de particules efficaces par rapport au nombre total de particules, en dessous le rééchantillonnage est effectué.

3 Robustesse

La prochaine section étudie la robustesse de l'algorithme développé en biaisant certaines informations données en entrée.

3.1 Initialisation

La position initiale de la trajectoire réelle est de 5000 unités. La figure 2a montre comment l'algorithme se comporte lorsque l'initialisation varie entre 1500 et 8000 unités. Dans ce cas particulier, il vaut mieux sous-estimer la position que la sur-estimer. De plus, des points sont manquants aux extrémités de l'intervalle, là où l'algorithme ne parvient pas à suivre la trajectoire en raison d'une initialisation insuffisante. La figure 2b examine ce phénomène en présentant le taux de convergence de l'algorithme en fonction de l'initialisation. Selon notre échantillonnage (un point tous les 50 mètres), la situation est presque binaire : soit l'algorithme converge toujours, soit il ne converge jamais.

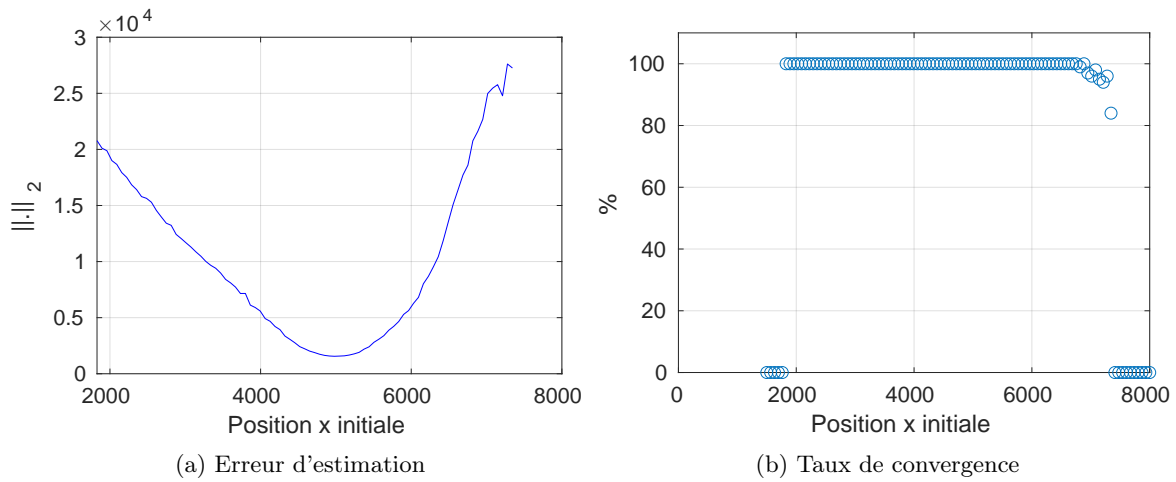


FIGURE 2 – Variation de la position initiale x

3.2 Nombre de particules

Sur la figure 3a, l'effet du nombre de particules utilisées pour estimer les distributions est testé. Il est apparu qu'un minimum de 200 particules est nécessaire pour obtenir des estimations précises. Si le nombre de particules est inférieur, les distributions ne sont pas bien estimées, mais cela n'empêche pas l'algorithme de produire une solution (figure 3b). En augmentant le nombre de particules au-delà de 200, la précision augmente légèrement.

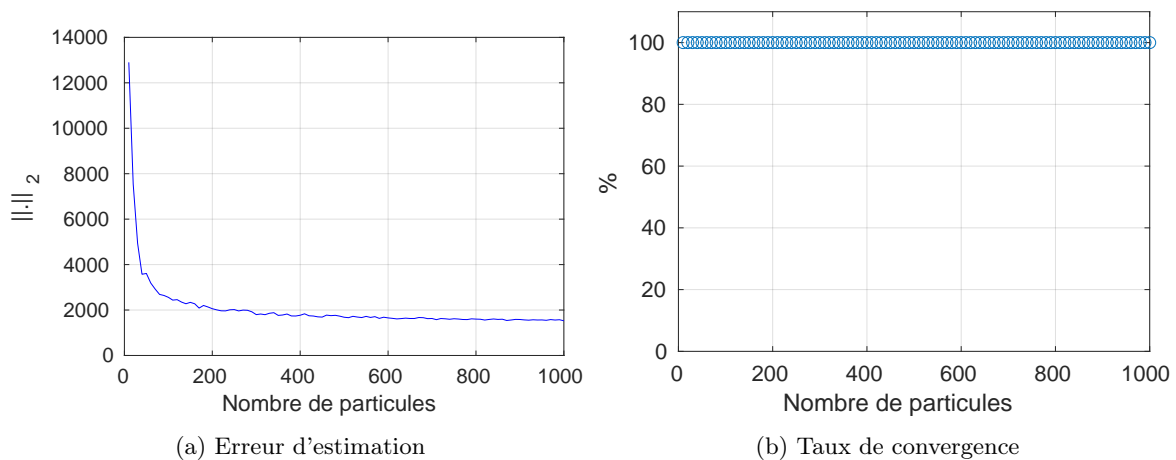


FIGURE 3 – Variation du nombre de particules

3.3 Écart-type des bruits

3.3.1 Bruit de mesure

Deux mesures sont fournies à l'algorithme : la distance de la cible au radar et l'angle formé entre le sol et l'emplacement de la cible. Ces deux mesures sont parfaitement connues, puis bruitées par des bruits blancs gaussiens additifs. Les écart-type utilisés sont de l'ordre de ceux affectant les données réelles ($\pi/100m/s^2$ pour σ_θ et $50m$ pour σ_r). L'image 4 donne l'erreur quadratique avec une nuance allant du bleu foncé (faible erreur) au jaune (erreur importante) selon les deux variances utilisées. Les mesures les plus sensibles sont celles liées à la distance du radar car un dégradé selon l'axe σ_r apparaît.

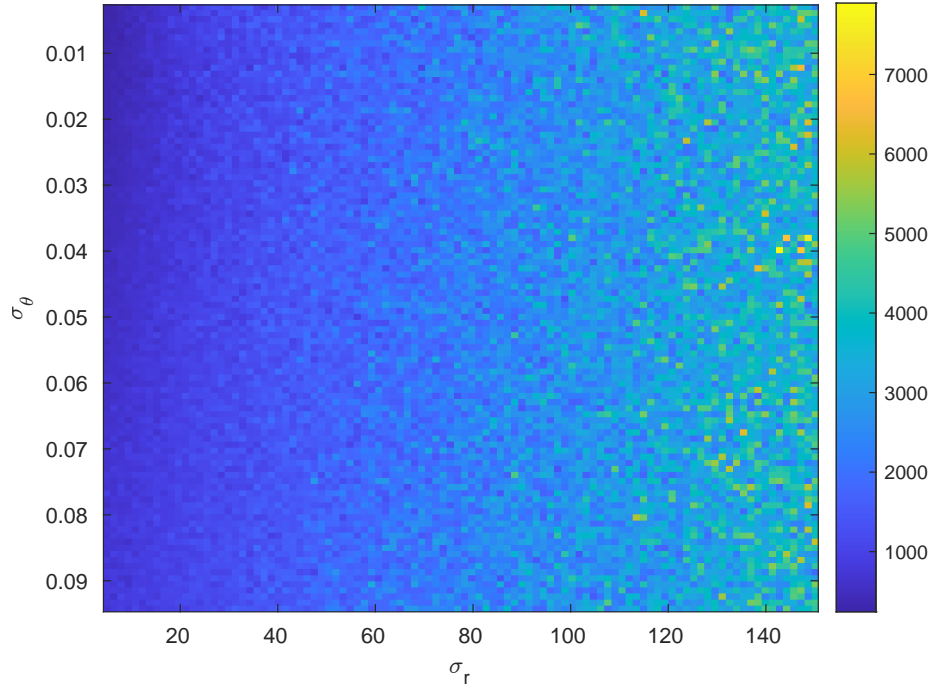


FIGURE 4 – Influence des écart-types des bruit de mesure

3.3.2 Bruit de modèle

Comprendre le bruit de modèle est crucial pour l'algorithme afin de saisir la dynamique du mouvement. Si le bruit est sous-estimé, la trajectoire estimée sera trop linéaire dès les premiers points et l'erreur quadratique sera importante. Si le bruit est sur-estimé, la trajectoire aura une forte variance autour de la trajectoire réelle. Ce dernier point se reflète sur la courbe de la figure 5a par une croissance modérée de l'erreur quadratique. A noter que pour un bruit de modèle nul le filtre est incapable de donner une trajectoire (taux de convergence nul sur la figure 5b).

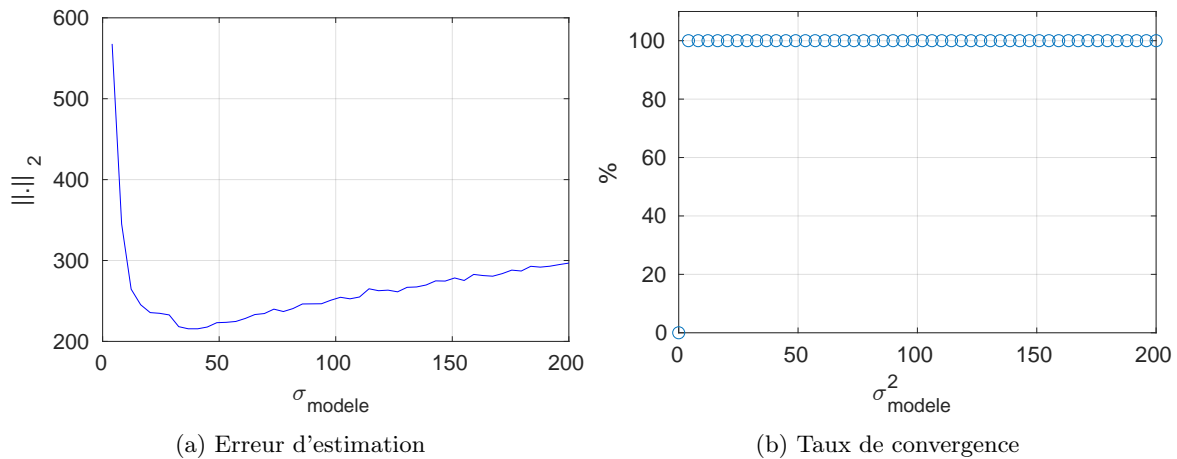


FIGURE 5 – Influence de l'écart-type du bruit de modèle

La figure 6 illustre ces trois régimes.

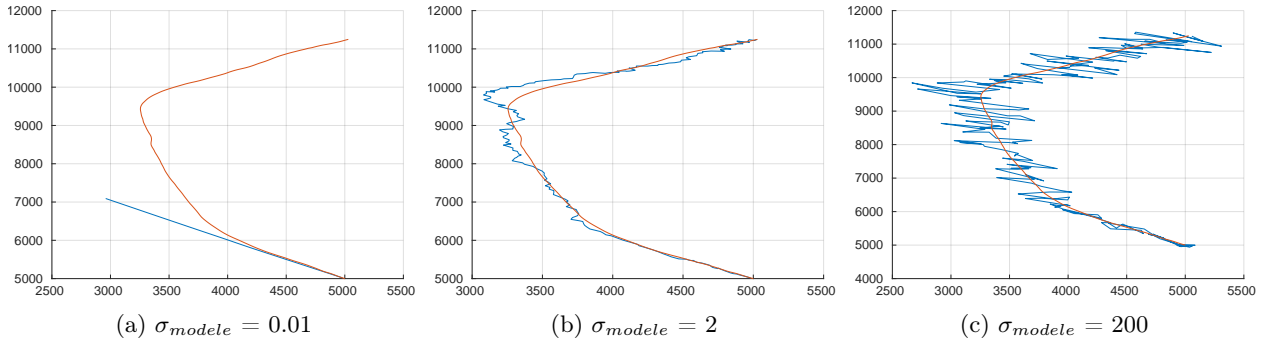


FIGURE 6 – Trajectoires selon différentes valeur d'écart type de bruit de modèle. En orange la trajectoire réelle, et en bleue la trajectoire estimée par filtrage.

Conclusion

Dans ce TP, on se donne l'objectif d'étudier la méthode de pistage d'objet par filtrage particulaire. Pour ce faire, une trajectoire manoeuvrante est fournie.

En essayant de suivre cette trajectoire par filtrage particulaire, on remarque que ce filtre accroche très bien lorsque le mouvement est localement assimilable à une trajectoire rectiligne, mais tend à décrocher lorsque la trajectoire est localement hautement manoeuvrante.

L'importance de ce décrochage est réglable en modifiant le bruit de modèle associé au filtre. Trop bas, le filtre décroche dès que la trajectoire n'est plus rectiligne. Trop haut, et le filtre va surcompenser les erreurs qu'il commet, estimant donc une trajectoire très bruitée.

Enfin, la position initiale des particules joue aussi sur la capacité du filtre à accrocher à la trajectoire. Lorsque l'on décale le point de départ des particules du côté où la trajectoire évolue, le filtre a tendance à mieux accrocher que pour un même décalage du côté opposé. Le cas nominal reste cependant lorsque les particules démarrent aux mêmes coordonnées que la trajectoire.