TP de filtrage particulaire
Application au suivi de cibles

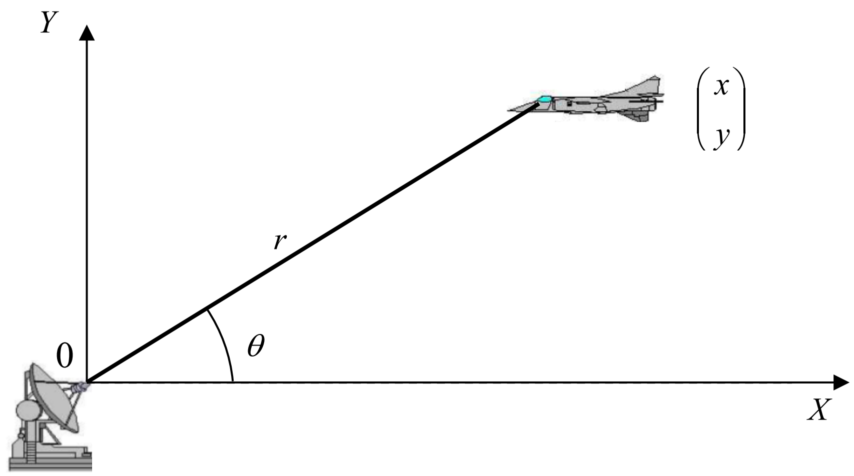
Introduction

Le pistage est au cœur des applications de surveillance tant civiles (contrôle du trafic aérien) que militaires (défense aérienne, etc.). Appelé aussi poursuite de cible, il consiste à estimer le mouvement d'un mobile (position, vitesse, etc.) à partir de mesures capteurs bruitées.

Dans ce TP, nous nous intéressons au problème du pistage radar dont nous expliquons ici brièvement le principe. Un radar envoie des impulsions très brèves qui se propagent dans l'atmosphère à la vitesse de la lumière. Quand le signal atteint une cible, une partie de celui-ci est réfléchie en direction de l'antenne radar. Après traitements, le radar calcule une estimation de l'angle entre son axe de visée et un axe de référence, noté θ, ainsi que la distance r le séparant de la cible. Celle-ci se déduit directement de l'intervalle de temps Δt au bout duquel le signal revient au radar après réflexion :

$$r = c\frac{\Delta t}{2} \text{ où } c \text{ est la vitesse de la lumière.}$$

L'application traitée dans ce TP est illustrée par le schéma ci-dessous :



L'antenne radar est supposée située à l'origine du repère, sa position est donc (0,0).

L'objectif du TP est de retrouver la trajectoire de la cible, c'est-à-dire l'évolution au cours du temps de ses coordonnées $(x(t), y(t))$ à partir des mesures radar ***bruitées*** d'angle et de distance, notées $\theta^m(t)$ et $r^m(t)$. Le modèle d'observation prend donc la forme :

$$\begin{pmatrix} r^m(t) \\ \theta^m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_r(t) \\ v_\theta(t) \end{pmatrix},$$

où

- $r(t) = h_r(x(t), y(t))$ représente la vraie distance géométrique entre la cible et le radar, qui peut s'exprimer en fonction des coordonnées de la cible $(x(t), y(t))$,

- $\theta(t) = h_\theta(x(t), y(t))$ est l'angle exact entre l'axe de visée du radar et l'axe des abscisses (*OX*), qui peut aussi s'exprimer en fonction des coordonnées de la cible $(x(t), y(t))$,
- $v_r(t)$ et $v_\theta(t)$ sont des bruits blancs centrés et gaussiens de variances respectives notées σ_r^2 et σ_θ^2.

Par la suite, on note $\underline{z}(t) = (r^m(t), \theta^m(t))^T$ le vecteur d'observation utilisé pour l'estimation.

Quelques précisions sur les notations

Pour ce TP, l'intervalle de temps entre deux mesures radar est supposé constant et égal à *T*. L'estimation des coordonnées $(x(t), y(t))$ n'est donc réalisée qu'à des instants discrets $t_k = kT$, avec $k \geq 0$. Par souci de simplicité on notera par la suite $x(k) = x(kT)$, $y(k) = y(kT)$, $r^m(k) = r^m(kT)$, et $\theta^m(k) = \theta^m(kT)$.

Questions préliminaires

L'objectif de cette partie est de programmer différentes fonctions Matlab qui vous seront utiles pour mettre en œuvre le filtre particulaire dans la seconde partie du TP.

Pour établir le modèle d'état, on suppose que la cible ne subit pas de fortes accélérations : elle n'est pas en phase de manœuvre. Dans ce cas, son accélération peut être modélisée comme un bruit blanc :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(k) \\ \ddot{y}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(k) \\ u_y(k) \end{pmatrix},$$

avec $E[u_x(k)] = E[u_y(k)] = 0$ et $E[u_x{}^2(k)] = E[u_y{}^2(k)] = \sigma_u^2$.

1) Sous cette hypothèse, précisez le vecteur état $\underline{x}(k)$ le plus adéquat à utiliser pour estimer le mouvement du mobile. En utilisant des développements limités, explicitez les relations existant entre $x(k), x(k-1), \dot{x}(k)$ et $\dot{x}(k-1)$ (respectivement $y(k), y(k-1), \dot{y}(k)$ et $\dot{y}(k-1)$). Déduisez-en l'expression des matrices du modèle d'état correspondant :

$$\underline{x}(k) = \Phi(k, k-1)\underline{x}(k-1) + G(k)\underline{u}(k-1).$$

   Programmez une fonction Matlab que vous appellerez **matrices_etat** prenant en entrée l'intervalle de temps *T* et calculant :
   - la matrice d'évolution $\Phi(k, k-1)$,
   - la matrice $G(k)$

2) Donnez l'expression des fonctions $h_r(x, y)$ et $h_\theta(x, y)$ qui associent à un point du plan de coordonnées *(x,y)* la distance géométrique *r* entre ce point et le radar ainsi que l'angle θ représenté sur la figure en page 1. Créez ces deux fonctions sous Matlab et appelez-les **fonction_r** et **fonction_theta**, respectivement.

3) Donnez l'expression de la fonction de vraisemblance :

$$p(\underline{z}(k) | \underline{x}(k)) = p(r^m(k) | \underline{x}(k)) p(\theta^m(k) | \underline{x}(k)).$$

Programmez ensuite une fonction **vraisemblance** sous Matlab, utilisant les fonctions **fonction_r** et **fonction_theta**, qui prend en entrée :

- le vecteur état $\underline{x}(k)$,
- les mesures $\left(r^m(k), \theta^m(k)\right)$,
- les variances des bruits de mesure $v_r(k)$ et $v_\theta(k)$,

et qui calcule la vraisemblance $p\left(\underline{z}(k) \middle| \underline{x}(k)\right)$.

Programmation du filtre particulaire

Récupérez les fichiers TP_particulaire.zip. Chargez le fichier de mesures *mesures_radar.mat*. Il contient une matrice *Z* dont le nombre de lignes est 2 et le nombre de colonnes est le nombre de points de la trajectoire de la cible. Ainsi, *Z(1,k)* et *Z(2,k)* désignent la mesure de distance et la mesure d'angle pour le $k^{\text{ième}}$ point de la trajectoire, respectivement.

1) Mettez en œuvre un filtre particulaire de type **bootstrap (SIR)** pour estimer la trajectoire de la cible à partir des mesures radar. Pour ce faire, vous pourrez tout d'abord créer une fonction **simu_modele_etat** prenant en entrée
   - le vecteur état à l'instant *k-1* $\underline{x}(k-1)$,
   - les matrices d'état $\Phi(k,k-1)$ et $G(k)$,
   - la variance du bruit d'état σ_u^2,

   et retournant en sortie :
   - un vecteur état possible $\underline{x}(k)$.

   Dans un premier temps, vous choisirez *N=1000* particules et vous initialiserez correctement le filtre en choisissant toutes les particules égales à la vraie position de la cible à l'instant *t=1* (et contenue dans le fichier *trajectoire_reelle.mat*). Par ailleurs, vous prendrez comme valeur des paramètres :

σ_u	2 m/s^2
σ_r	50 m
σ_θ	$\pi/100$
T	1 s

   Pour réaliser le rééchantillonnage des particules, vous utiliserez le programme *resampling* fourni dans *TP_particulaire.zip*.

2) Quel est l'intérêt d'introduire un rééchantillonnage ? Est-il judicieux de le réaliser à chaque pas de temps ?

3) Faites varier l'initialisation et le nombre de particules, qu'observez-vous ? Pour argumenter votre réponse, vous pourrez par exemple tracer des erreurs quadratiques moyennes d'estimation (la vraie trajectoire est donnée comme référence dans le fichier *trajectoire_reelle.mat*).

4) Faites varier les valeurs des écart-types des bruits d'état et de mesure pour étudier la sensibilité de l'algorithme à ces paramètres. Pour cela, vous pourrez utiliser le fichier de mesures *mesures_radar_non_bruitees.mat* contenant les vraies distances géométriques entre la cible et le radar et les vrais angles entre l'axe de visée et l'axe (*OX*) auxquels vous pourrez ajouter les bruits de mesure que vous souhaitez. Commentez les résultats obtenus. Quelles sont les solutions pour pallier les problèmes que vous avez mis en évidence ?