

Ćwiczenie 6. Wykorzystanie numerycznych algorytmów optymalizacyjnych do identyfikacji

Dominik Sierociuk
Politechnika Warszawska
Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej

OKNO, Modelowanie i Identyfikacja Systemów Dynamicznych

1 Wprowadzenie

W ćwiczeniu tym zostanie przedstawione wykorzystanie algorytmów optymalizacyjnych numerycznych o identyfikacji parametrycznej zarówno z odpowiedzi w dziedzinie czasu jak i częstotliwości.

Ze względu na to, iż zagadnienie algorytmów optymalizacyjnych jest bardzo szerokie i złożone (poświęcane nim są osobne wykłady), tutaj skupimy się tylko na ich praktycznemu wykorzystaniu dla potrzeb identyfikacji. Całość zagadnienia optymalizacyjnego będzie więc sprowadzona do odpowiedniego sformułowania problemu dla funkcji *fminsearch* w środowisku Matlab.

Funkcja ta, w najprostszej postaci przyjmuje dwa argumenty

$X = \text{fminsearch}(FUN, X0)$,

gdzie *FUN* jest funkcją poddawaną minimalizacji, a *X0* jest warunkiem początkowym algorytmu minimalizacji.

Jako przykład jej zastosowania weźmy funkcję $f(x, c) = x_1^2 + cx_2^2$, dla której, dla parametru $c = 1.5$ będziemy szukać takich x_1 i x_2 aby ją zminimalizować.

```
f = @(x,c) x(1).^2+c.*x(2).^2; % The parameterized function.  
c = 1.5; % The parameter.  
X = fminsearch(@(x) f(x,c), [0.3;1])
```

W tym przypadku *f* jest uchwyttem do funkcji anonimowej parametryzowanej przez *x* i *c*. Funkcja ta jest przekazywana do funkcji *fminsearch* i minimalizowana względem zmiennej *x* (parametr *c* jest przekazywany w postaci jego aktualnej wartości).

Przykład 1. Powróćmy więc do przykładu pokazywanego w ćwiczeniu 2, jako przykład identyfikacji parametrów układu ciągłego.

Metodę regresji liniowej została wtedy użyta do identyfikacji parametrów układu ciągłego poprzez odpowiedni zapis jego odpowiedzi analitycznej, aby miała postać równania liniowego.

Weźliśmy wtedy układ inercyjny o transmitancji

$$G(s) = \frac{1}{as + 1} \quad (1)$$

jego analityczna odpowiedź skokowa wyznaczona została w następujący sposób

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{as + 1} \frac{1}{s}\right\} = 1(t) - e^{-at}$$

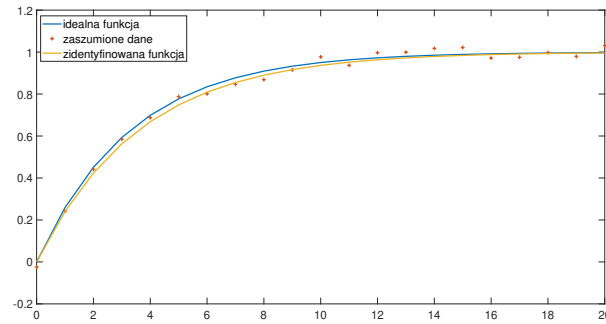
przekształcając i logarytmując obie strony równania otrzymujemy

$$\ln(1 - y(t)) = -at$$

co możemy zapisać w postaci macierzowej dla kolejnych próbek

$$\theta = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}, \quad \varphi_i^T = [-t_i], \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \ln(1 - y(t_1)) \\ \vdots \\ \ln(1 - y(t_N)) \end{bmatrix}$$

gdzie t_i są kolejnymi wartościami czasu dla poszczególnych próbek.



Rysunek 1: Wyniki identyfikacji układu inercyjnego

Dla tego przypadku otrzymywaliśmy niekoniecznie zadowalające wyniki. Powodem tego była pojawiająca się osobliwość przy wyznaczaniu $\ln(1 - y(t))$. Osobliwość ta powodowała otrzymanie, przy wartości odpowiedzi powyżej 1 spowodowanej szumem pomiarowym, wartości zespolonej. Dlatego z otrzymywanej wartości logarytmu naturalnego była wybierana tylko wartość rzeczywista, co oczywiście powodowało, że problem stawał się nieliniowy.

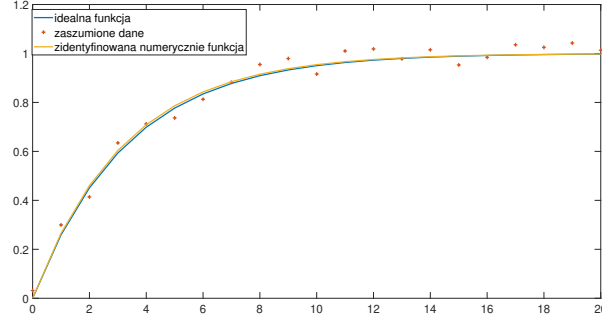
Dlatego teraz spróbujemy zastosować do tego problemu algorytm minimalizacji numerycznej. Weźmy więc, zbudujemy funkcję celu, jako kwadrat różnicy pomiędzy zmierzonymi punktami, a zadaną funkcją.

```
function e=funkcja_celu1(z,y)
t=0:20;
ym=1-exp(-z(1)*t);
e=(y-ym)*(y-ym)';
```

Następnie, funkcję tę minimalizujemy funkcją *fminsearch*

```
z = fminsearch(@(ze) funkcja_celu1(ze,yp), [1]);
```

w wyniku tej minimalizacji otrzymujemy znacznie dokładniejszy wynik estymacji parametru $z = 0.3086$, co dobrze widać na Rysunku 2.



Rysunek 2: Wyniki numerycznej identyfikacji układu inercyjnego

1.1 Zbieranie charakterystyk częstotliwościowych

Założmy, że chcemy zebrać charakterystykę częstotliwościową obiektu, którego wejściem jest $u(t)$, a wyjściem $y(t)$. Transmitancja operatorowa dla takiego przypadku zdefiniowana jest w następujący sposób:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad (2)$$

gdzie $U(s)$ i $Y(s)$ są odpowiednio transformatami Laplace'a sygnałów wejściowego i wyjściowego.

W dziedzinie częstotliwości ta transmitancja będzie wyrażona poprzez transmitancję widmową daną następującą relacją:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}, \quad (3)$$

gdzie $U(\omega)$ i $Y(\omega)$ są odpowiednio transformatami Fouriera sygnałów wejściowego i wyjściowego. Przejście z transmitancji operatorowej do widmowej możliwe jest dzięki skorzystaniu z podstawowej relacji pomiędzy tymi transformatami $s \rightarrow j\omega$. Transmitancja widmowa dla danej wartości pulsacji ω jest liczbą zespoloną. Korzystając z interpretacji geometrycznej liczby zespolonej liczbę tę możemy zapisać w postaci jej modułu oraz kąta.

$$G(j\omega_1) = Re[G(j\omega_1)] + jIm[G(j\omega_1)] = A(\omega_1)e^{j\phi(\omega_1)}, \quad (4)$$

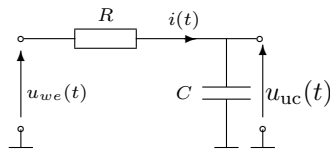
gdzie $A(\omega_1)$ jest modulem tej liczby zespolonej dla danej częstotliwości ω_1 oraz $\phi(\omega_1)$ jest kątem dla tejże częstotliwości. Moduł $A(\omega_1)$ opisuje wzmocnienie jakie ma układ dla tej częstotliwości, a $\phi(\omega_1)$ opisuje jakie układ wprowadza przesunięcie fazowe dla tej częstotliwości.

Aby zebrać charakterystykę częstotliwościową układu musimy więc dokonać pomiarów wzmocnienia i przesunięcia fazowego dla wybranych częstotliwości. Wybór tych częstotliwości będzie bardzo ważnym zagadnieniem, gdyż od niego będzie zależała dokładność zobrazowania charakterystyki. Warto przy tym pamiętać, że charakterystyki będą wyrysowywane w skali logarytmicznej, a nie liniowej. Warto także wziąć pod uwagę to, jaki jest spodziewany przebieg charakterystyki (aby w jej liniowej części nie zbierać bardzo dużo punktów, które zdecydowanie by się przydały przy fragmentach bardziej złożonych).

Podsumowując w skrócie: przemiatamy częstotliwości mierząc dla każdej z nich amplitudy sygnałów wejściowego i wyjściowego oraz ich przesunięcie fazowe. Następnie dzielimy amplitudę sygnału wyjściowego do amplitudy sygnału wejściowego $A(\omega) = u_{wy}(\omega)/u_{we}(\omega)$, wyciągamy z wyniku $20 \log(A(\omega))$ i otrzymujemy w ten sposób jeden punkt na charakterystyce wzmocnienia. Z tych samych przebiegów odczytujemy czas pomiędzy analogicznymi punktami przebiegów (np. wierzchołki), odnosimy go do długości pełnego okresu i z proporcji obliczamy przesunięcie kątowe.

1.2 Badanie członu inercyjnego

Schemat najprostszej realizacji członu inercyjnego na elementach RC przedstawiony jest na Rysunku 3. Jest to układ ładowania kondensatora poprzez rezystor.



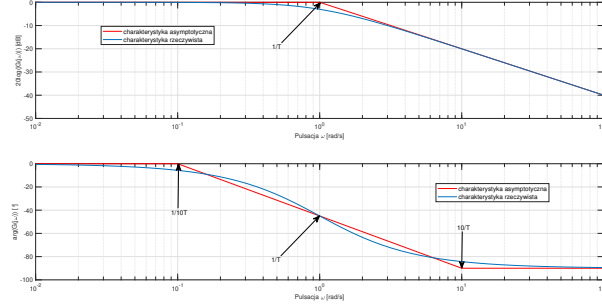
Rysunek 3: Schemat członu inercyjnego

Biorąc pod uwagę wzór na transmitancję napięciową czwórnika otrzymujemy następującą transmitancję napięciową:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{RCs+1}{sC}} = \frac{1}{RCs+1}$$

Charakterystyka częstotliwościowa członu inercyjnego przedstawiona jest na Rysunku 4. Jak można na niej zauważyć, charakterystyka amplitudowa może

być aproksymowana przez półproste, jedną do częstotliwości $1/T$, która biegnie po zerowej wartości wzmocnienia logarytmicznego, natomiast powyżej częstotliwości $1/T$ maleje 20dB/dekadę.



Rysunek 4: Charakterystyka częstotliwościowa układu inercyjnego

1.3 Dopasowanie charakterystyk

Dokładne zidentyfikowanie parametrów układu ciągłego można przeprowadzić poprzez numeryczne dopasowanie charakterystyki częstotliwościowej, czyli minimalizacji funkcji celu określonej jako kwadrat błędu pomiędzy danymi zebranymi z charakterystyki częstotliwościowej, a dopasowywaną charakterystyką teoretyczną.

$$e = \sum_{j=0}^N (A_m(\omega_j) - A_p(\omega_j))^2 + (\phi_m(\omega_j) - \phi_p(\omega_j))^2, \quad (5)$$

gdzie $A_m(\omega_j)$ są kolejnymi wartościami amplitudy charakterystyki częstotliwościowej dopasowywanego modelu, a $A_p(\omega_j)$ wartościami amplitudy charakterystyki częstotliwościowej otrzymanymi z pomiarów. Natomiast $\phi_m(\omega_j)$ oraz $\phi_p(\omega_j)$ odpowiednio wartościami przesunięciami fazowymi charakterystyki częstotliwościowej otrzymanymi dopasowywanego modelu i otrzymanego z pomiarów.

Uwaga 1. W praktyce możemy spotkać się z problemem zbyt mocnego bądź zbyt lekkiego dążenia do dopasowania charakterystyki przesunięcia fazowego (w zależności czy dopasowywane dane są wyrażone w stopniach czy radianach). W przypadku danych wyrażonych w stopniach, relacja pomiędzy stopniami a decybelami będzie mocno przemawiały za mocniejszą optymalizacją dopasowania charakterystyki przesunięcia fazowego, natomiast w przypadku wyrażenia przesunięcia fazowego w radianach charakterystyka przesunięcia fazowego będzie prawie nie brana pod uwagę. Dlatego można wprowadzić wagową funkcję celu

$$e = \sum_{j=0}^N (A_m(\omega_j) - A_p(\omega_j))^2 + w(\phi_m(\omega_j) - \phi_p(\omega_j))^2, \quad (6)$$

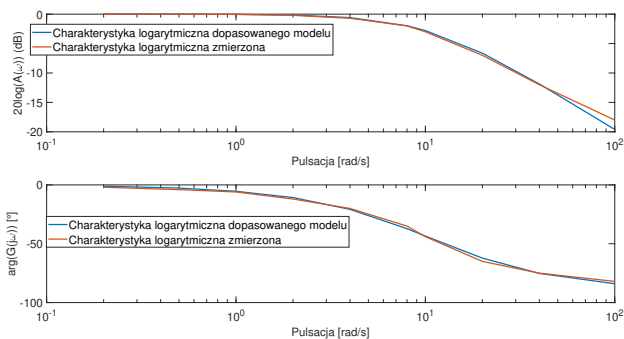
gdzie w jest właśnie wprowadzona wagą umożliwiającą kompensację tego problemu.

Przykład 2. Przykład identyfikacji z użyciem numerycznych algorytmów minimalizacyjnych dla członu inercyjnego

Przy użyciu symulacji numerycznej (plik do symulowania w Simulinku to *inercyjny.slx*) dla kolejnych częstotliwości oraz obliczeniom potrzebnym dla wyznaczenia charakterystyki częstotliwościowej otrzymano następujące dane:

ω [rad/s]	$A(\omega)$ [dB]	$\phi(\omega)$ [°]
0.2	-0.01	-2
0.5	-0.01	-4
1	-0.04	-6
2	-0.2	-12
4	-0.7	-20
8	-2	-35
10	-3	-44
20	-7	-65
40	-12	-75
100	-18	-82

Wyniki dopasowania zostały przedstawione na Rysunku 5, a otrzymany parametr to $T = 0.0949$.



Rysunek 5: Porównanie charakterystyk częstotliwościowych układu inercyjnego pomierzonej i dopasowanej

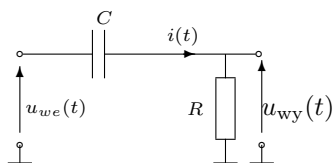
2 Plan ćwiczenia

1) Przeprowadzić identyfikację układu ciągłego

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

z zastosowaniem modelu dyskretnego przy różnych wartościach zaszumienia sygnału wyjściowego oraz różnych częstotliwościach próbkowania (szczególnie tych wyższych jak 100Hz) . Wyniki porównać z tradycyjnym podejściem przedstawionym w ćwiczeniu dotyczącym identyfikacji off-line.

2) Przeprowadzić identyfikację członu różniczkującego rzeczywistego na podstawie charakterystyki częstotliwościowej dla wybranych jego parametrów (przynajmniej 2 przypadki). Człon ten dany jest następującym schematem



Rysunek 6: Schemat członu różniczkującego rzeczywistego

Uwaga 2. *Pamiętać o dobraniu odpowiedniego okresu próbkowania do zadawanej częstotliwości wymuszenia.*

3) Identyfikacja parametrów ultrakondensatora

Ultrakondensatory są elementami elektronicznymi charakteryzującymi się dużą gęstością energii (większą od tradycyjnych kondensatorów, mniejszą niż w przypadku akumulatorów, od których mają znacznie większą sprawność energetyczną). Składają się z dwóch elektrod złożonych z węgla aktywowanego, rozdzielonych separatorem i całość zanurzona jest w elektrolicie. Jeżeli napięcie zasilania mniejsze jest od pewnego napięcia (zwanego napięciem Helmholtz'a) to w elektrolicie nie będzie następowała elektroliza, a pomiędzy elektrodą i elektrolytem wytworzy się bardzo cienka bariera energetyczna (o atomowej szerokości). Bardzo cienka bariera oraz bardzo duża powierzchnia jaką posiadają elektrody z węgla aktywowanego (metry kwadratowe na gram) skutkuje tym, że osiągnięte są gigantyczne pojemności (badany ultrakondensator będzie miał pojemność 3000F). Te niesamowite pojemności są niestety otrzymywane tylko dla stosunkowo niskiego napięcia zasilania, w przypadku badanego ultrakondensatora będzie to 2.5V (ale dla otrzymania wyższych napięć można łączyć je szeregowo). W przeciwieństwie do tradycyjnych kondensatorów, gdzie energia magazynowana jest w obrocie dipoli w dielektryku, w ultrakondensatorach magazynowana jest w ruchu jonów elektrolitu (gdyż po przyłożeniu napięcia rozpoczyna się dryft jonów do poszczególnych elektrod możliwy do opisanego zjawiskiem dyfuzji anormalnej). Oczywiście, ten mechanizm ma zasadniczy wpływ na dynamikę ultrakondensatora, która będzie inna niż tradycyjnych kondensatorów. W katalogu freq-90A zawarte są dane zebrane w eksperymencie identyfikacyjnym z układu rzeczywistego dla maksymalnych wartości prądu równych 90A. Plik char_3000.m

umożliwia wyznaczenie charakterystyki częstotliwościowej z zebranych danych. Używa on Szybkiej Transformaty Fouriera (plik fsa.m) do dokładnego pomiaru wartości amplitud sygnałów (dla danej częstotliwości) oraz przesunięcia fazowego pomiędzy sygnałem prądu i napięcia.

Przeprowadzić identyfikację tego ultrakondensatora poprzez dopasowanie charakterystyki częstotliwościowej z użyciem następujących modeli:

- model bazujący na tradycyjnym modelu kondensatora

$$G_{uc}(s) = R + \frac{1}{sC}, \quad (7)$$

gdzie R jest rezystancją elektrod

- model bazujący na uproszczonym modelu Davidsona-Cola

$$G_{uc}(s) = R + \frac{\sqrt{Ts + 1}}{sC} \quad (8)$$

- model bazujący na modelu opartym na dyfuzji anomalnej

$$G_{uc}(s) = R + \frac{\sqrt{T_\alpha s^\alpha + 1}}{s^\alpha C_\alpha} \quad (9)$$

2.1 Sprawozdanie

W sprawozdaniu z ćwiczenia przedstawić przede wszystkim wnioski jakie nasunęły się podczas przeprowadzania ćwiczenia, można je zilustrować szeregiem otrzymanych wyników.