Ćwiczenie 5. Identyfikacja z użyciem filtru Kalmana

Dominik Sierociuk
Politechnika Warszawska
Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej

OKNO, Modelowanie i Identyfikacja Systemów Dynamicznych

1 Wprowadzenie

W ćwiczeniu tym zostanie przedstawiona metoda identyfikacji on-line z użyciem filtru Kalmana. Na początku ćwiczenia zostanie przedstawiony sam algorytm filtru wraz z przykładem estymacji zmiennych stanu. Następnie zostanie przedstawiony modyfikacja filtru Kalmana dla układów nieliniowych, gdyż użycie filtu Kalmana do estymacji parametrów będzie wymagało przedefiniowania układu liniowego do postaci układu nieliniowego. Przedefiniowanie to będzie polegało na poszerzeniu wektora zmiennych stanu o poszukiwany parametr.

2 Filtr Kalmana dla estymacji układów liniowych

Filtr Kalmana jest optymalnym estymatorem zmiennych stanu układu z zakłóceniami stochastycznymi na podstawie wiedzy o modelu, a także danych wejściowych i wyjściowych z estymowanego obiektu. Wynik estymacji może być otrzymywany, na przykład, poprzez minimalizację w każdym kroku następującej funkcji celu:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_k &= \arg\min_x [(\tilde{x}_k - x)\tilde{P}_k^{-1}(\tilde{x}_k - x)^T \\
&+ (y_k - Cx)R_k^{-1}(y_k - Cx)^T] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

gdzie

$$\tilde{x}_k = \mathrm{E}[x_k | z_{k-1}^*] \qquad (2)$$

jest predykcją wektora zmiennych stanu w czasie k, definiowaną jako wartość oczekiwana zmienej losowej x_k warunkowana poprzez dane z_{k-1}^*. Dane z_k^* zawierają pomiary sygnału wyjściowego $y_0, y_1, \ldots, y_k$ i sygnału wejściowego $u_0, u_1, \ldots, u_k$.

Dodatkowo

$$\hat{x}_k = \mathrm{E}[x_k | z_k^*] \tag{3}$$

jest estymatą wektora zmiennych stanu w czasie k, definiowaną jako wartość oczekiwana zmienej losowej x_k warunkowana poprzez dane z_k^*.

Co więcej

$$\tilde{P}_k = \mathrm{E}\left[(\tilde{x}_k - x_k)(\tilde{x}_k - x_k)^T\right] \tag{4}$$

jest predykcją macierzy kowariancji błędu estymacji. Macierz kowariancji sygnału szumu wyjściowego ν_k jest natomiast zdefiniowana jako

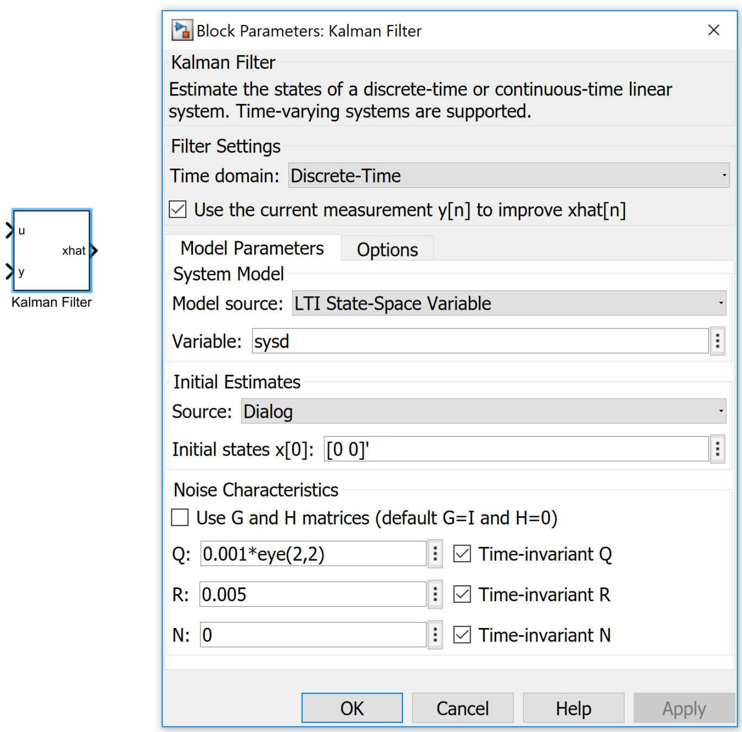
$$R_k = \mathrm{E}\left[\nu_k \nu_k^T\right] \tag{5}$$

podczas gdy macierz kowariancji szumu ω_k jest zdefiniowana jako

$$Q_k = \mathrm{E}\left[\omega_k \omega_k^T\right] \tag{6}$$

Macierz kowariancji błędu estymacji jest definiowana następująco:

$$P_k = \mathrm{E}\left[(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)^T\right] \tag{7}$$



Rysunek 1: Blok filtru Kalmana w Simulinku i jego okno dialogowe

Twierdzenie 1. *Dla dyskretnego liniowego układu opisanego w przestrzeni stanu Filtr Kalmana (ang. Kalman Filter) dany jest następująco:*

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k && (8)\\
\tilde{P}_k &= AP_{k-1}A^T + Q_{k-1} && (9)\\
\hat{x}_k &= \tilde{x}_k + K_k(y_k - C\tilde{x}_k) && (10)\\
P_k &= (I - K_kC)\tilde{P}_k, && (11)
\end{aligned}
$$

gdzie

$$K_k = \tilde{P}_kC^T(C\tilde{P}_kC^T + R_k)^{-1}$$

przy warunkach początkowych

$$x_0 \in \mathbb{R}^N, \quad P_0 = \mathrm{E}[(\tilde{x}_0 - x_0)(\tilde{x}_0 - x_0)^T]$$

zakładamy także, że ν_k i ω_k są szumami niezależnymi o zerowej wartości oczekiwanej. ■

Równania zdefiniowane w Twierdzeniu 1 tworzą rekurencyjny algorytm Filtru Kalmana (KF). Algorytm ten rozpoczyna działanie z wartościami początkowymi x_0 i P_0, które reprezentują naszą wiedzę (a priori) o warunkach początkowych estymowanego układu.

Sam algorytm można podzielić na dwie fazy, pierwsza to faza predykcji, w której na podstawie modelu układu otrzymujemy przewidywaną wartość następnego wektora stanu. Dodatkowo wyznaczamy predykcję macierzy kowariancji błędu estymacji. W drugiej fazie różnica predykcji wyjścia (bazującej na predykcji wektora stanu) oraz pomiar wyjścia będąca błędem estymacji jest używana do wyznaczenia poprawki estymowanego wektora stanu.

2.1 Przykład estymacji układu liniowego

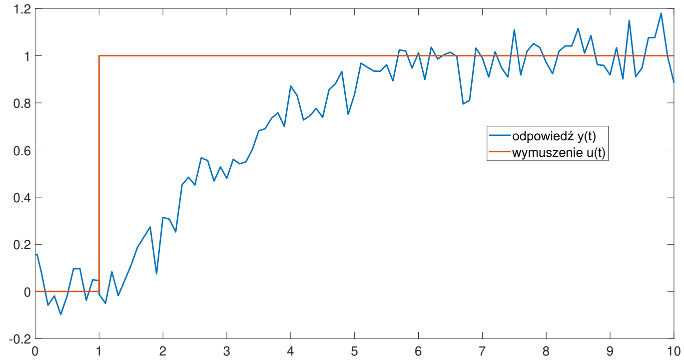
Weźmy układ ciągły o macierzach:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

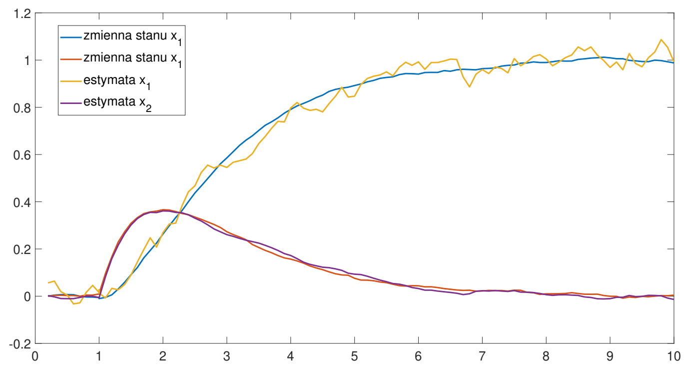
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Odpowiada ten model układowi wózka o masie $m = 1$ napędzanego siłą $F(t)$, który jest połączony ze ścianą poprzez sprężynę $k = 1$ oraz tłumik $b = 2$. Pozycja wózka jest pierwszą zmienną stanu, a jego prędkość to druga zmienna stanu.

Na wózek ten, oprócz zadawanej siły $F(t)$, działają także dodatkowe, niemierzalne siły zewnętrzne (na przykład wiatru), które powodują drobną zmianę pozycji wózka poza możliwością ich przewidzenia przez model. W naszym modelu będziemy to odwzorowywać poprzez zakłócenie ω (przy czym ω_1 to zakłócenie pozycji, a ω_2 zakłócenie prędkości.



Rysunek 2: Wyjście układu i sygnał wymuszający



Rysunek 3: Wyniki estymacji

2.2 Filtr Kalmana dla układów nieliniowych

Dyskretny układ nieliniowy dany jest następująco:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + \omega_k \tag{12}$$

$$y_k = h(x_k) + \nu_k \tag{13}$$

Twierdzenie 2. *Dla dyskretnego nieliniowego układu opisanego w przestrzeni stanu rozszerzony filtr Kalmana (ang. Extended Kalman Filter) dany jest następująco:*

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_{k+1} &= f(\hat{x}_k, u_k) & (14)\\
\tilde{P}_k &= F_k P_{k-1} F_k^T + Q_{k-1} & (15)\\
\hat{x}_k &= \tilde{x}_k + K_k(y_k - h(\tilde{x}_k)) & (16)\\
P_k &= (I - K_k H_k)\tilde{P}_k, & (17)
\end{aligned}
$$

gdzie

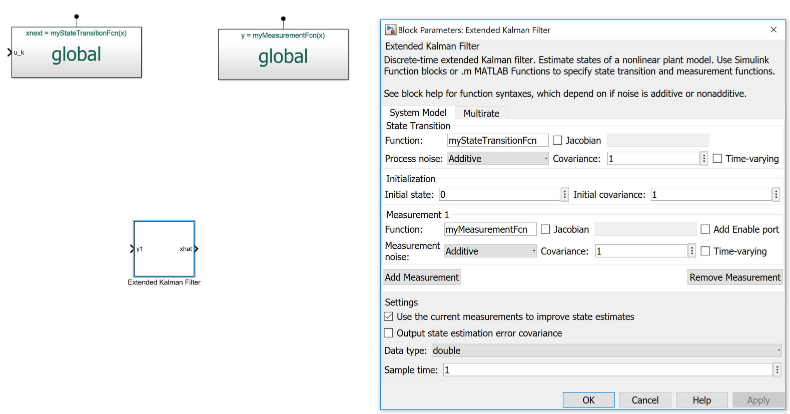
$$K_k = \tilde{P}_k H_k^T (H_k \tilde{P}_k H_k^T + R_k)^{-1}$$

przy warunkach początkowych

$$x_0 \in \mathbb{R}^N, \quad P_0 = \mathrm{E}[(\tilde{x}_0 - x_0)(\tilde{x}_0 - x_0)^T]$$

przy wyprowadzaniu równań filtru konieczne było dokonanie uproszczenia – linearyzacji. Zlinearyzowane macierze dane są następująco:

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{\partial f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1})}{\partial x}\\
H_k &= \frac{h(\tilde{x}_k)}{\partial x}
\end{aligned}
$$



Rysunek 4: Wyjście układu i sygnał wymuszający

W Simulinku jest dostępny blok Extended Kalman Filter, który realizuje ten algorytm. Funkcje nieliniowe $f(x_k, u_k)$ oraz $h(x_k)$ są realizowane w postaci odpowiednio zrealizowanych i nazwanych bloków Simulink Function. Blok o nazwie myStateTransitionFcn odpowiada funkcji $f(x_k, u_k)$. Posiada on argument wejściowy x odpowiadający aktualnej wartości wektora stanu oraz argument wyjściowy $xnext$, który odpowiada wartości następnego wektora stanu. Dodatkowo, blok ten posiada port wejściowy u_k, który służy do podawania aktualnych sygnałów wejściowych. Blok myMeasurementFcn odpowiada natomiast funkcji $h(x_k)$ i posiada argument wejściowy x (wektor stanu) oraz argument wyjściowy y wyznaczone wyjście modelu. Określa więc relację pomiędzy wektorem stanu, a wyjściem modelu. Dodatkowo, w oknie konfiguracyjnym bloku EKF możemy określić parametry szumu systemowego (ω_k; Process noise; Covariance) i pomiarowego (ν_k; Measurement noise;Covariance), czyli odpowiednio macierze kowariancji szumu Q i R.

2.3 Przykład estymacji parametrów układu liniowego

Weźmy następujący układ:

$$A = \left[\begin{array}{c} a \end{array} \right], B = \left[\begin{array}{c} 0.05 \end{array} \right]$$

$$C = \left[\begin{array}{c} 1 \end{array} \right], D = \left[\begin{array}{c} 0 \end{array} \right],$$

System ten jest zaszumiony zarówno szumami systemowym i pomiarowym o parametrach odpowiednio $Q = E[\omega_k \omega_k^T] = 0.001$ oraz $R = E[\nu_k \nu_k^T] = 0.0005$.

Daje to następujące równania stanu

$$x_{k+1} = \left[\begin{array}{c} a \end{array} \right] x_k + \left[\begin{array}{c} 0.05 \end{array} \right] u_k$$

$$y_k = \left[\begin{array}{c} 1 \end{array} \right] x_k + \left[\begin{array}{c} 0 \end{array} \right] u_k.$$

Parametr $a = 0.95$ będzie tym, który będziemy traktować jako nieznany i będziemy go estymować.

Poszerzmy więc wektor stanu o poszukiwany parametr a_k, przy czym zakładamy, że będzie on stały, czyli miał dynamikę $a_{k+1} = a_k$.

Otrzymujemy wtedy następujace równania stanu:

$$\left[\begin{array}{c} x_{k+1} \\ a_{k+1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} a_k x_k + 0.05 u_k \\ a_k \end{array} \right]$$

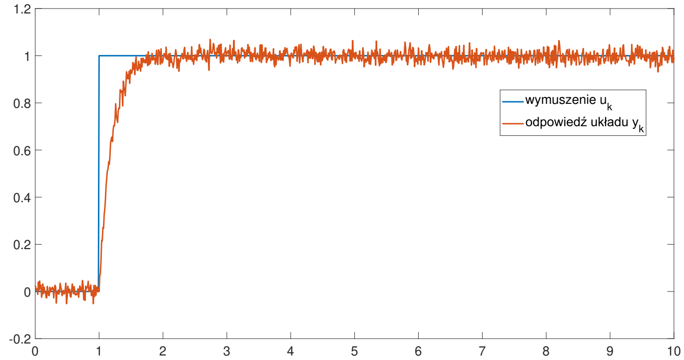
$$y_k = x_k.$$

Modyfikacja wektora stanu pociąga za sobą konieczność modyfikacji macierzy kowariancji szumu systemowego. Teraz będzie ona miała następującą formę

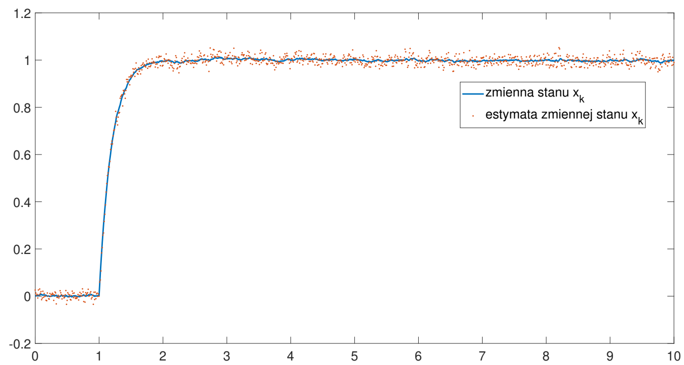
$$Q = \left[\begin{array}{cc} 0.001 & 0 \\ 0 & q_a \end{array} \right],$$

gdzie q_a jest zakładaną wartością kowariancji szumu równania dynamiki parametru, której wartość określa jakie zmiany w czasie dla danego parametru dopuszczamy. Ogólnie im większa wartość, tym bardziej algorytm filtru będzie starał się dopasować ten parametr, a nie oryginalne zmienne stanu.

Przykładowe wyniki estymacji są przedstawione na rysunkach 5, 6 i 7, jak można na nich zauważyć, estymowany parametr dość szybko zbiega się do wartości zadanego parametru.



Rysunek 5: Wyjście układu i sygnał wymuszający



Rysunek 6: Wyniki estymacji zmiennej stanu

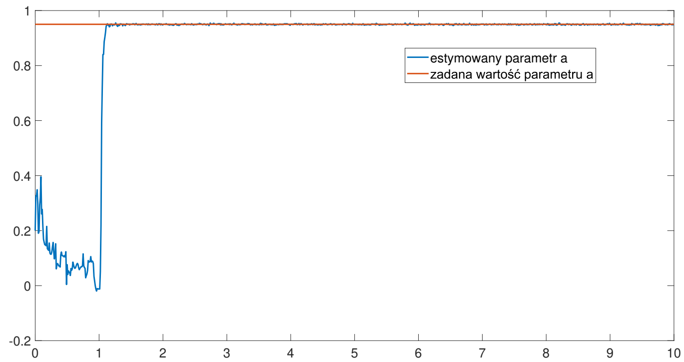
3 Plan ćwiczenia

- Przeprowadzić identyfikację obiektu parametru a_k z użyciem algorytmu filtru Kalamna takiego jak był podany w powyższym przykładzie ze szczególnym uwzględnieniem znaczenia parametru q_a. Badanie przeprowadzić dla różnych wartości zadanego parametru a_k oraz różnych parametrów szumów systemowego i pomiarowego.

- Przeprowadzić identyfikację wybranego parametru dla obiektu

$$A = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.095 \\ -0.19 & 0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.095 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$



Rysunek 7: Wyniki estymacji parametru

Przy okresie próbkowania równym $T_s = 0.1$. Macierze kowariancji szumu systemowego i pomiarowego są następujące:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0005 \end{bmatrix},$$

oraz $R = 0.0001$.

Badanie przeprowadzić z uwzględnieniem znaczenia parametru q_a i dla różnych poziomów szumu systemowego i wyjściowego.

3.1 Sprawozdanie

W sprawozdaniu z ćwiczenia przedstawić przede wszystkim wnioski jakie nasunęły się podczas przeprowadzania ćwiczenia, można je zilustrować szeregiem otrzymanych wyników.