Ćwiczenie 4. Identyfikacja on-line

Dominik Sierociuk
Politechnika Warszawska
Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej

OKNO, Modelowanie i Identyfikacja Systemów Dynamicznych

1 Wprowadzenie

W ćwiczeniu tym zostanie przedstawiona metoda identyfikacji on-line z użyciem rekurencyjnego algorytmu najmniejszych kwadratów RLS)[Rozdział 3.2 i 5.2 skryptu wraz z Zadaniem 4.11 z Rozdziału 4]). W metodzie on-line zakładamy, że identyfikacja jest wykonywana w równolegle z dokonywaniem pomiarów. Czyli algorytm jest przystosowany do przyjmowania kolejnych porcji danych pobranych w dnej chwili, a następnie użycia ich do poprawy otrzymanego wyniku.

Algorytm rekurencyjnej metody najmniejszych kwadratów przedstawia się następujaco:

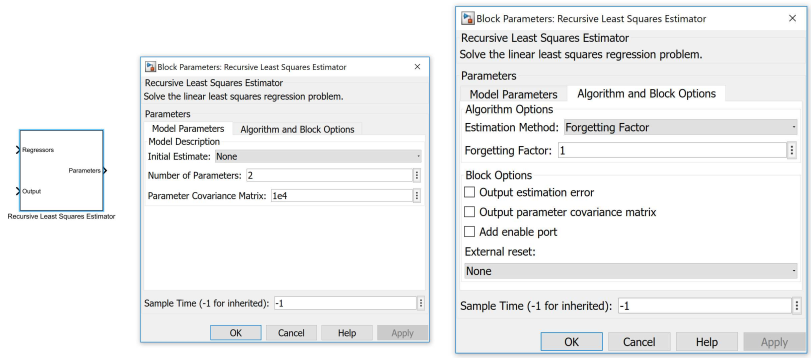
$$
\begin{aligned}
P_{k+1} &= P_k - \frac{P_k a_{k+1} a_{k+1}^T P_k}{1 + a_{k+1}^T P_k a_{k+1}} && (1) \\
\epsilon_{k+1} &= y_{k+1} - a_{k+1}^T \hat{x}_k && (2) \\
K_{k+1} &= P_{k+1} a_{k+1} && (3) \\
\hat{x}_{k+1} &= \hat{x_k} + K_{k+1} \epsilon_{k+1}. && (4)
\end{aligned}
$$

Algorytm ten rozwiązuje rekurencyjnie następujący układ równań:

$$
\left[\begin{array}{c} A_k \\ a_{k+1}^T \end{array} \right] \theta_{k+1} = \left[\begin{array}{c} b_{k+1} \\ y_{k+2} \end{array} \right]. \qquad (5)
$$

Wymaga on dodatkowo określenia następujących wartości początkowych: P_0, $\hat{x}_0$. Gdzie, $\hat{x}_0$ jest wartością początkową estymowanych parametrów, a P_0 jest wartością początkową macierzy kowariancji błędu estymacji, określającą naszą wiedzę a'priori o tym jak dokładnie określiliśmy wartość początkową parametrów.

W Simulinku algorytm ten jest realizowany poprzez blok Recursive Least Squares Estimator, krórego parametry są przedstawione na Rysunku 1. Blok ten ma dwa wejścia, z których Regressors jest wejściem podającym kolejny wektor danych a_{k+1}, a Output wejściem podającym kolejny element wektora b_{k+1} czyli y_{k+1}.



Rysunek 1: Widok simulinkowego bloku RLS wraz z jego parametrami

2 Identyfikacja układu o stałych parametrach

Weźmy układ dynamiczny dany następującą transmitancją:

$$G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \tag{6}$$

opdowiadające mu równanie różnicowe to

$$y_{k+2} = -a_1 y_{k+1} - a_0 y_k + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k \tag{7}$$

Wektory danych dla metody rekurencyjnej są więc następujące

$$a_{k+2}^T = \left[\begin{array}{cccc} -y_{k+1} & -y_k & u_{k+1} & u_k \end{array} \right], \quad b_{k+2} = \left[\begin{array}{c} b_{k+1} \\ y_{k+2} \end{array} \right]$$

Teraz musimy przyjąć warunki początkowe algorytmu θ_0 czyli początkowe wartości wartości parametrów (możemy przyjąc zerowe) oraz P_0 początkową wartość macierzy kowariancji (zazwyczaj przyjmujemy jako diagonalną, szczególnie w postaci aI, gdzie a jest dobraną stałą, a I macierzą jednostkową).

2.1 Przykład identyfikacji obiektu o stałych parametrach

Układ, który będziemy identyfikować dany jest następującą transmitancją (oczywiście założymy nieznajomość jego parametrów)

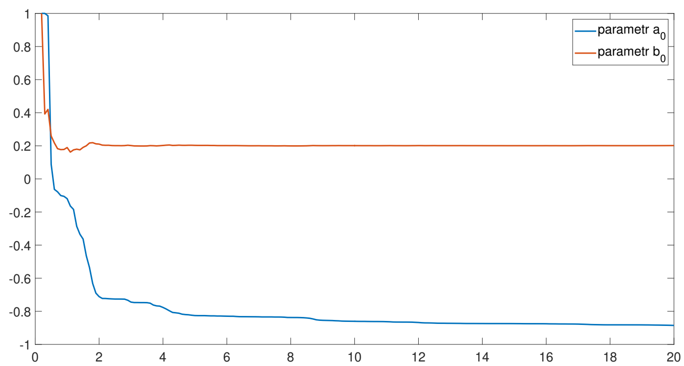
$$G(z) = \frac{0.2}{z - 0.9}$$

Wektory danych dla metody rekurencyjnej są następujące

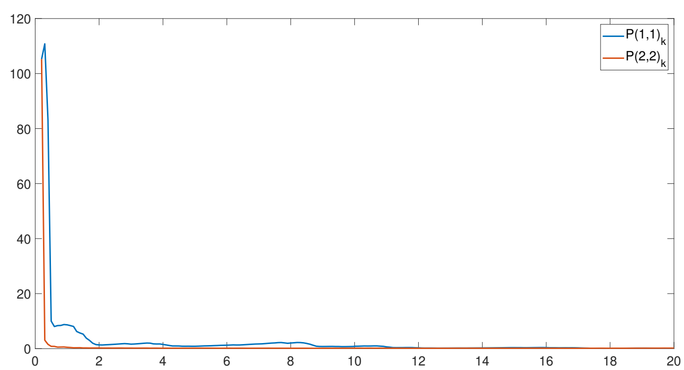
$$a_{k+1}^T = \left[\begin{array}{cc} -y_k & u_k \end{array} \right], \quad b_{k+1} = \left[\begin{array}{c} b_k \\ y_{k+1} \end{array} \right]$$

Przy warunkach początkowych $\theta_0 = [1, 1]$ (domyślne wartości bloku Simulink) oraz $P_0 = 10I$. Wyniki estymacji przedstawione są na Rysunku 2. Jako sygnał wymuszający przyjmujemy szum, aby poprawić numeryczne uwarunkowanie problemu estymacji parametrów. Ich wartość końcowa równa jest

$$\theta_{fin} = \begin{bmatrix} -0.8854 \\ 0.2015 \end{bmatrix} \tag{8}$$



Rysunek 2: Zidentyfikowane parametry metodą rekurencyjną



Rysunek 3: Wartości na diagonalnej macierzy P

Jak można zauważyć na Rysunku 3, macierz P_k maleje dość szybko, a ma ona bezpośredni wpływ na wyznaczanie macierzy wzmocnień K. Stąd, po pewny czasie algorytm przzestaje prawidłowo reagować na błąd estymacji. Jest to szczególnie ważne w przypadku układów niestacjonarnych, czyli przy estymacji parametru, który zmienia się w czasie.

3 Identyfikacja parametrów wolnozmiennych

Przy identyfikacji parametrów układów niestacjonarnych należy więc zaradzić problemowi ze zbyt malejącymi wartościami macierzy P_k. Można tego dokonać na kilka sposobów. Jednym z nich jest resetowanie co określony czas macierzy P_k do jej wartości początkowej (w bloku Simulinkowym jest to opcja External Reset, po skonfigurowaniu której pojawi się dodatkowe wejście do inicjowania takiego resetu). Innym sposobem jest wprowadzenie specjalnego współczynnika zapominania (w bloku Simulinkowym w zakładce Algorithm and Block Options opcja Forgetting Factor). Algorytm RLS ze współczynnikiem zapominania ma następującą formę.

$$
\begin{aligned}
P_{k+1} &= \frac{P_k}{\lambda} - \frac{P_k a_{k+1} a_{k+1}^T P_k}{\lambda[\lambda + a_{k+1}^T P_k a_{k+1}]} && (9)\\
\epsilon_{k+1} &= y_{k+1} - a_{k+1}^T \hat{x}_k && (10)\\
K_{k+1} &= P_{k+1} a_{k+1} && (11)\\
\hat{x}_{k+1} &= \hat{x_k} + K_{k+1}\epsilon_{k+1}. && (12)
\end{aligned}
$$

Współczynnik λ zazwyczaj dobiera się z zakresu $0.95 - 0.98$, ale zachęcam tutaj do eksperymentów.

3.1 Przykład identyfikacji obiektu dyskretnego o zmiennych parametrach

Układ, który będziemy identyfikować dany jest następującą transmitancją (oczywiście założymy nieznajomość jego parametrów)

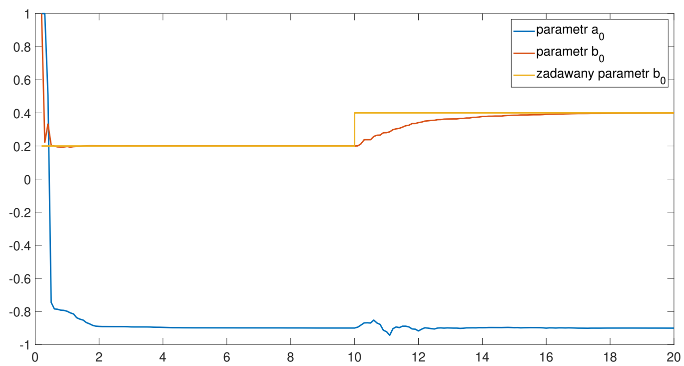
$$G(z) = \frac{b_0}{z - 0.9},$$

gdzie b_0 będzie parametrem zmiennym w czasie, który w chwili $t = 10sek$ zmienia wartość z 0.2 na 0.4. Jako sygnał wymuszający przyjmujemy szum, aby poprawić numeryczne uwarunkowanie problemu estymacji parametrów. Współczynnik zapominania określamy na $\lambda = 0.95$. Wyniki przedstawione są na rysunkach 4 i 5. Jak można na nich zauważyć estymowany zmienny parametr dość szybko osiąga porządaną wartość.

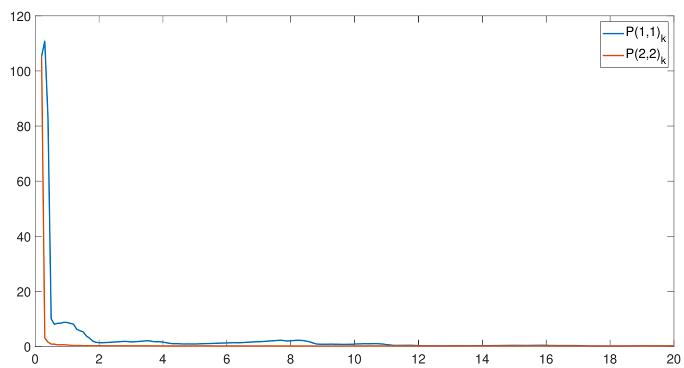
3.2 Przykład identyfikacji obiektu ciągłego o zmiennych parametrach

Układ, który będziemy identyfikować dany jest następującą transmitancją (oczywiście założymy nieznajomość jego parametrów)

$$G(s) = \frac{b_0}{s + 0.9},$$



Rysunek 4: Zidentyfikowane parametry metodą rekurencyjną

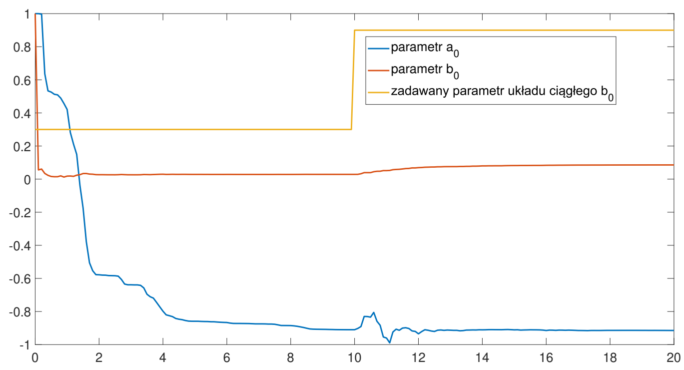


Rysunek 5: Wartości na diagonalnej macierzy P

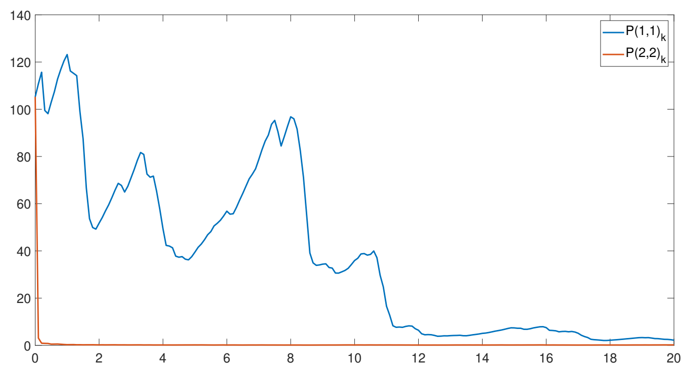
gdzie b_0 będzie parametrem zmiennym w czasie, który w chwili $t = 10sek$ zmienia wartość z 0.3 na 0.9. Jako sygnał wymuszający przyjmujemy szum, aby poprawić numeryczne uwarunkowanie problemu estymacji parametrów. Współczynnik zapominania określamy na $\lambda = 0.95$. Wyniki przedstawione są na rysunkach 6 i 7. Przy interpretacji wyników należy wziąć pod uwagę to, że identyfikujemy parametry modelu dyskretnego z danych pochodzących z układu ciągłego. Powoduje to, że powinniśmy otrzymane wyniki porównywać z parametrami otrzymanymi z dyskretyzacji układu ciągłego. Parametry dyskretyzacji ZOH dla układu przed przełączeniem to $b_0 = 0.02869$, $a_0 = -0.9139$, a po przełączeniu $b_0 = 0.0.08607$, $a_0 = -0.9139$. Wynik końcowy estymacji to

$$\theta_{fin} = \begin{bmatrix} -0.9146 \\ 0.0857 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Jak można zauważyć otrzymane parametry bardzo dobrze odpowiadają parametrom układu dyskretnego po przełączeniu.



Rysunek 6: Zidentyfikowane parametry metodą rekurencyjną



Rysunek 7: Wartości na diagonalnej macierzy P

4 Plan ćwiczenia

- Przeprowadzić identyfikację on-line obiektów dyskretnych oraz ciągłych (otrzymując dyskretny model układu ciągłego).

  Proponowane układy dyskretne:

$$G_1(z) = \frac{0.1z + 0.2}{z^2 + 0.3z + 0.4}$$

$$G_2(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

Przebadać wpływ sygnału wymuszającego oraz zakłóceń układu (na przykład zakłócenie wyjścia układu) na wyniki estymacji.

- Przeprowadzić dla tych samych układów badania przy zmienności ich parametrów. Dla przykładu można rozważyć dwa przypadki, pierwszy można przyjąć zmienność parametru a_0 lub a_1, a w drugim przypadku przyjąć zmienność parametru b_1 bądź b_0. Badanie przeprowadzić dla różnego sposobu zmiany rzędu oraz różnych wartościach współczynnika zapominania (zwrócić uwagę czy macierz P_k nie rozbiega się). Zbadać wpływ zaszumienia układu na otrzymywane wyniki. Można także (nie jest to wymagane) wypróbować metodę resetu macierzy P_k.

4.1 Sprawozdanie

W sprawozdaniu z ćwiczenia przedstawić przede wszystkim wnioski jakie nasunęły się podczas przeprowadzania ćwiczenia, można je zilustrować szeregiem otrzymanych wyników.