Ćwiczenie 3. Identyfikacja off-line

Dominik Sierociuk
Politechnika Warszawska
Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej

OKNO, Modelowanie i Identyfikacja Systemów Dynamicznych

1 Wprowadzenie

W ćwiczeniu tym zostanie przedstawiona metoda identyfikacji off-line z użyciem algorytmu najmniejszych kwadratów (ang. Least-Squares (LS) [Rozdział 3 skryptu wraz z przykładem 4.1 i Zadaniem 4.9 z Rozdziału 4]). W metodzie off-line zakładamy, że mamy już zebrane dane z obiektu identyfikacj, czyli odpowiednie próbki sygnału wejściowego i wyjściowego oraz znamy strukturę dynamiki identyfikowanego układu (głównie jego rząd, który definiuje ilość przesunięć w opisie dynamiki dyskretnej). Dodatkowym zagadnieniem, poruszanym w tym ćwiczeniu, będzie wpływ typu sygnału wymuszającego, jego zaszumienia czy okresu próbkowania, na numeryczne uwarunkowanie układu równań (odczytywane przy pomocy wartości szczególnych otrzymywanych rozkładu SVD [patrz podrozdział 3.1.4]).

Weźmy układ dynamiczny dany następującą transmitancją:

$$G(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \tag{1}$$

jest to układ trzeciego rzędu, ale w ogólności oczywiście może być dowolnego rzędu. Następnie przeprowadzamy eksperyment identyfikacyjny polegający na zebraniu próbek sygnału wymuszającego i odpowiadającego mu sygnału odpowiedzi (odpowiedniu u_k i y_k dla $k = 0, \ldots, N$).

Następnie, na podstawie transmitancji (1) (przechodząc z dziedziny operatora Z do dziedziny czasu, poprzez twierdzenie o przesunięciu, kóre mówi, że $Z^{-1}[zY(z)] = y_{k+1}$ (przy zerowych warunkach początkowych)) formujemy równanie różnicowe:

$$b_2 u_{k+2} + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k = y_{k+3} + a_2 y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k \tag{2}$$

co możemy zapisać w następującej formie

$$y_{k+3} = -a_2 y_{k+2} - a_1 y_{k+1} - a_0 y_k + b_2 u_{k+2} + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k \tag{3}$$

równanie to musi być spełnione dla kolejnych chwil czasowych i kolejnych danych z pomiarów. Co daje nam zazwyczaj nadokreślony układ równań dla poszczególnych chwil pomiarowych:

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_2 & -y_1 & -y_0 & u_2 & u_1 & u_0 \\ -y_3 & -y_2 & -y_1 & u_3 & u_2 & u_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y_{N-2} & -y_{N-1} & -y_N & u_{N-2} & u_{N-3} & u_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

co możemy w skrócie zapisać jako

$$Y = \Phi\theta, \tag{4}$$

gdzie:

$$Y = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y_2 & -y_1 & -y_0 & u_2 & u_1 & u_0 \\ -y_3 & -y_2 & -y_1 & u_3 & u_2 & u_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y_{N-2} & -y_{N-1} & -y_N & u_{N-2} & u_{N-3} & u_N \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

co możemy rozwiązać używając pseudoinwersji

$$\theta = \Phi^{\dagger} Y \tag{5}$$

2 Przykład

Układ, który będziemy identyfikować dany jest następującą transmitancją (oczywiście założymy nieznajomość jego parametrów)

$$G(z) = \frac{0.1z + 0.2}{z^2 + 0.3z + 0.4}$$

zakładamy więc następujący model do identyfikacji parametrów

$$G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

daje on następujące równanie różnicowe

$$y_{k+2} = \varphi_{k+2}\theta$$

gdzie

$$\varphi_{k+2} = \begin{bmatrix} u_{k+1} & u_k & -y_{k+1} & -y_k \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{k+2} \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{k+1} & u_k & -y_{k+1} & -y_k \\ u_k & u_{k-1} & -y_k & -y_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & u_0 & -y_1 & -y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

co możemy zapisać jako

$$Y_{k+2} = \Phi_{k+2}\theta \tag{6}$$

co możemy rozwiązać używając pseudoinwersji

$$\theta = \Phi^{\dagger}_{k+2} Y_{k+2}. \tag{7}$$

Dla wymuszenia w postaci funkcji skoku jednostkowego $u_k = 1$ dla wszystkich punktów czasowych $k = 0, 1, \ldots$ otrzymamy następujący wynik:

$$\theta = \begin{bmatrix} 0.1500 \\ 0.1500 \\ -0.3000 \\ 0.4000 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Analizując otrzymany wynik zauważymy, że parametry a_1 oraz a_0 zostały poprawnie zidentyfikowane, natomiast parametry licznika transmitancji b_1 oraz b_0 są raczej odległe od idealnych (i to przy idealnym układzie dyskretnym bez nieliniowości czy różnic dynamiki oraz idealnych danych bez zakłóceń). Na uwagę zasługuje fakt, że suma zidentyfikowanych i idealnych parametrów jest ta sama. Sprawdźmy więc czy utworzony w ten sposób układ równań jest dobrze uwarunkowany (czyli zerknijmy na wyniki rozkładu SVD, a dokładnie zobaczmy jakie ten rozkład podał nam wartości szczególne). Wartości szczególne otrzymane w wyniku rozkładu SVD macierzy Φ (uszeregowane malejąco) są następujące:

$$\begin{bmatrix} 7.8812 \\ 0.3529 \\ 0.1488 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Po pierwsze, widzimy, że mamy jedną wartość równą zero, co oznacza, że macierz nie jest pełnego rzędu kolumnowego (ilość niezerowych wartości szczególnych jest rzędem macierzy). To, że macierz nie jest pełengo rzędu kolumnowego oznacza, że któraś z jej kolumn liniowo zależy od innej kolumny (jest kombinacją liniową tej kolumny). W takiej sytuacji nie istnieje jednoznaczne rozwiązanie takiego układu równań, jest to cała rodzina rozwiązań (szczegóły w Skrypcie).

Przyjrzyjmy się więc jeszcze raz zbudowanej macierzy i zadanemu sygnałowi wymuszenia. Sygnałem wymuszenia jest wartość stała, niezależna od przesunięcia sygnału w czasie, co oznacza, że pomiędzy pierwszą i drugą kolumną otrzymaną z próbek sygnału wymuszającego nie mamy żadnej różnicy. Przy tak zdefiniowanej formie tych kolumn, mamy do czynienia z dwoma takimi samymi kolumnami. Nie istnieje więc algebraiczna możliwość rozróżnienia parametru b_1 od b_0, stąd pseudoodwrotność macierzy użyta do rozwiązania tego układu równań (minimalizująca błąd średniokwadratowy) dała w wyniku równy podział średniej wartości obu tych parametrów.

Możemy nieco pomóc przy rozwiązaniu tego problemu dodając równanie dla chwili początkowej $k = 1$ (przy założeniu $y_k = u_k = 0$ dla $k \leqslant -1$).

$$\begin{bmatrix} y_{k+2} \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{k+1} & u_k & -y_{k+1} & -y_k \\ u_k & u_{k-1} & -y_k & -y_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & u_0 & -y_1 & -y_0 \\ u_0 & 0 & -y_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

Wtedy wartości singularne macierzy Φ są następujące:

$$\begin{bmatrix} 7.9111 \\ 0.7334 \\ 0.3406 \\ 0.1481 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Jak widać dodanie tego równania sprawiło, że dwie kolumny powstałe z przesuniętych próbek wejścia przestały być liniowo zależne (sprawiło to zero w miejscu u_{-1}). Sprawiło to także, iż macierz Φ stała się pełnego rzędu kolumnowego, co skutkuje także tym, że układ ma jedno, unikalne rozwiązanie.

$$\theta = \begin{bmatrix} 0.1000 \\ 0.2000 \\ -0.3000 \\ 0.4000 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Rozwiązanie to, jak widać, jest dokładnie równe parametrom idealnym, jednakże tak idealnie jest tylko dla wyidealizowanych danych. Gdyż, nawet niewielkie zakłócenia pierwszej próbki wymuszenia będą miały znaczący wpływ na wynik. Można temu zaradzić poprzez zastosowanie innego sygnału wymuszającego, szczególnie efektywnym będzie sygnał szumu. Ogólnie, dobór sygnału wymuszającego dla procesu identyfikacji jest zadaniem o kluczowym znaczeniu dla otrzymywanych wyników. Na przykład można by się spodziewać, że sygnał sinusoidalny bardzo dobrze by się do tej roli nadawał, aczkolwiek, biorąc pod uwagę wymóg szerokiego pobudzenia układu (tak aby wszystkie mody odpowiedzi były w niej zawarte) już takim dobrym wyborem nie jest. W stanie ustalonym odpowiedź na sygnał sinusoidalny będzie zawiwerć informację o wzmocnieniu i przesunięciu fazowym tylko dla jednej częstotliwości, czyli określając tylko jeden punkt charakterystyki częstotliwościowej, a nie zawierając informacji o pozostałych punktach, pozostałej dynamice. Jedynie na podstawie odpowiedzi przejściowej, można otrzymać poprawne wyniki.

3 Plan ćwiczenia

Przeprowadzić identyfikację off-line obiektów dyskretnych oraz ciągłych (otrzymując dyskretny model układu ciągłego).

Proponowane układy dyskretne:

$$G_1(z) = \frac{0.1z + 0.2}{z^2 + 0.3z + 0.4}$$

$$G_2(z) = \frac{0.1z^2 + 0.2z + 0.3}{z^3 + 0.3z^2 + 0.4z + 0.2}$$

Proponowane układy ciągłe:

$$G_3(s) = \frac{1}{s + 2}$$

$$G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 3}$$

$$G_5(s) = \frac{s + 2}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Przeprowadzić walidację otrzymanych modeli dyskretnych sprawdzając, czy odpowiedź zidentyfikowanego modelu będzie odpowiadała odpowiedzi danego układu ciągłego.

Zagadnienia do analizy:

1. przydatności rozkładu SVD (wartości szczególnych) na ocenę otrzymanych wyników identyfikacji
2. wpływ typu sygnału wymuszenia na uwarunkowanie numeryczne problemu identyfikacji
3. wpływ częstotliwości próbkowania na otrzymane rezultaty identyfikacji
4. dla identyfikacji układów ciągłych porównań zidentyfikowane parametry modelu dyskretnego z parametrami otrzymanymi przez dyskretyzację danego układu ciągłego wybranymi metodami.

3.1 Sprawozdanie

W sprawozdaniu z ćwiczenia przedstawić przede wszystkim wnioski jakie nasunęły się podczas przeprowadzania ćwiczenia, można je zilustrować szeregiem otrzymanych wyników.