

1 Plan ćwiczenia.

a) Przeprowadzić identyfikację dla przynajmniej trzech równań prostej, trzech parabol i trzech równań trzeciego rzędu. Przeanalizować wpływ poziomu zakłóceń i ilości danych (liczby punktów czy wielkości przyrostu argumentu) na otrzymany wynik estymacji oraz porównanie błędu estymacji i pomiarowego.

b) Kondensator naładowany jest do pewnego napięcia U_0 , po czym rozładowuje się poprzez podłączony w chwili $t = 0$ rezystor. Napięcie na kondensatorze U_c jest mierzone z dokładnością do 5V w kolejnych momentach. Dane z pomiarów zawarte są w instrukcji do ćwiczenia. Wiadomo, że postać analityczna odpowiedzi dana jest następująco:

$$U_c(t) = U_0 * e^{(-at)}$$

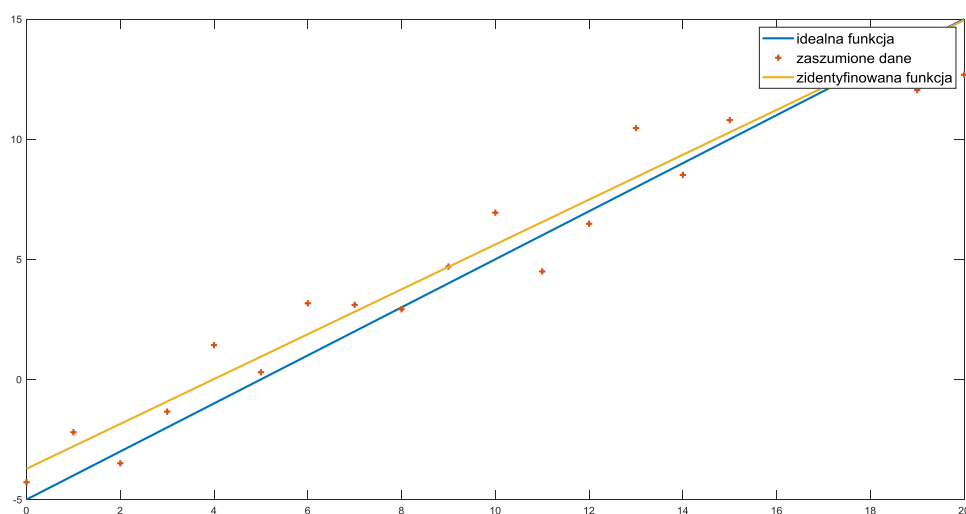
Przeprowadzić identyfikację parametrów U_0 i a .

c) W wyniku badań w tunelu aerodynamicznym otrzymano dla modelu samolotu dane o zależności kąta odchylenia steru δ gwarantującego równowagę siły nośnej i siły ciężenia (samolot będzie leciał trajektorią prostoliniową, horyzontalną) przy danej prędkości v strumienia powietrza. Dane z pomiarów zawarte są w instrukcji do ćwiczenia. Wiadomo, że krzywa balansowania określona jest zależnością

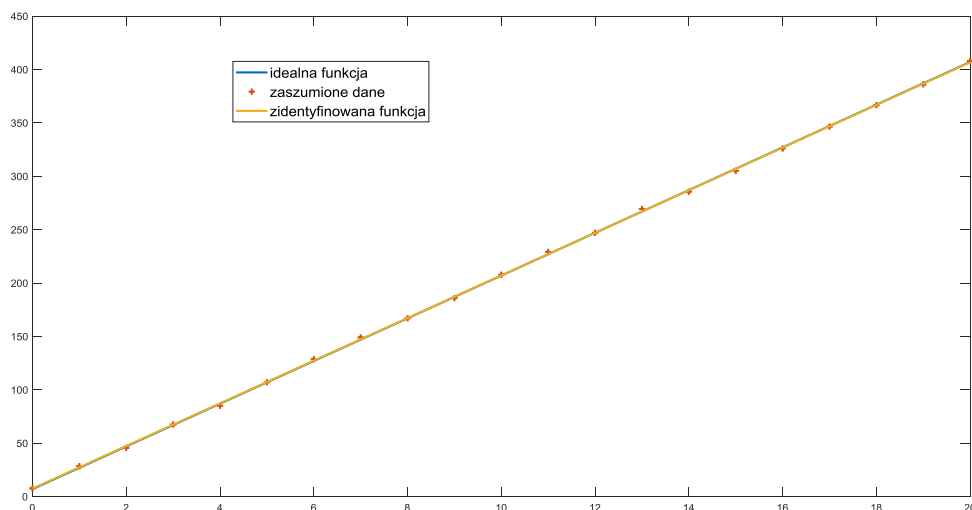
$$\delta = a_0 + a_1/v^2$$

Należy zidentyfikować parametry a_0 i a_1 , pamiętając o przeliczeniu minut kątowych na stopnie oraz o uwzględnieniu wielokrotności danych pomiarów.

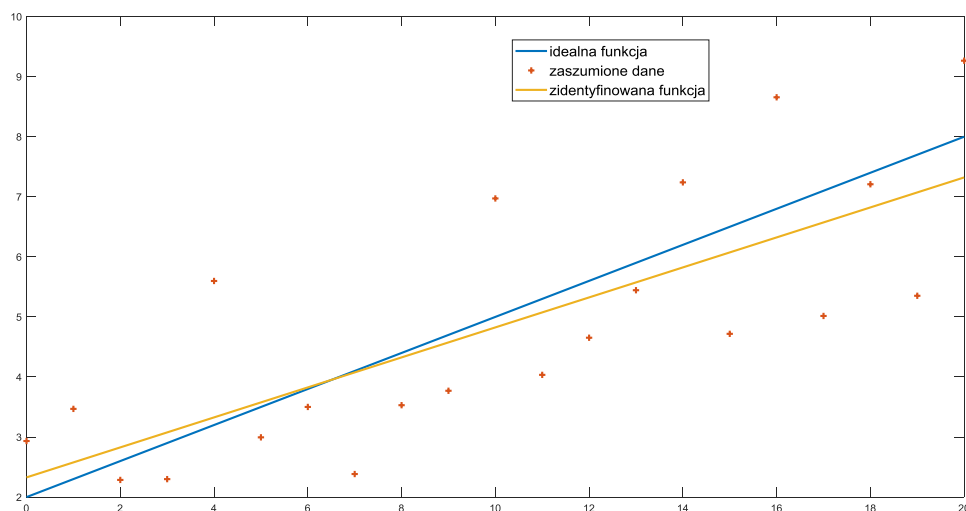
2 Identyfikacja dla równań prostych, parabol i równań trzeciego rzędu.



Rysunek 1: Wynik identyfikacji prostej danej równaniem $y=x-5$; uzyskane parametry: $a = 0.934$; $b = -3.72$; błąd estymacji = 38.6; błąd danych = 49.99



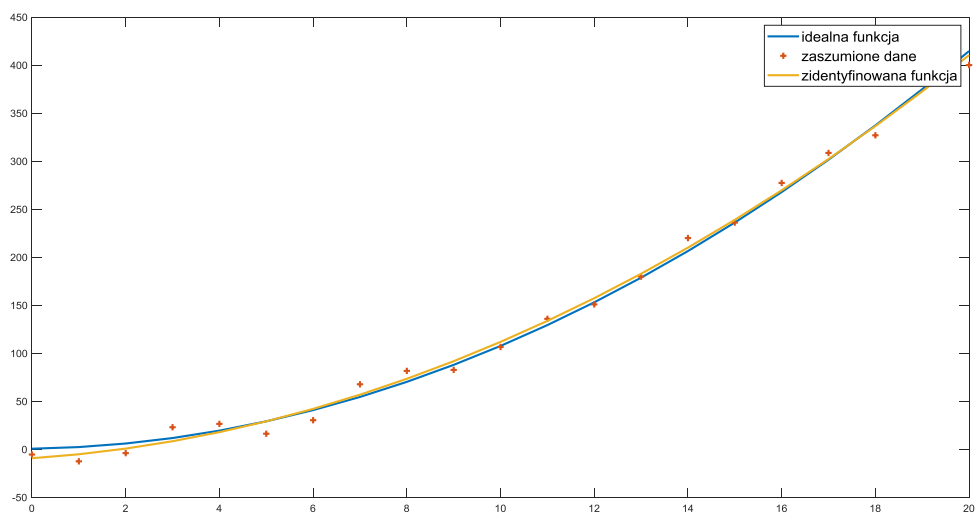
Rysunek 2: Wynik identyfikacji prostej danej równaniem $y=20x+7$; uzyskane parametry:
 $a = 19.96$; $b=7.52$; błąd estymacji = 35.38; błąd danych = 36.98



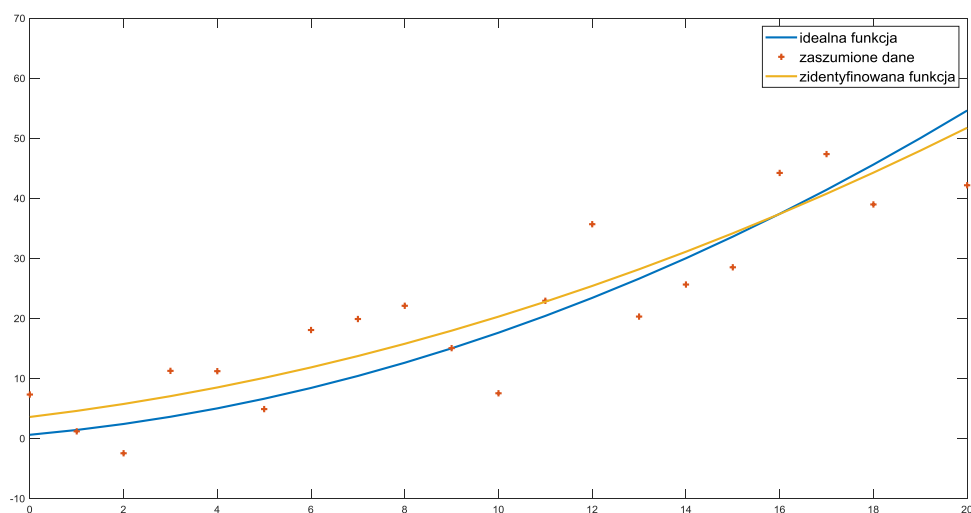
Rysunek 3: Wynik identyfikacji prostej danej równaniem $y=0.3x+2$; uzyskane parametry:
 $a = 0.25$; $b=2.33$; błąd estymacji = 36.57; błąd danych = 39.15

Wnioski dla identyfikacji prostej: Przy zwiększeniu parametru „a” prostej mniej widoczny jest rozrzut wartości spowodowany zakłóceniami. Jest tak ponieważ wartość zakłóceń była stała (gdyby zakłócenia były względne do wartości funkcji, to nie byłoby to zaobserwowane). Najważniejszym wnioskiem jest: zwiększenie ilości danych pozwala na uzyskanie parametrów bardziej zbliżonych do idealnych.

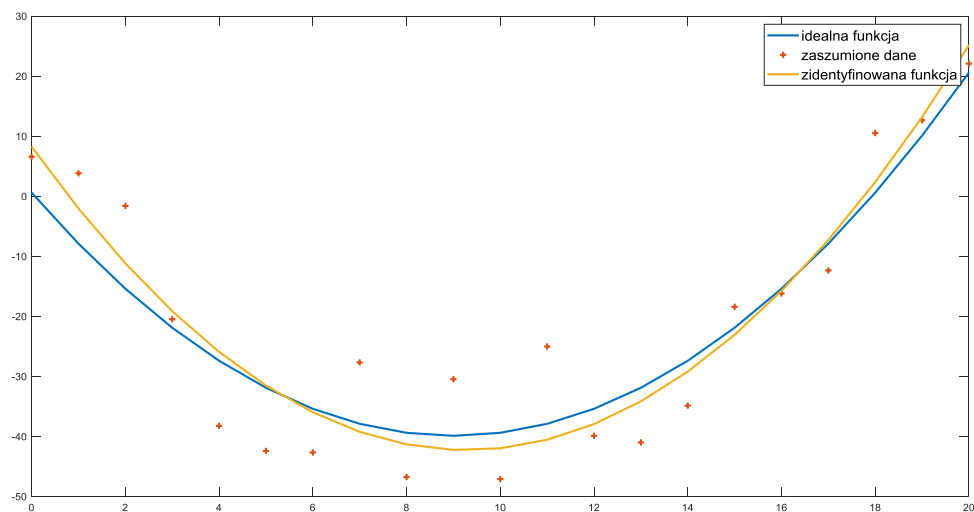
Przy zwiększaniu ilości danych zwiększają się błędy estymacji i danych. Jest to spowodowane większą ilością danych, co zwiększa liczbę błędów. W celu lepszego oceniania identyfikacji należy posługiwać się błędami średnimi (należy wartość błędów podzielić przez ilość próbek). W każdym przypadku błąd estymacji jest mniejszy od błędu danych. Im wartość błędu estymacji jest bardziej zbliżona do błędu danych, tym prosta zidentyfikowana jest bardziej podobna do prostej idealnej. Zmniejszenie wartości zakłóceń powoduje spadek wartości błędów estymacji i danych – pokazuje to, że w celu lepszej identyfikacji należy uwzględniać błędy stałe (modyfikować dane w zależności od tego błędu).



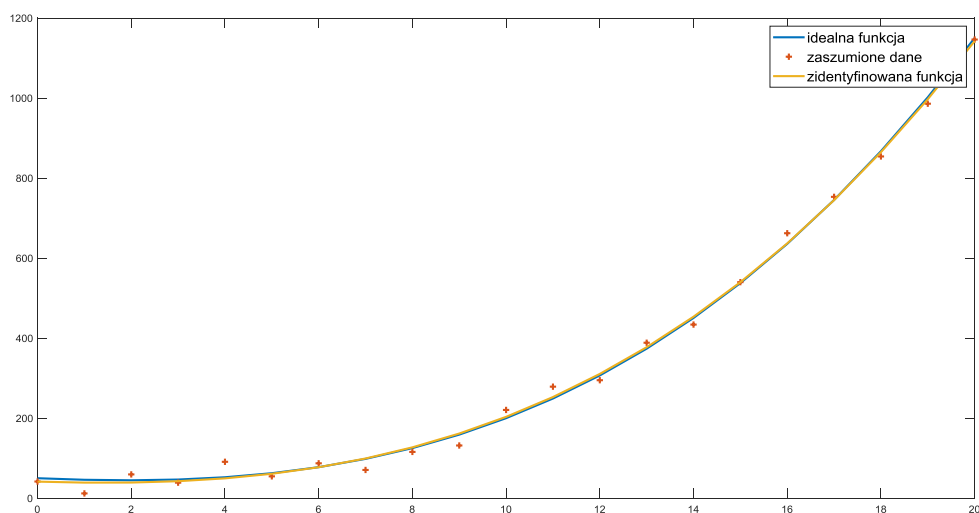
Rysunek 4: Wynik identyfikacji paraboli danej równaniem $y = (x * x) + 0.7 * x + 0.6$; uzyskane parametry: $a = 0.887$; $b = 3.24$; $c = -9.32$; błąd estymacji = 1562; błąd danych = 1910



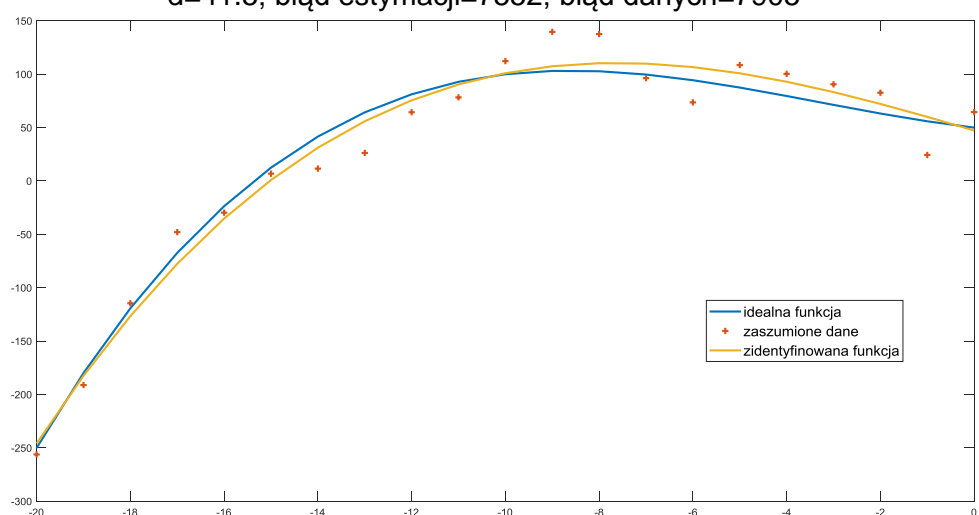
Rysunek 5: Wynik identyfikacji paraboli danej równaniem $y = 0.1 * (x * x) + 0.7 * x + 0.6$; uzyskane parametry: $a = 0.0737$; $b = 0.934$; $c = 3.57$; błąd estymacji = 1045; błąd danych = 1187



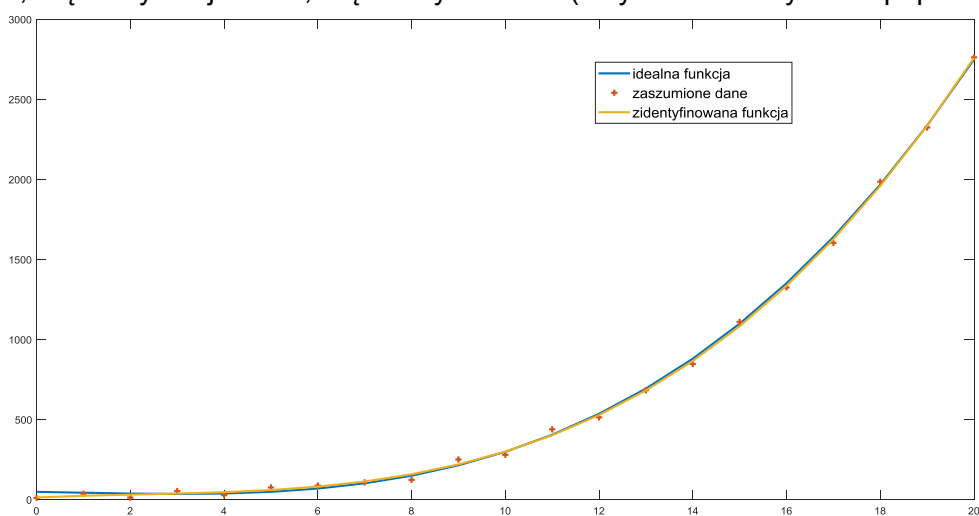
Rysunek 6: Wynik identyfikacji paraboli danej równaniem $y = 0.5 * (x * x) - 9 * x + 0.6$; uzyskane parametry: $a = 0.587$; $b = -10.9$; $c = 8.27$; błąd estymacji = 1221; błąd danych = 1418



Rysunek 7: Wynik identyfikacji wykresu r. trzeciego rzędu danego równaniem:
 $y = 0.1 * (x^3) + 1 * (x^2) - 5 * x + 50$; uzyskane parametry: $a=0.096$; $b=1.02$; $c=-3.56$;
 $d=41.5$; błąd estymacji=7552; błąd danych=7905



Rysunek 8: Wynik identyfikacji wykresu r. trzeciego rzędu danego równaniem:
 $y = 0.1 * (x^3) + 1 * (x^2) - 5 * x + 50$; uzyskane parametry: $a=0.062$; $b=-0.14$; $c=-12.96$;
 $d=47.3$; błąd estymacji=7980; błąd danych=9905 (inny zakres danych niż poprzednio)



Rysunek 9: Wynik identyfikacji wykresu r. trzeciego rzędu danego równaniem:
 $y = 0.4 * (x^3) - 1 * (x^2) - 5 * x + 50$; uzyskane parametry: $a=0.466$; $b=-3.12$; $c=13.2$;
 $d=14.8$; błąd estymacji=8158; błąd danych=11615

Wnioski: Zwiększenie ilości danych pozwala uzyskać estymowaną funkcję o parametrach bardziej zbliżonych do oryginału (ważne też jest z jakiego zakresu są to dane). Większe zakłócenia powodują większe rozbieżności w porównaniu do funkcji idealnej. Istotne jest też w których miejscu wykresu były pobrane dane. Jeśli większość danych jest z dala od punktów przegięcia, to najlepiej odwzorowany jest parametr przy wielomianie najwyższego stopnia (ponieważ wtedy ten składnik ma największy wpływ na wartość funkcji). Parametry niższego stopnia mogą znacznie odbiegać od idealnych. Jeśli w danych będą wszystkie punkty przegięcia i ich pewne otoczenie, to identyfikacja tą metodą da zadowalające wyniki. Większość wniosków z identyfikacji prostej będzie można zastosować do wielomianów drugiego i trzeciego stopnia, dlatego nie będą one powtarzane.

3 Identyfikacja parametrów rozładowania kondensatora.

Postać analityczna odpowiedzi rozładowania kondensatora dana jest równaniem:

$$U_c(t) = U_o * e^{-at}$$

Równanie zostaje przekształcone do postaci równania liniowego (widać od początku, że jest to możliwe), aby móc zastosować metodę regresji liniowej:

$$\ln(U_c(t)) = -at + \ln(U_o)$$

Macierze dla procesu identyfikacji będą miały postać:

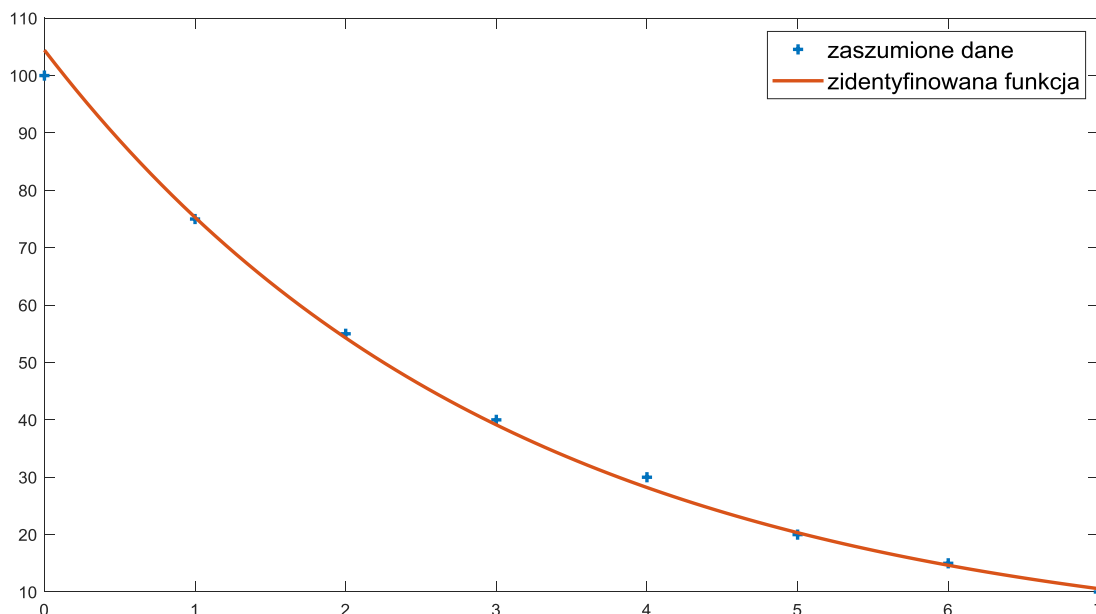
$$\theta = \begin{bmatrix} a \\ b = \ln(U_o) \end{bmatrix}, \quad \varphi_i^T = [-t_i \ 1], \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \ln(U_c(t_1)) \\ \vdots \\ \ln(U_c(t_N)) \end{bmatrix}$$

Korzystając z programu MATLAB przeprowadzono identyfikację modelu i otrzymano następujące wyniki:

$$a = 0,0327$$

$$U_o = 104,4$$

Błąd estymacji wyniósł: 24,84



Rysunek 10: Wyniki identyfikacji rozładowania kondensatora

Wnioski: Należy zastanowić się nad sposobem wyznaczenia parametru U_0 . Być może lepiej byłoby wyznaczyć go na podstawie fizycznych zależności. Mianowicie w momencie $t=0$ (czyli gdy kondensator jest naładowany w „pełni”) czynnik $e^{(-at)}$ przyjmuje wartość 1, i zmierzona wartość U_c odpowiada wartości U_0 . Nie musi być to prawdziwe w 100%, ponieważ wartość ta też musiała być zmierzona z błędem pomiarowym (ale być może ten błąd jest znacznie mniejszy niż podczas pomiarów gdy U_c się zmienia). Bardziej optymalnym sposobem wyznaczenia U_0 mógłby być szereg pomiarów wartości napięcia, gdy kondensator jest ciągle naładowany, i na podstawie tego obliczyć wartość średnią. Przy przyjęciu wartości $U_0=100$ i przeprowadzeniu identyfikacji dla zmodyfikowanego modelu, parametr „a” wyniósł 0,319, a błąd estymacji 16,92, co może sugerować że ten sposób pozwala lepiej zidentyfikować model. Dodatkowo można stwierdzić, że metoda regresji liniowej pozwala identyfikować z powodzeniem modele z zależnościami inne niż wielomianowe (o ile jest możliwość sprowadzenia modelu do zależności liniowych).

4 Identyfikacja parametrów modelu krzywej balansowania.

W poniższej tabeli przedstawiono wyniki pomiarów z przeliczeniem minut stopniowych na stopnie (zastosowano przelicznik $1' = (1/60)^\circ$):

V [m/s]	δ [°]	n
80	-3,733	8
90	-2,967	12
100	-2,267	11
110	-1,65	9
120	-1,35	14
140	-0,633	6
160	-0,117	9
180	0,167	12
200	0,583	10

Krzywa balansowania określona jest równaniem:

$$\delta = a_0 + \frac{a_1}{V^2}$$

Macierze dla procesu identyfikacji będą miały postać:

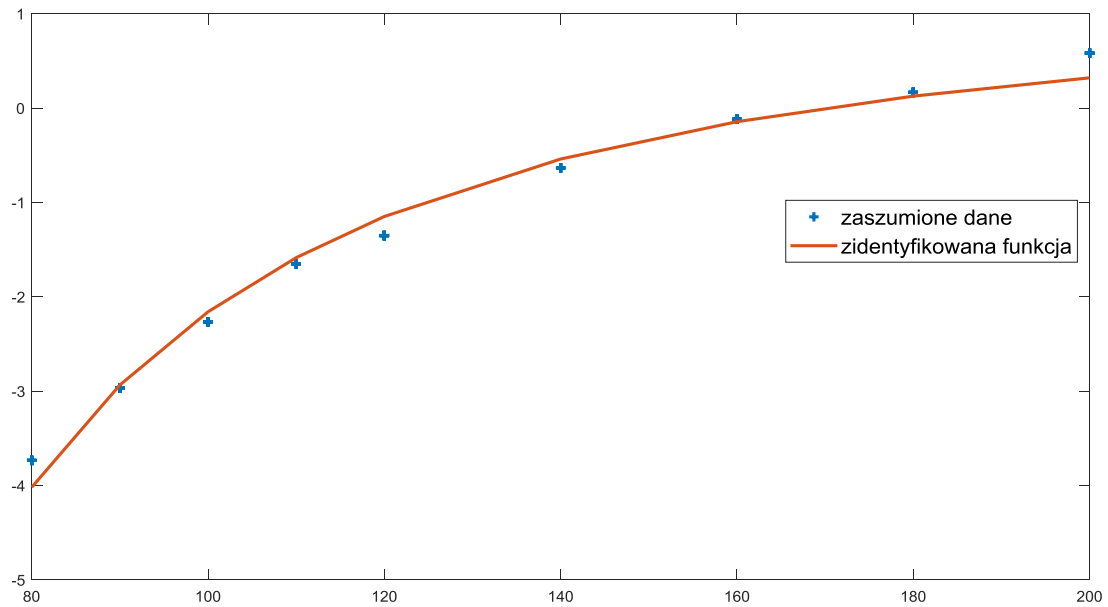
$$\theta = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_i^T = \left[1 \quad \frac{1}{V^2} \right], \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_N \end{bmatrix}$$

Korzystając z programu MATLAB przeprowadzono identyfikację modelu i otrzymano następujące wyniki:

$$a_0 = 1,148$$

$$a_1 = -33059$$

Błąd estymacji wyniósł: 2,165



Rysunek 10: Wyniki identyfikacji parametrów modelu krzywej balansowania

Wnioski:

Uwzględnienie wielokrotności danych pomiarowych wpływa na proces identyfikacji funkcji. Wpływ ten nie jest duży (chyba, że będą znaczne różnice w ilości danych pomiarowych).