

1 Plan ćwiczenia.

- Przeprowadzić badanie dyskretyzacji układu będącego na granicy stabilności trzema metodami aproksymacji pochodnej. Układem może być na przykład: $1/(s^2+1)$. Badanie przeprowadzić także dla różnych częstotliwości próbkowania.

- Przeprowadzić badanie dyskretyzacji układu oscylacyjnego trzema metodami aproksymacji pochodnej. Układem może być na przykład $1/(s^2+s+1)$. Badanie przeprowadzić dla różnych częstotliwości próbkowania, porównać odpowiedzi skokowe oraz charakterystyki częstotliwościowe. Dla wybranej metody przeprowadzić ręcznie obliczenia przynajmniej 5 kroków odpowiedzi na zadany sygnał wymuszający, w oparciu o otrzymane równanie różnicowe.

- Przeprowadzić badanie wybranych układów pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu metodami odpowiednika odpowiedzi impulsowej, skokowej i liniowo-narastającej. Przykładowe układy do badania to:

$$1 / (s+3),$$

$$(s+1) / (s^2+2s+3),$$

$$(s+2) / (s^3+2s+s+1).$$

Badanie przeprowadzić dla różnych typów sygnału wymuszającego oraz różnej częstotliwości próbkowania.

2 Badanie dyskretyzacji układu będącego na granicy stabilności.

Przyjęto następujący układ do badania: $\frac{1}{s^2+1}$, który jest na granicy stabilności (posiada pierwiastki r. charakterystycznego o zerowej części rzeczywistej).

Dla różnicy wprzód otrzymano następującą transmitancję odpowiednika dyskretnego:

$$G_1(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T}\right)^2 + 1} = \frac{T^2}{z^2 - 2z + 1 + T^2}$$

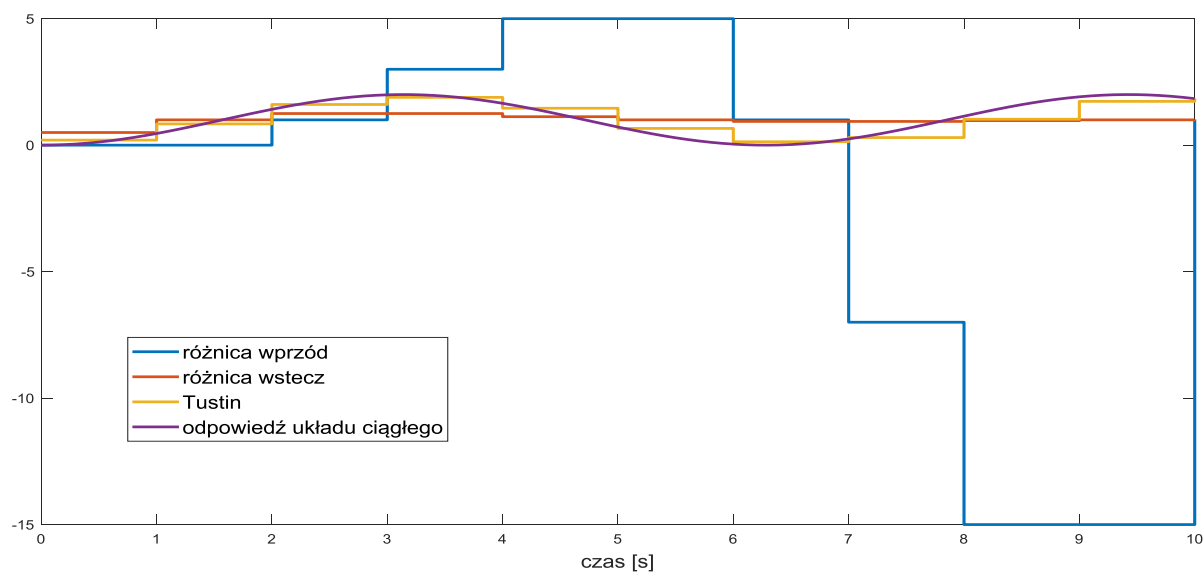
Dla różnicy wstecz otrzymano następującą transmitancję odpowiednika dyskretnego:

$$G_2(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{Tz}\right)^2 + 1} = \frac{T^2 z^2}{(T^2 + 1)z^2 - 2z + 1}$$

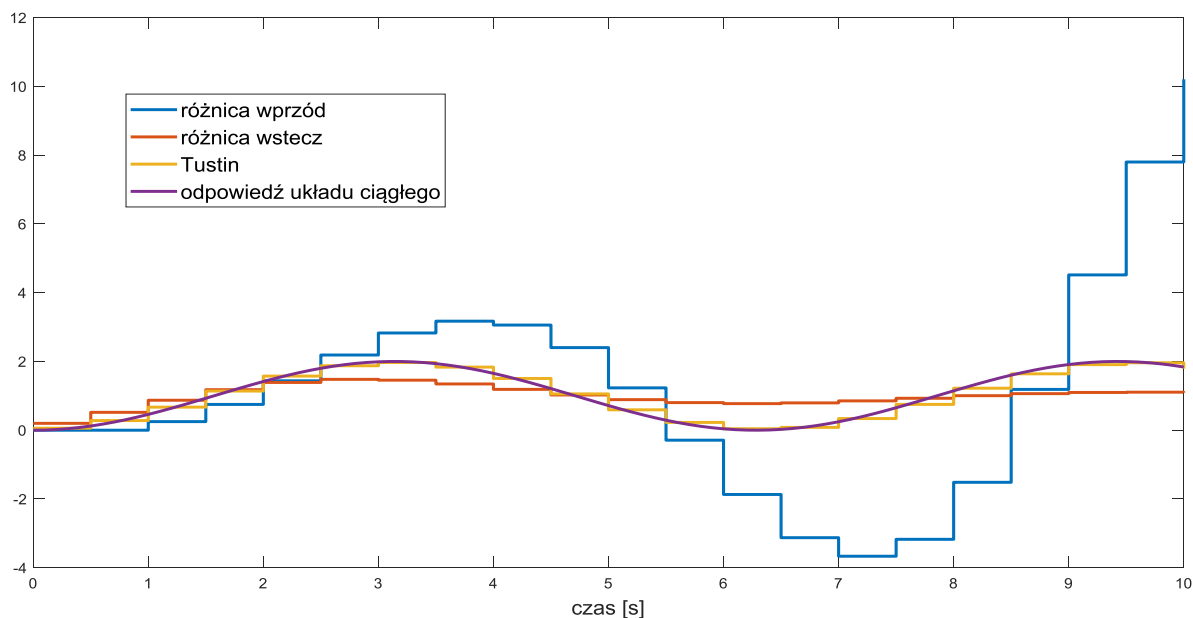
Dla aproksymacji Tustina otrzymano następującą transmitancję odpowiednika dyskretnego:

$$G_3(z) = \frac{1}{\left(\frac{2z-1}{Tz+1}\right)^2 + 1} = \frac{T^2 z^2 + 2 * T^2 z + T^2}{(4 + T^2)z^2 + (2 * T^2 - 8)z + 4 + T^2}$$

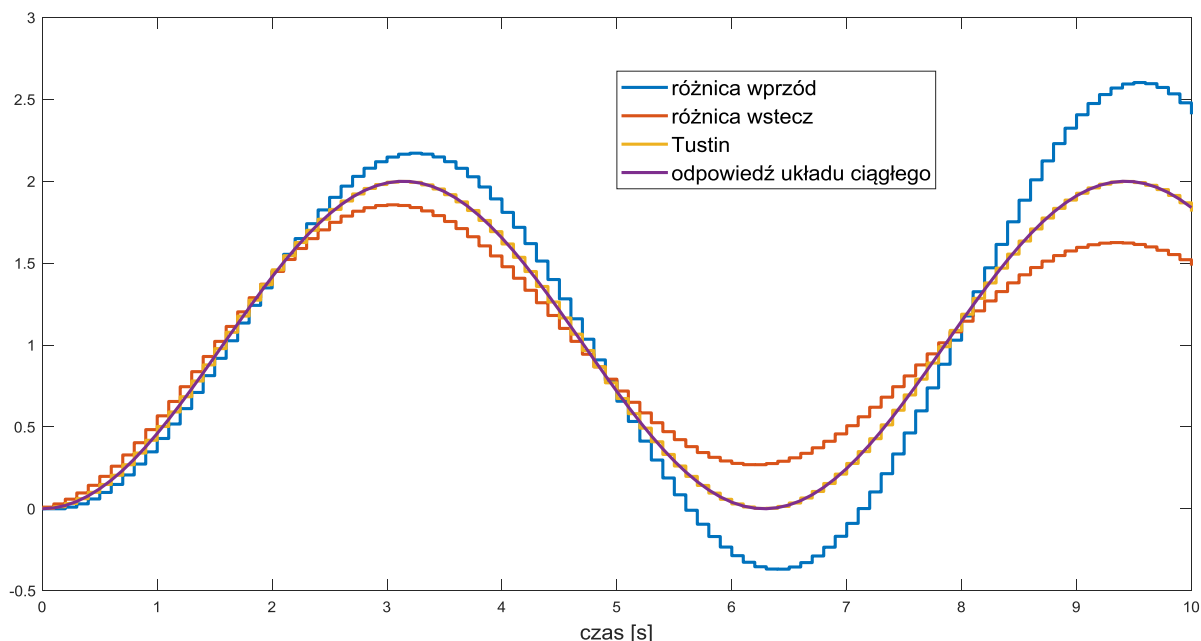
Poniżej przedstawiono uzyskane wyniki odpowiedzi układu na skok jednostkowy, z użyciem trzech metod aproksymacji pochodnej.



Rysunek 1: Porównanie odpowiedzi czasowych układu ciągłego i jego dyskretyzacji metodami aproksymacji pochodnej dla okresu próbkowania $T=1$



Rysunek 2: Porównanie odpowiedzi czasowych układu ciągłego i jego dyskretyzacji metodami aproksymacji pochodnej dla okresu próbkowania $T=0.5$



Rysunek 3: Porównanie odpowiedzi czasowych układu ciągłego i jego dyskretyzacji metodami aproksymacji pochodnej dla okresu próbkowania $T=0.1$

Wnioski:

Najlepszym sposobem dyskretyzacji metodą pochodnej jest metoda Tustina (metoda trapezów). Pozwala na zachowanie charakteru stabilności układu (układ stabilny pozostanie stabilny, niestabilny pozostanie niestabilny, układ na granicy stabilności pozostaje tym układem – co właśnie pokazuje ten przykład). Natomiast wartości aproksymacji nie są w 100% zgodne z wartościami odpowiedzi układu ciągłego, nawet przy bardzo dużej częstotliwości próbkowania będą występowały różnice.

W tym przykładzie dobrze widoczne są wady metod aproksymacji pochodnej różnica wprzód i wstecz. Przy aproksymacji metodą wprzód układ zachowuje się jak układ niestabilny, co nie odpowiada układowi ciągłemu. Z większym czasem próbkowania oscylacje szybciej narastają.

Otrzymane wyniki potwierdzają problem dyskretyzacji wstecz: układy ciągłe niestabilne w rezultacie dyskretyzacji wstecz mogą dać stabilne układy dyskretne. W tym przypadku objawiło się to otrzymaniem układu dyskretnego z gasnącymi oscylacjami w wyniku dyskretyzacji układu ciągłego będącego na granicy stabilności (czyli z stałymi oscylacjami). Mniejszy czas próbkowania pozwala na otrzymanie układu dyskretnego z wolniej gasnącymi oscylacjami.

W każdym przypadku zwiększenie częstotliwości próbkowania pozwala na uzyskanie lepszych wyników, co potwierdza potrzebę rozwijania coraz szybszych komputerów przetwarzających dane i pozwala rozróżnić lepsze cyfrowe układy sterowania od gorszych.

3 Badanie dyskretyzacji układu oscylacyjnego.

Przyjęto następujący układ do badania: $\frac{1}{s^2+s+1}$.

Jego analityczna odpowiedź skokowa została wyznaczona w następujący sposób:

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+1}\frac{1}{s}\right\} =$$

$$= 1 - \exp(-t/2) * (\cos((3^{1/2} * t)/2) + (3^{1/2} * \sin((3^{1/2} * t)/2))/3)$$

Dla różnicy wprzód otrzymano następującą transmitancję odpowiednika dyskretnego:

$$G_1(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{T}\right) + 1} = \frac{T^2}{z^2 + (T-2)z + 1 - T + T^2}$$

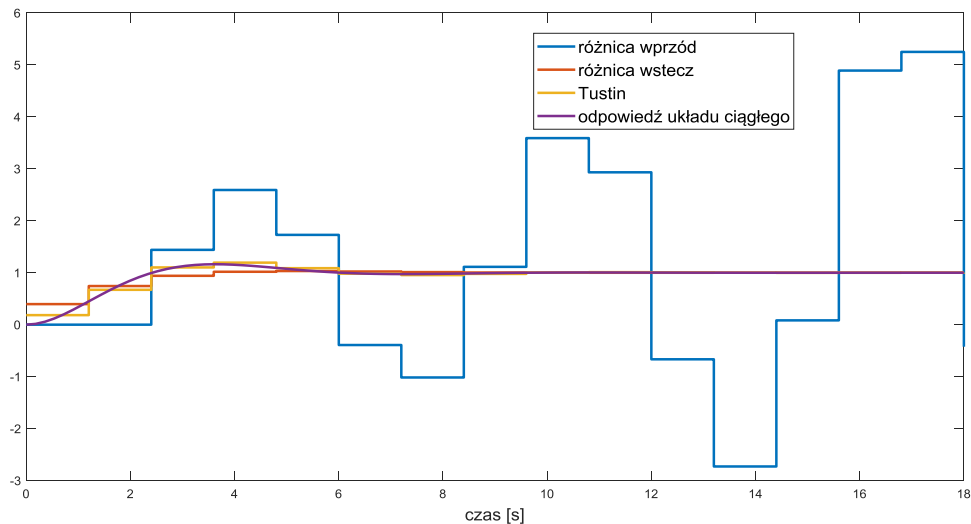
Dla różnicy wstecz otrzymano następującą transmitancję odpowiednika dyskretnego:

$$G_2(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{Tz}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{Tz}\right) + 1} = \frac{T^2 z^2}{(T^2 + T + 1)z^2 + (-T - 2)z + 1}$$

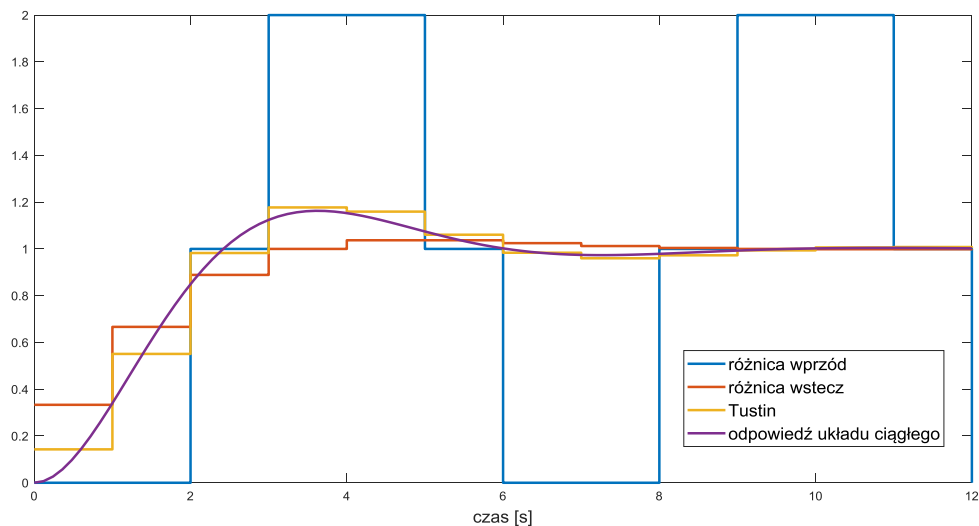
Dla aproksymacji Tustina otrzymano następującą transmitancję odpowiednika dyskretnego:

$$G_3(z) = \frac{1}{\left(\frac{2z-1}{Tz+1}\right)^2 + \left(\frac{2z-1}{Tz+1}\right) + 1} = \frac{T^2 z^2 + 2 * T^2 z + T^2}{(4 + 2T + T^2)z^2 + (2 * T^2 - 8)z + 4 - 2T + T^2}$$

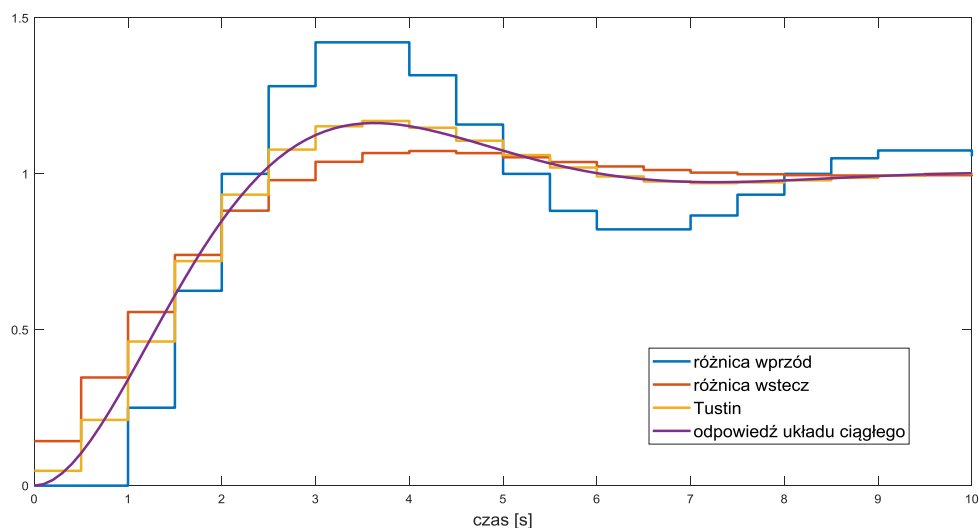
Poniżej przedstawiono uzyskane wyniki odpowiedzi układu na skok jednostkowy, z użyciem trzech metod aproksymacji pochodnej.



Rysunek 4: Porównanie odpowiedzi czasowych układu ciągłego i jego dyskretyzacji metodami aproksymacji pochodnej dla okresu próbkowania T=1.2



Rysunek 5: Porównanie odpowiedzi czasowych układu ciągłego i jego dyskretyzacji metodami aproksymacji pochodnej dla okresu próbkowania $T=1$

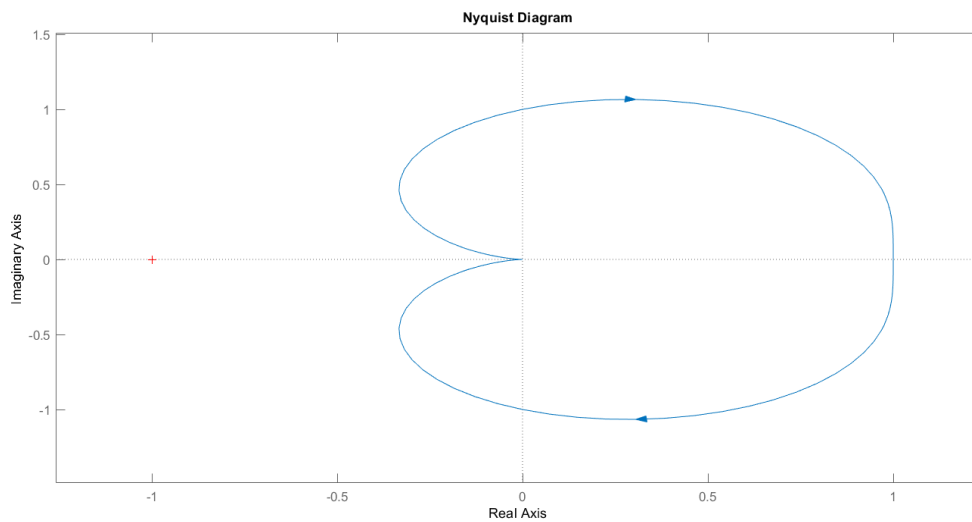


Rysunek 6: Porównanie odpowiedzi czasowych układu ciągłego i jego dyskretyzacji metodami aproksymacji pochodnej dla okresu próbkowania $T=0.5$

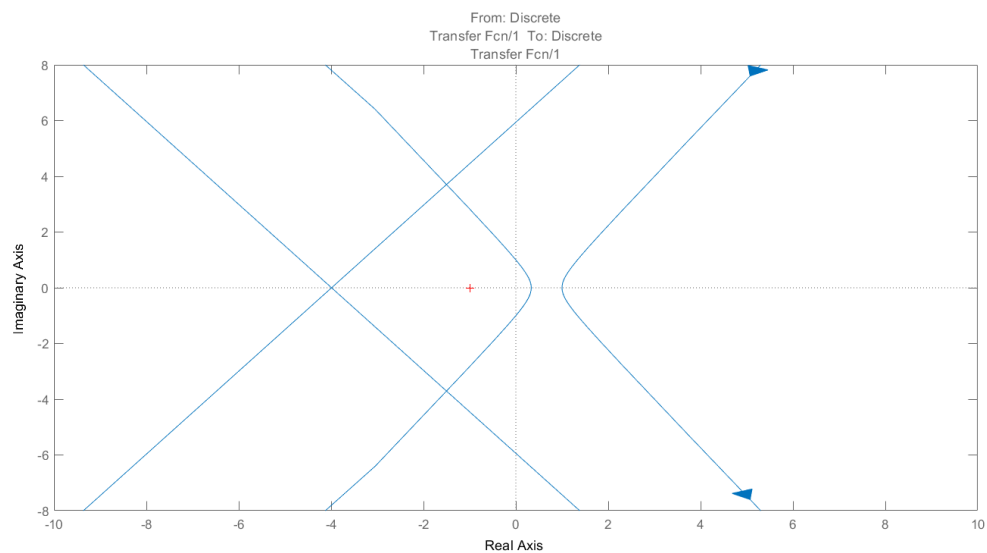
W poniższej tabeli przedstawiono wartości odpowiedzi układu na wymuszenie skokowe, w oparciu o otrzymane równanie różniczkowe (dla okresu próbkowania $T=1$) :

k	0	1	2	3	4	5
$y(kT)$	0	0.3403	0.8494	1.1244	1.1531	1.0746

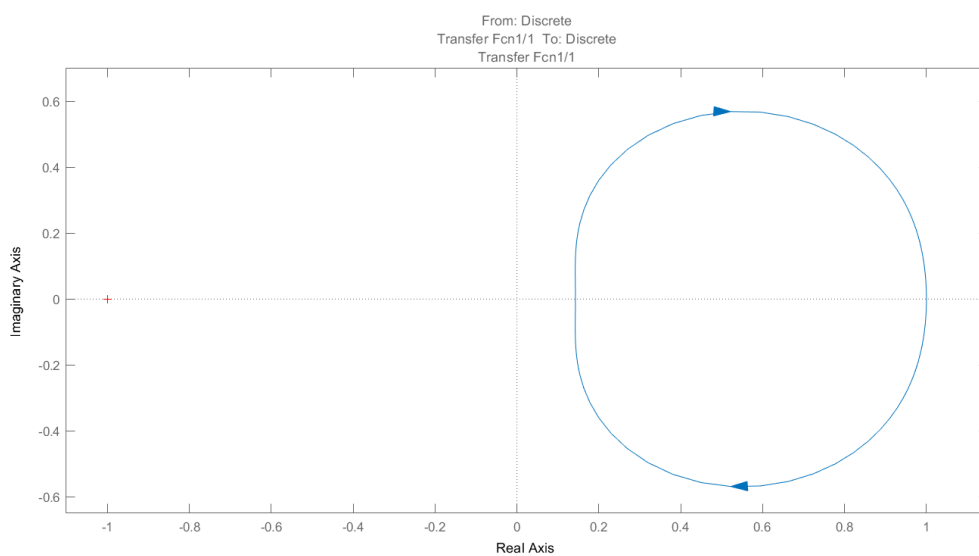
Poniżej przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe układu ciągłego i jego dyskretyzacji trzema metodami (dla okresu próbkowania $T=1$):



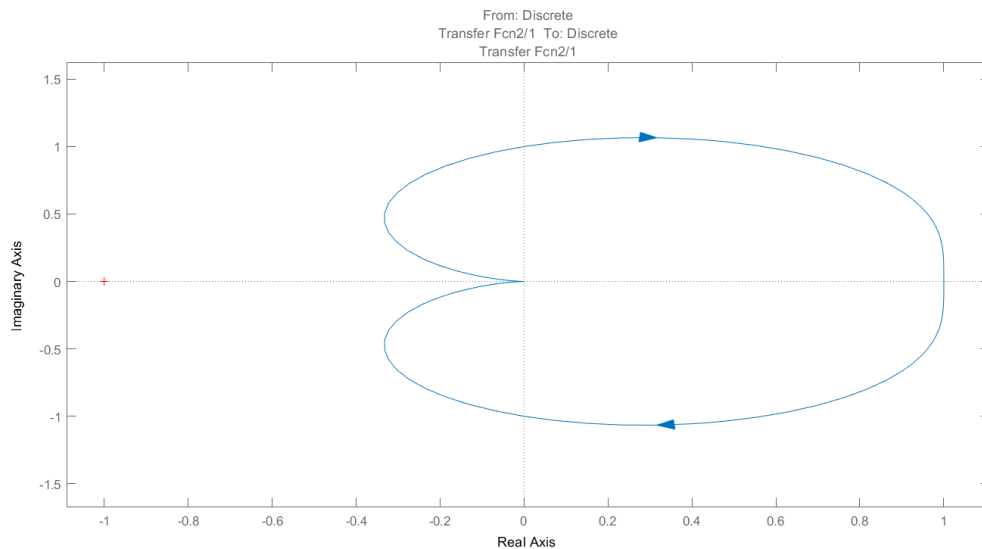
Rysunek 7: Wykres Nyquista układu ciągłego



Rysunek 8: Wykres Nyquista odpowiednika dyskretnego uzyskanego metodą wprzód



Rysunek 9: Wykres Nyquista odpowiednika dyskretnego uzyskanego metodą wstecz



Rysunek 10: Wykres Nyquista odpowiednika dyskretnego uzyskanego metodą Tustina

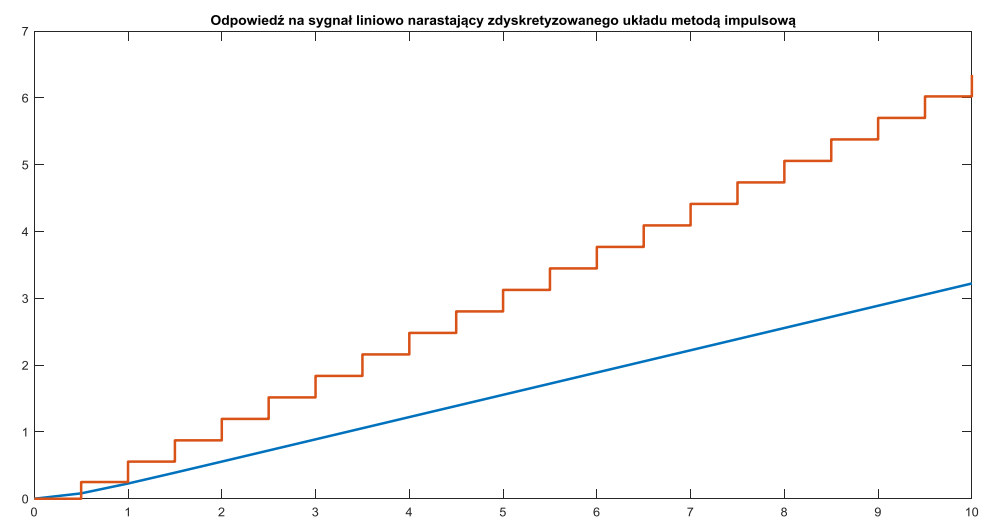
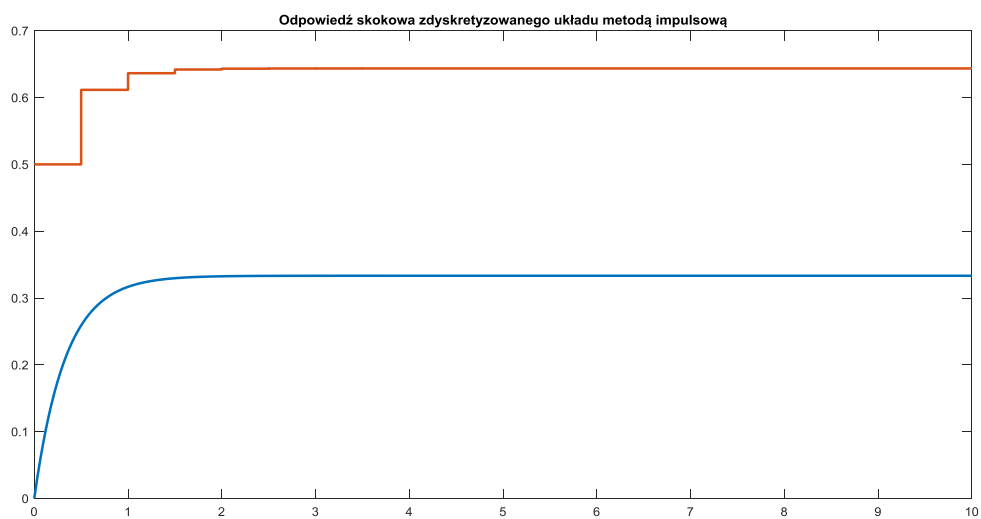
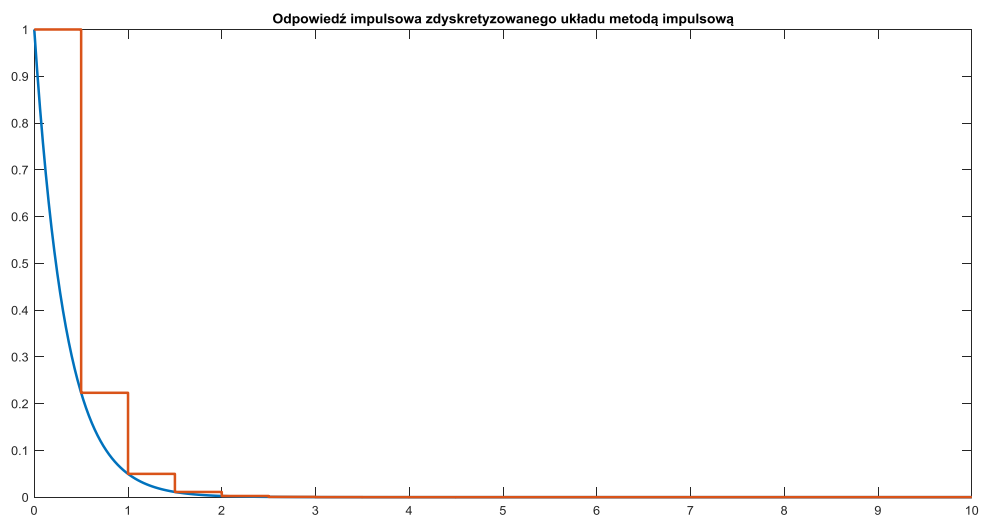
Wnioski:

W zależności od wartości okresu próbkowania metoda wprzód powoduje uzyskanie układu niestabilnego. Dla pewnego okresu próbkowania metoda wprzód powoduje uzyskanie układu z oscylacjami stałymi, a poniżej tej wartości układ zachowuje się jak układ ciągły (z tą różnicą że oscylacje początkowe są większe).

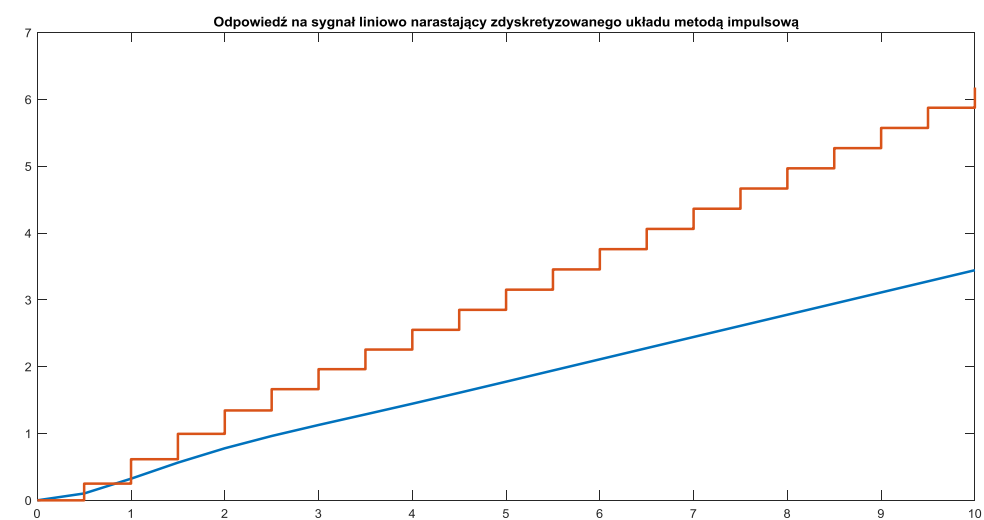
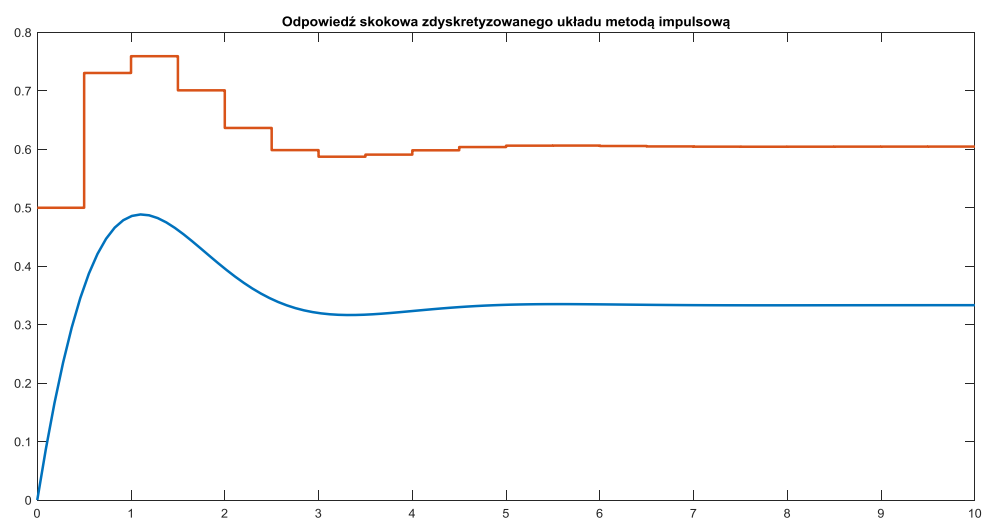
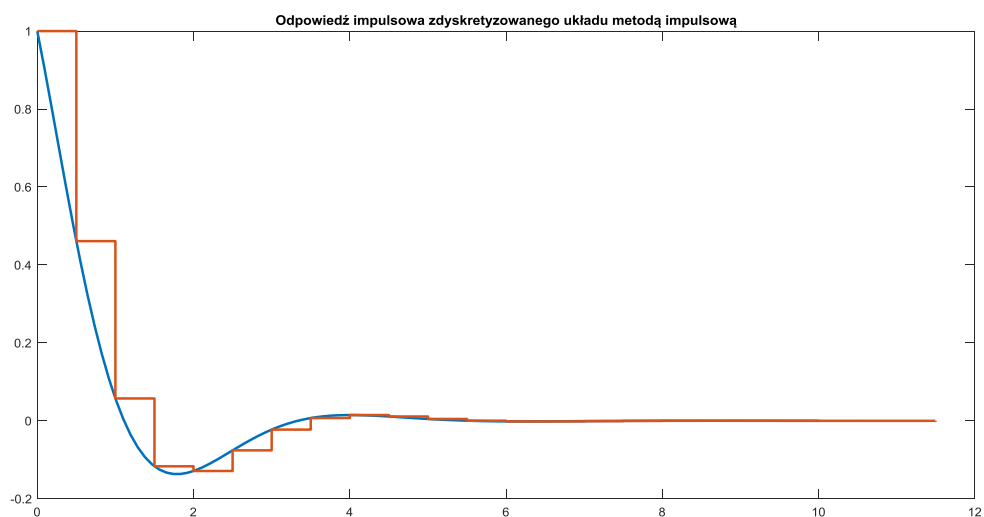
Metoda różnica wstecz też powoduje zmianę charakteru układu (powyżej pewnego okresu próbkowania układ zachowuje się jak oscylator silnie tłumiony: nie zostaje przekroczona wartość zadana).

Metoda Tustina pozwala na zachowanie charakteru układu ciągłego, ale wartości mogą znacznie odbiegać od układu ciągłego (zmniejszenie okresu próbkowania pozwala uzyskać lepsze rezultaty).

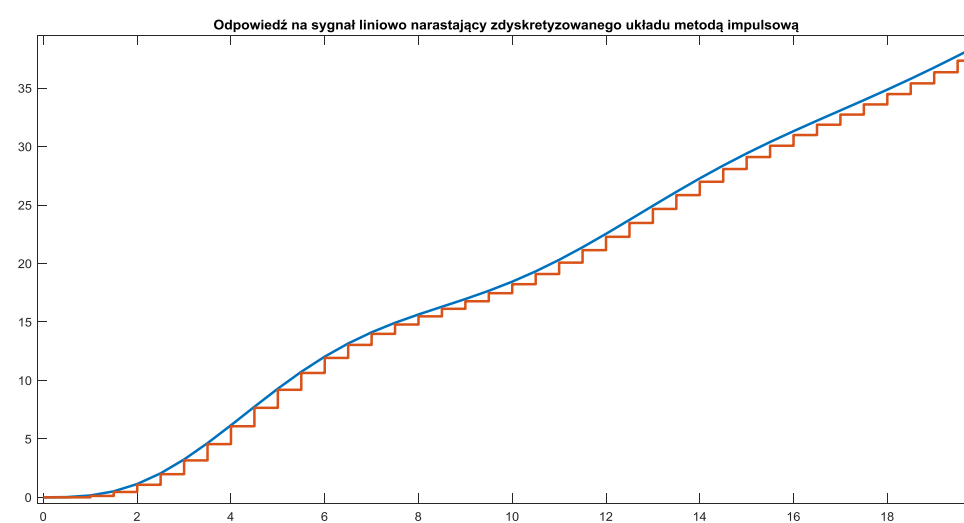
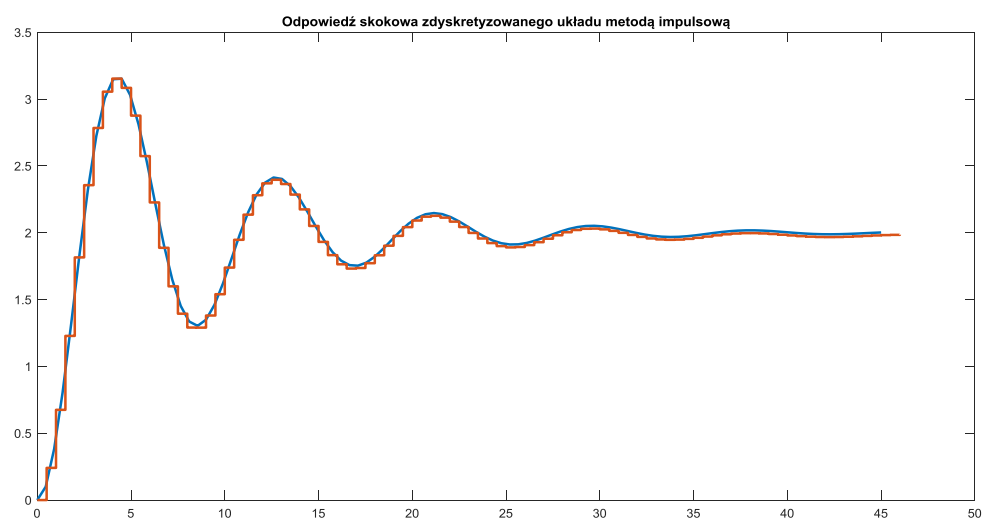
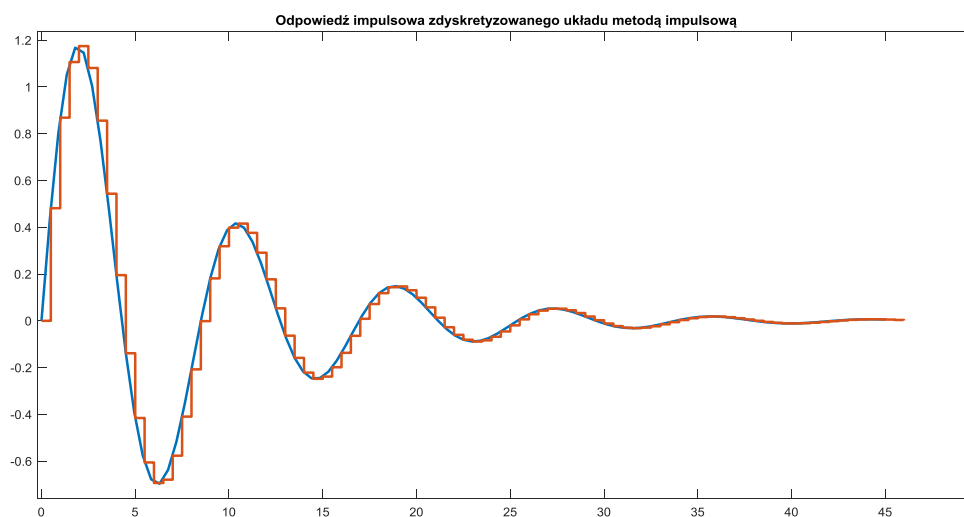
4 Badanie układów I , II i III- rzędu.



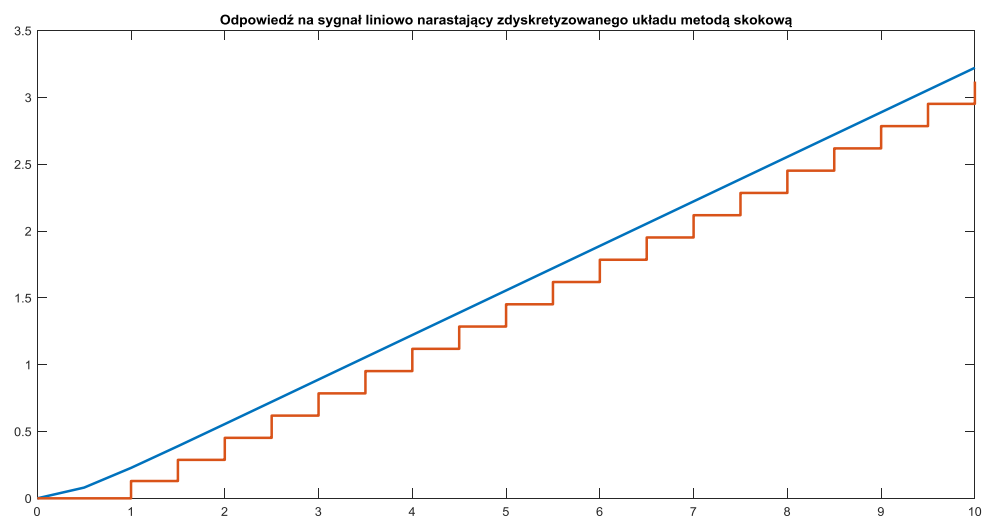
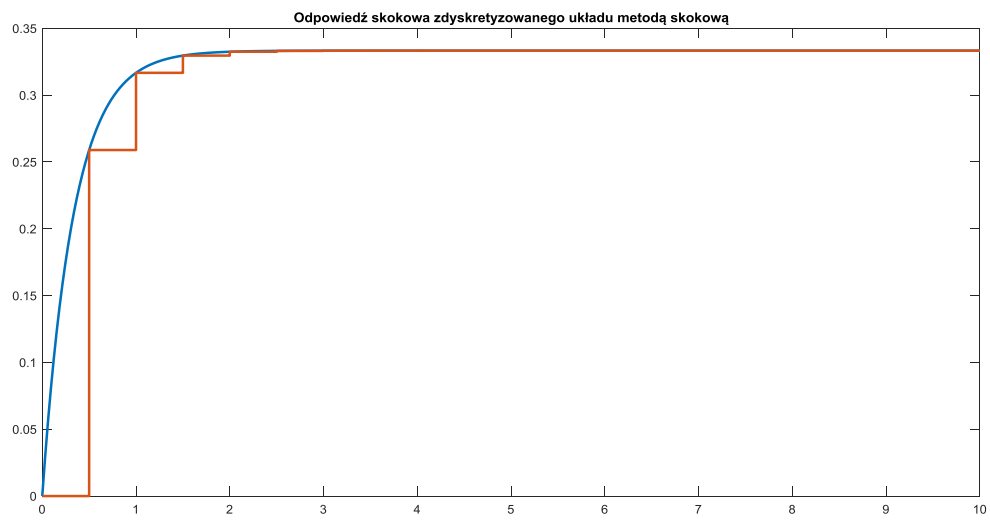
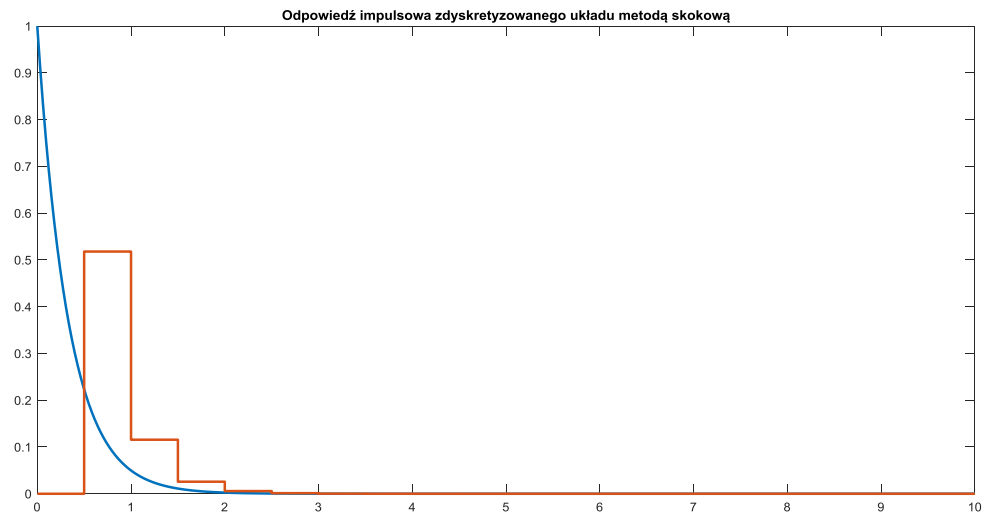
Układ pierwszego rzędu – metoda impulsowa



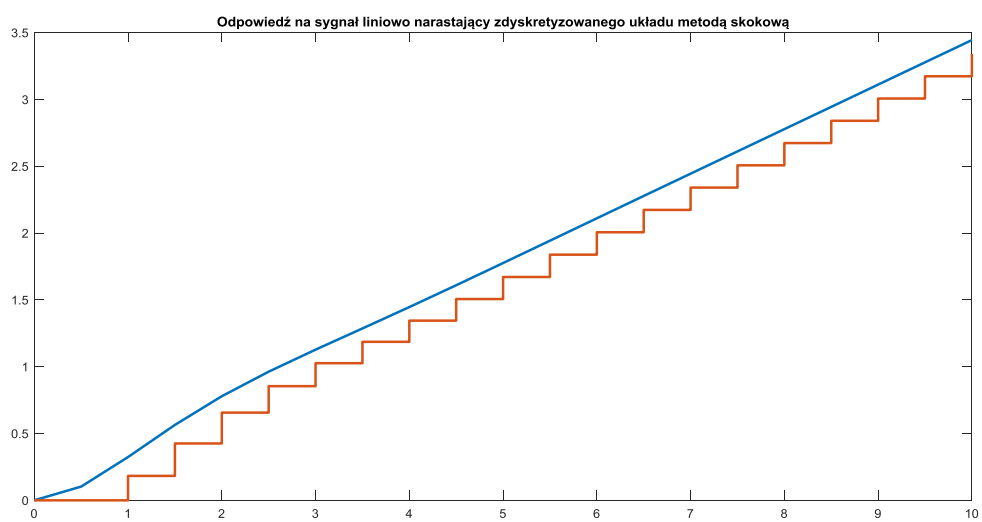
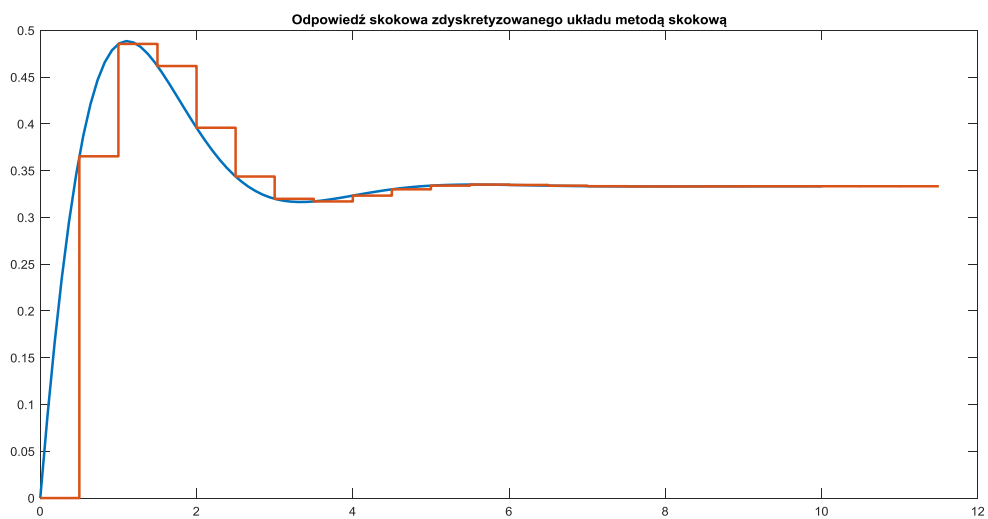
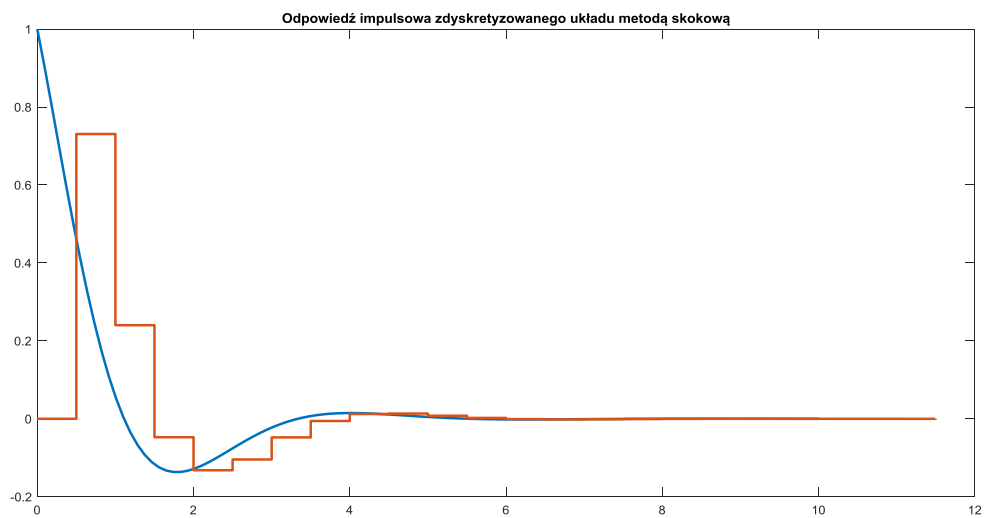
Układ drugiego rzędu – metoda impulsowa



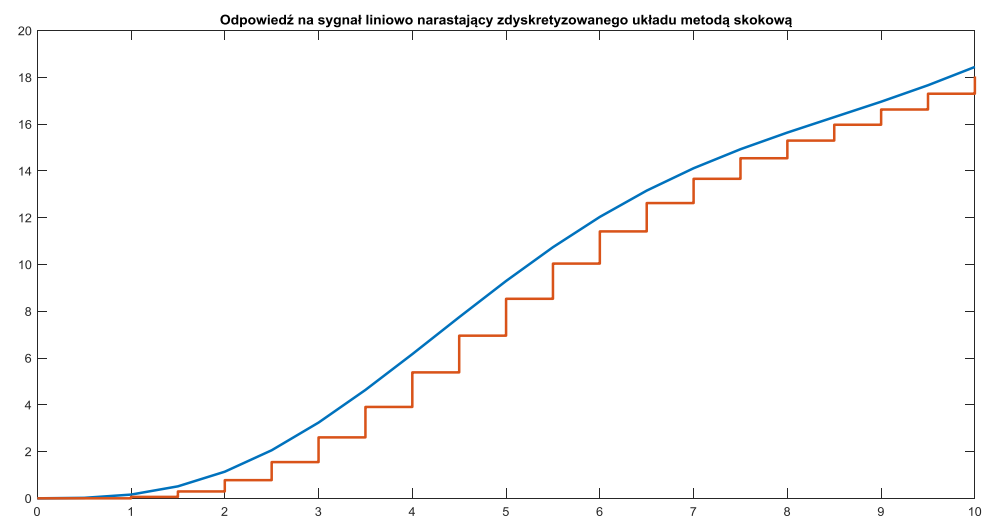
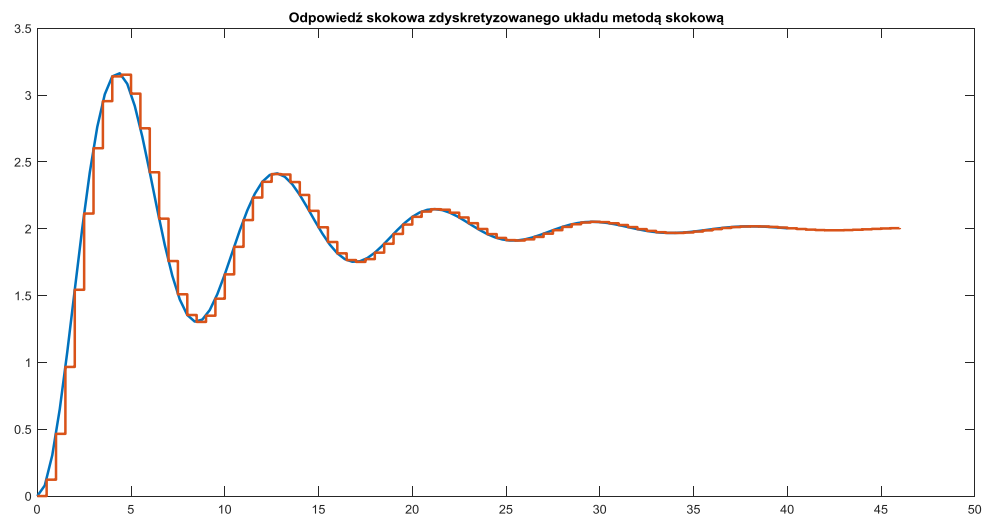
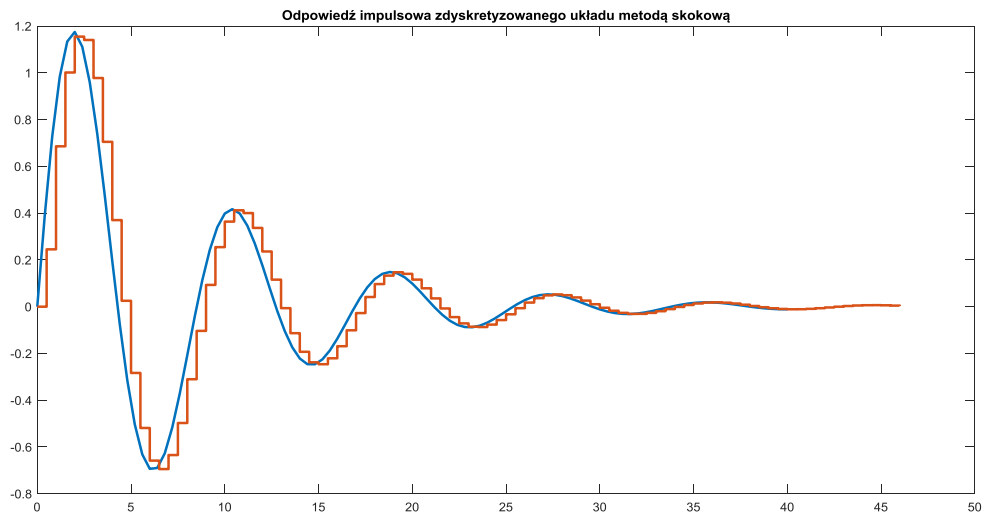
Układ trzeciego rzędu – metoda impulsowa



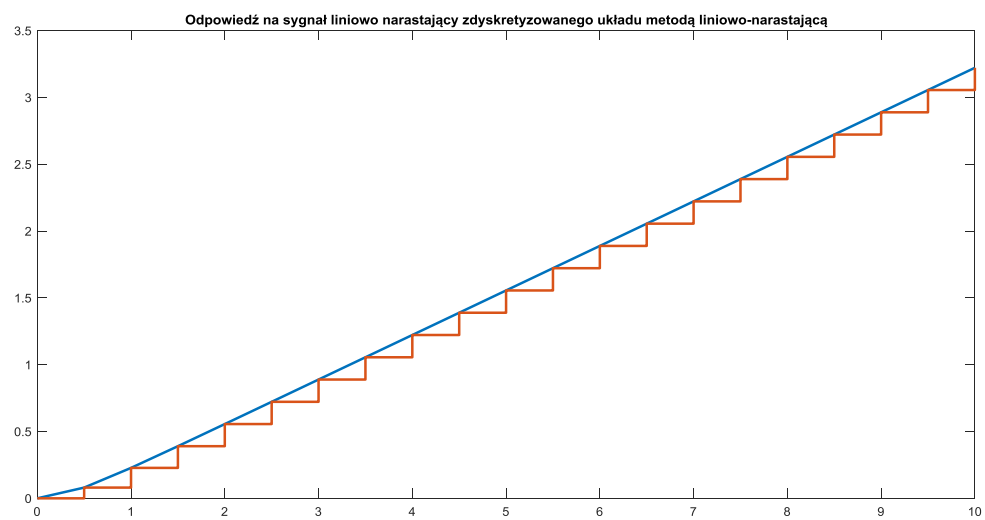
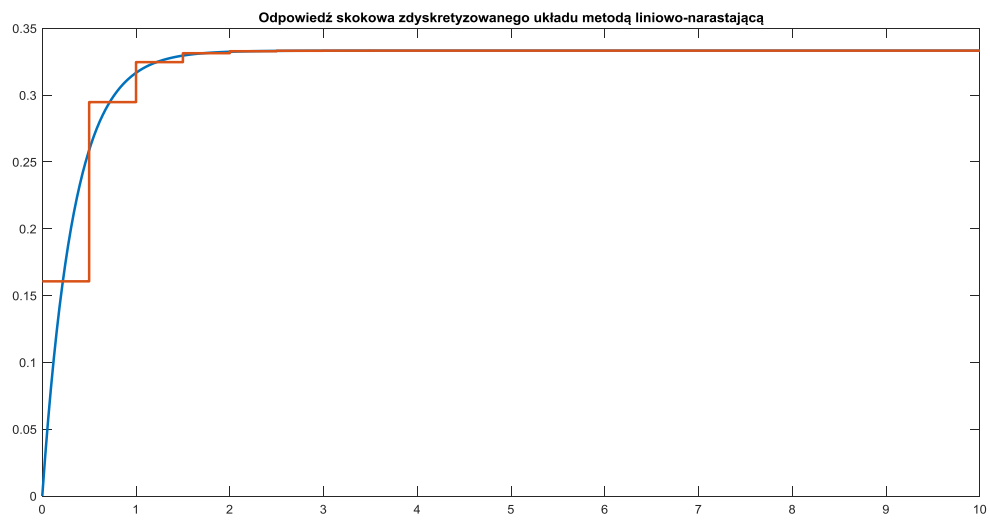
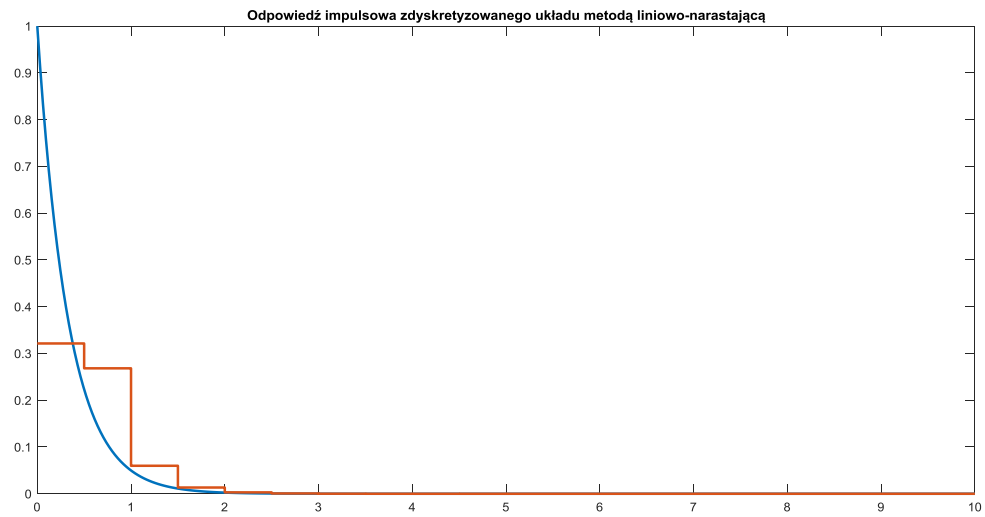
Układ pierwszego rzędu – metoda skokowa



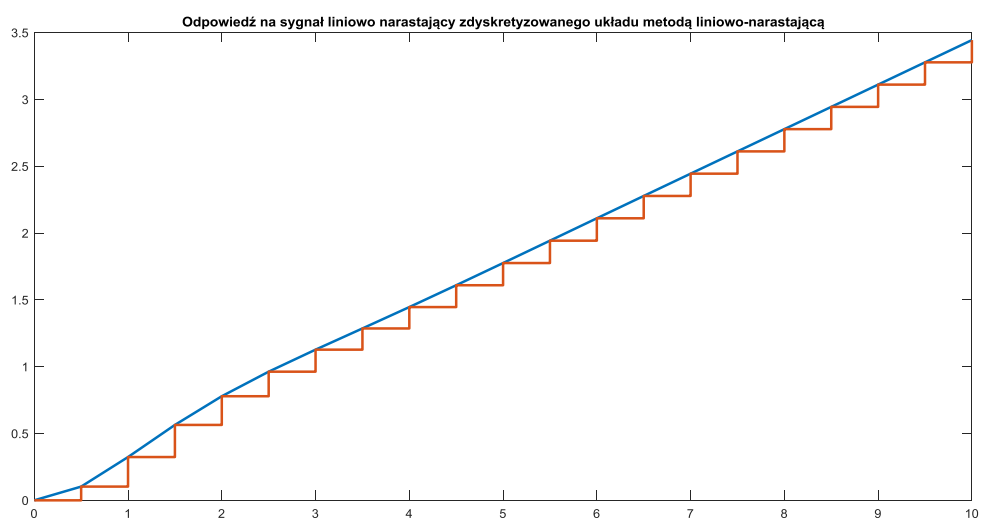
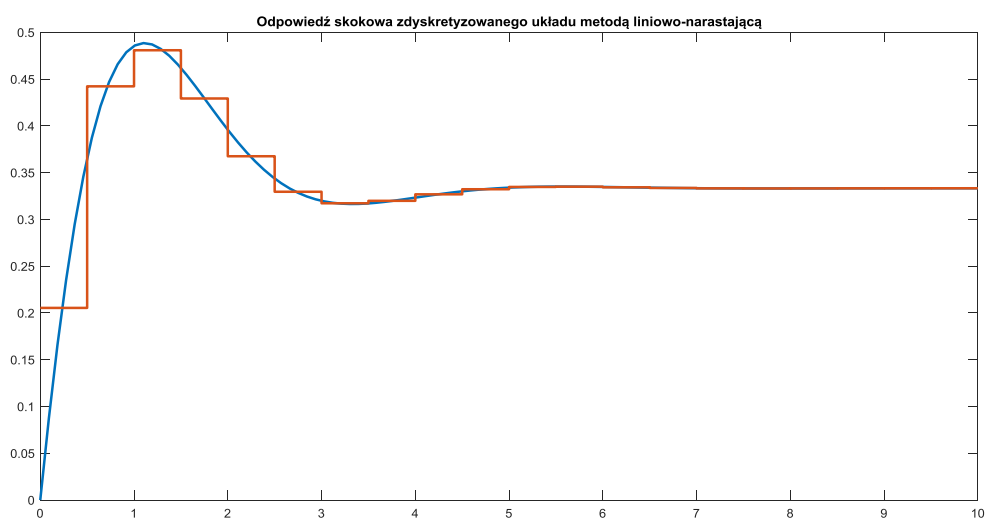
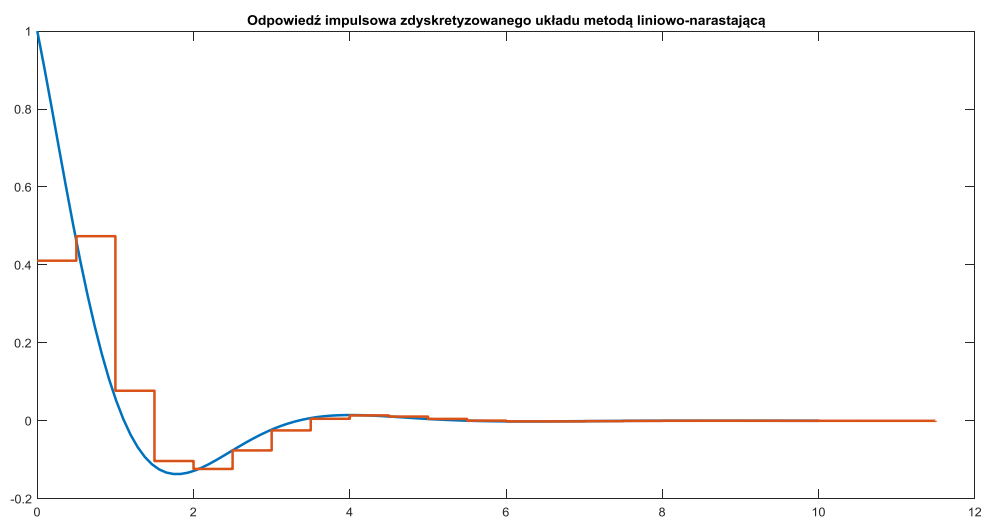
Układ drugiego rzędu – metoda skokowa



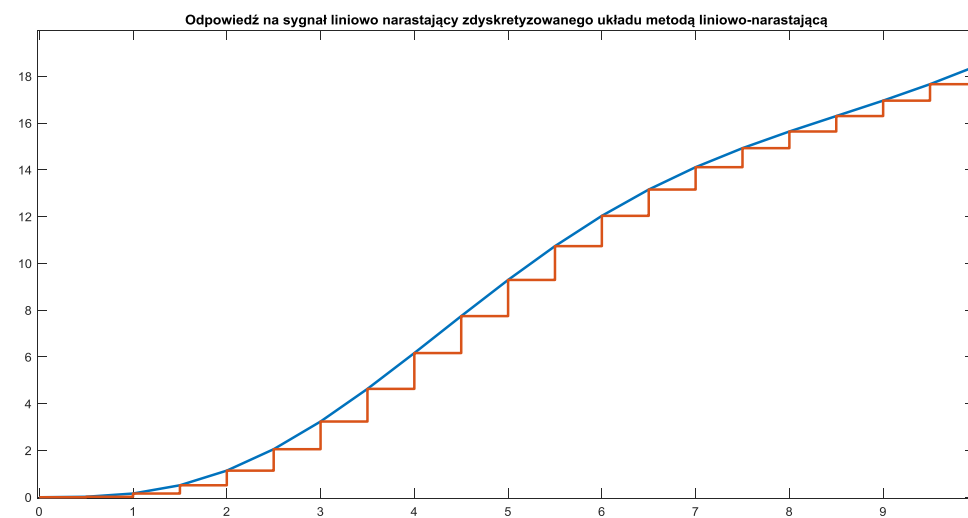
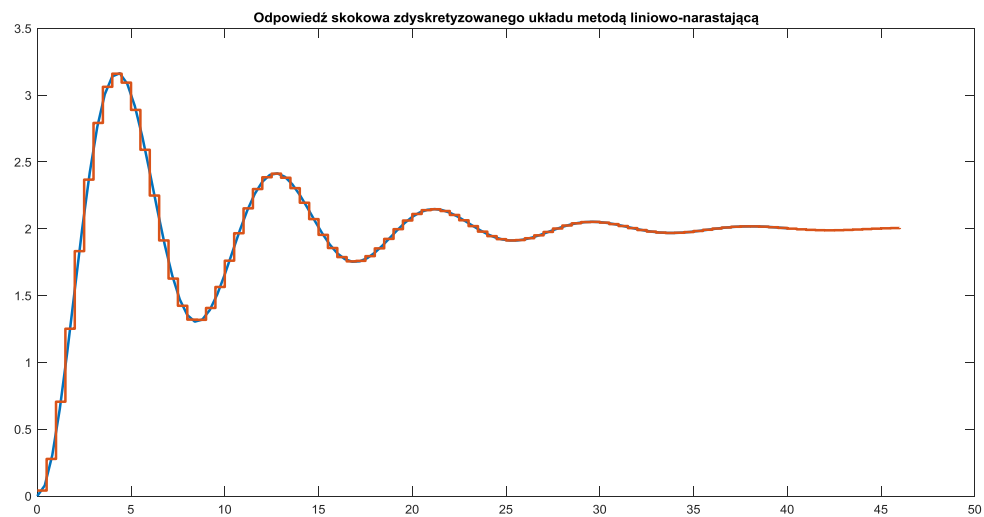
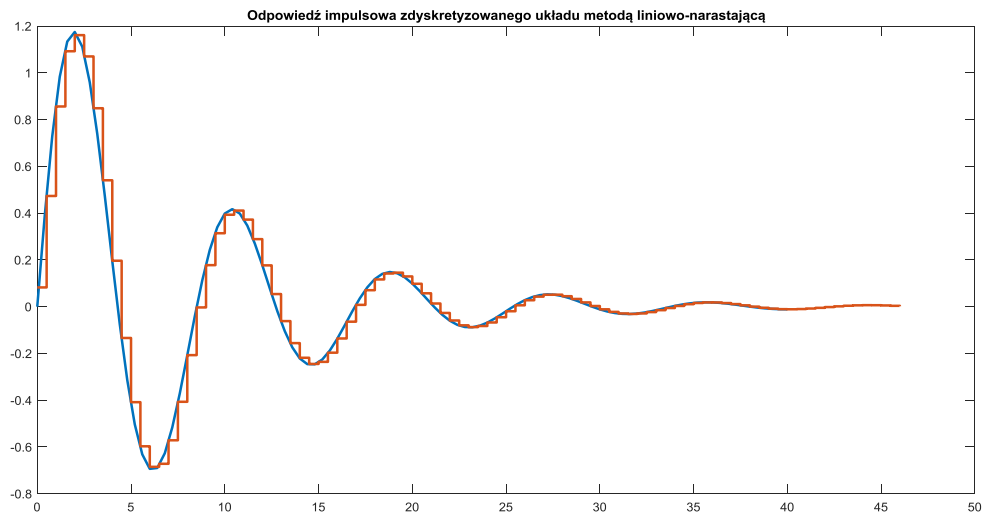
Układ trzeciego rzędu – metoda skokowa



Układ pierwszego rzędu – metoda liniowo-narastająca



Układ drugiego rzędu – metoda liniowo-narastająca



Układ trzeciego rzędu – metoda liniowo-narastająca

Wnioski:

Można zauważyć, że gdy metoda odpowiada rodzajowi odpowiedzi (np. w przypadku metody skokowej i odpowiedzi skokowej) wartości układu dyskretnego zgadzają się z wartościami układu ciągłego w momencie próbkowania. Jest to poprawne zachowanie, które wynika właśnie z charakteru metody odpowiedników odpowiedzi.

W przypadku metody impulsowej i odpowiedzi na sygnał liniowo narastający, różnica między układem dyskretnym a ciągłym zwiększa się w miarę wzrostu wartości. W przypadku metody skokowej różnica ta wydaje się być stała.

Dla metody impulsowej i odpowiedzi skokowych i liniowo-narastających zawsze obserwuje się różnicę wartości między układem dyskretnym a ciągłym.

W przypadku odpowiedzi impulsowej i skokowej układu trzeciego rzędu każda metoda daje wyniki dosyć podobne (choć w przypadku odpowiedzi impulsowej każda metoda wydaje się dawać wyniki trochę opóźnione w stosunku do układu ciągłego).

Zmniejszenie okresu próbkowania powoduje polepszenie jakości wyników.