수학 스터디 : 확률, 조건부확률 1-1

<확률>

■ 확률의 정의

- **확률표본(sample)과 표본공간(sample space)**
- **사건**

확률표본(sample) 또는 표본( )

- 풀고자 하는 확률적인 문제에서 발생할 수 있는 하나의 현상

  ex) 동전 던지기, 주사위 던지기, 약속날짜, 내 주식...

표본공간(sample space) 또는 표본집합(Ω)

- 발생할 가능성이 있는 경우(표본)의 집합

사건(event)

- 표기는 알파벳 대문자로 표기 ($e.g.$, , B, C, ...)
- 표본집합 안에 존재하는 부분집합의 개념

$\therefore$ **사건**(부분집합)을 입력하면 그에 대응하는 **숫자**(확률값)가 출력되는 **함수**

$$P(\mathrm{A}) = p$$

■ 확률의 공리(*Kolmogorov's axioms*)

1) 모든 사건에 대해 확률은 실수이고 0 또는 양수이다.

$$P(\mathrm{A}) \quad 0$$

2) 표본공간(전체집합)이라는 사건(부분집합)에 대한 확률은 1이다.

$$P(\Omega) = 1$$

3) 공통 원소가 없는 두 사건의 합집합의 확률은 각 사건들의 확률의 합이다.

$$\mathrm{A} \quad \mathrm{B} \qquad \rightarrow \; P(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$$

위의 세 가지 공리를 모두 만족해야 확률이라 할 수 있다.

※ 동전을 던졌을 때 앞(H), 뒤(T)가 나오는 확률을 *Kolmogorov* 공리에 만족하도록 임의로 정하고 공리에 맞는지 확인

표본공간 (Ω) = {H, T}

표본( )을 구하고 임의의 확률을 부여하세요.

수학 스터디 : 확률, 조건부확률 1-1

※ 주사위의 눈이 나올 확률은 무조건 1 인가?

-> 전제조건이 없다면 반드시 그렇지는 않다.
-> 전제조건은 모든 숫자가 나올 확률이 동일하며 주사위의 모든 면의 면적이 동일해야만 한다.

즉, 전제 조건이 존재하지 않는다면 *Kolmogorov* 공리에 맞춰 임의로 만들 수 있다.
단! 조건에 대한 정확한 지식이 없다면 쉽게 확률을 정할 수 없다.

■ 확률의 의미

- 빈도주의적 관점 : 실제로 반복을 했을 경우 확률에 해당하는 경향이 존재(현실의 문제)
반복 + 경향
ex) 주사위의 눈을 던졌을 때 짝수의 눈이 나올 확률
-> 실제로 주사위를 반복해서 던졌을 경우 주사위를 던진 전체 횟수에
확률 값을 곱한 숫자만큼 해당 사건이 발생하는 경향이 있다.

- 베이지안 관점 : 주장의 신뢰도(얼마나 믿을 수 있는가?)
진실성, 신뢰도 **(반복의 개념은 존재하지 않음!)**
ex) SQL은 매우 쉽다 -> **명제**
SQL이 쉽다는 신뢰도는 0.01%이다.

※ 중요 포인트
반복해서 나오는 확률 값과 사건에 대한 확률을 주장하는 **명제에 대한 신뢰도**를 구분하는 것!

※ 예시문항. 유명한 의사가 암을 진단하였을 때 진단 결과에 대해서
'암에 걸렸을 확률이 90%이다.' 라고 했을 때

빈도주의적 관점)

베이지안 관점)

■ 확률의 성질

1) 공집합 사건의 확률은   이다.

$$(\quad) = 0$$

2) 어떤 사건의 여집합의 사건은 $1-$(그 사건의 확률)이다.

$$P(A\ ) = 1 - P(A)\ \geq\ 0$$

3) 포함-배제 원리

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

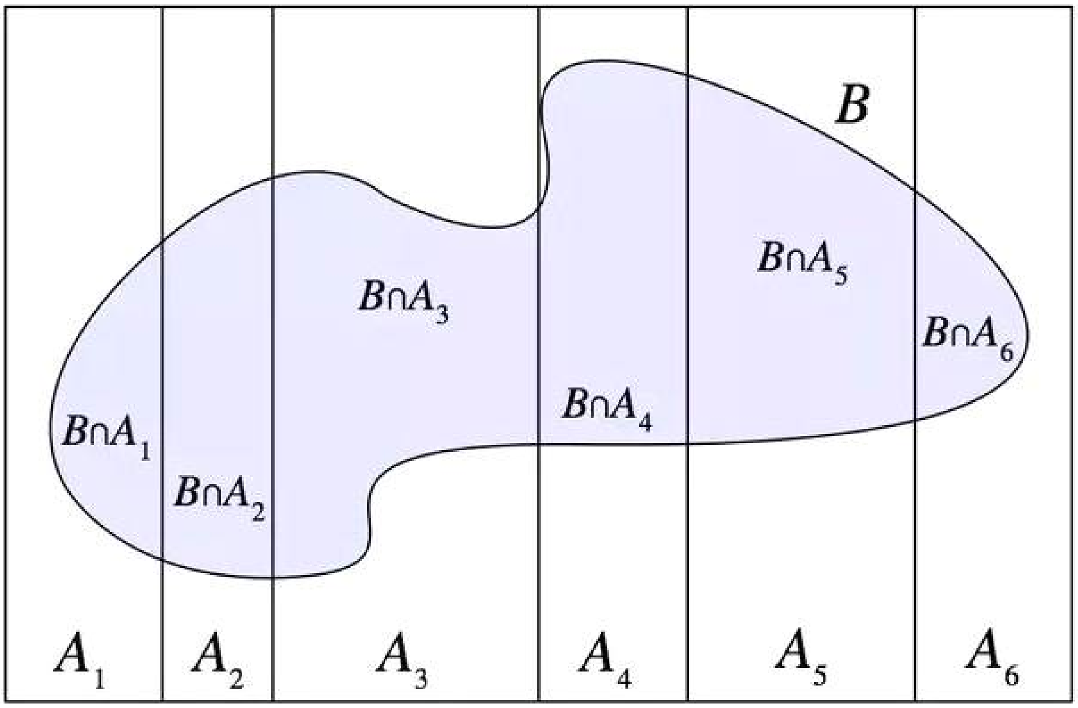
4) 전체 확률의 법칙

- 각 사건들은 서로 교집합이 없다
- 모든 집합의 합집합은 전체집합(표본공간)이다. (완전한 부분집합)

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \quad = \Omega$$

이 경우 사건 A의 확률은 사건 A와 사건 B_i가 동시에 발생할 사건들의 확률의 합과 같다. 즉,

$$B) = \quad (B, A_i)$$



<확률분포함수>

■ 확률분포

- 확률 : 사건이라는 표본의 집합에 숫자를 할당하는 함수
- **확률분포(Probability distribution)**

  어떤 사건에 대해 어느 정도의 확률이 할당되었는지 묘사한 정보

  → 사건의 표본이 유한할 때는 모든 정보를 전달할 수 있다

  → 표본이 무한한 경우는...?

■ 확률분포함수의 종류

1) PMF (Probability Mass Function : 확률질량함수)

- **표본의 개수가 유한할 때만 가능** -> 무한한 사건에 대해서는 확률 값을 전달하기 힘듬
- 표본의 값만 전달받고 확률 값을 출력 (단순사건) → $A) = P(\ a\})$
- 단순사건이 아닌 사건의 경우 확률 값을 반환할 수 없음
- 표본에 대해서 확률 값을 전달 → 사건 A가 주사위를 던졌을 때 $\{2,4\}$이 나오는 사건

  즉,

  사건 $A=\{2,4\}$일 때 $P(A)=P(\{2,4\})=P(\{2\})+P(\{4\})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

- **표본이 무한한 경우 단순사건의 경우 확률이 0에 수렴**

  $x\ +x_2+\ \ +x\ =1$일 때, x_N의 확률이 동일하고 N이 무한하면

$$\lim_{x} \frac{1}{x_N} = 0$$

∴ **사건이 무한한 경우에는 구간을 나누어 구한다.**

2) CDF (Cumulative Distribution Function : 누적분포함수) → sample의 개수가 무한한 경우

- 표본공간이 실수의 집합이면 대부분의 사건은 시작점과 끝점으로 이루어진 구간으로 표현

  $a < x \quad b\}$ (a : 구간의 시작점, b : 구간의 끝점)

- 구간으로 이루어진 확률 분포는 다음과 같이 2차원 함수로 표현할 수 있다.

$$P(A) = P(a,b)$$

- 여러 구간으로 이루어진 복잡한 사건은 *Kolmogorov*의 공리에 따라 각 구간의 확률 값을 더하거나 빼기로 표현할 수 있다.

  $.g.,\quad =\{-2<x \quad 1 \,\mathrm{or}\, 2<x \quad 3\}$의 확률은

$$P(B)=P(\{-2<x \quad 1\})+P(\{2<x \quad 3\})$$

$$=P(-2,\,1)+P(2,\,3)$$

- **구간으로 나타낸 확률은 2차원으로 표현되기 때문에 계산의 용이성 및 그래프 표현을 위해 1차원으로 변환한다. → 모든 사건의 구간에서 시작점을 ∞로 고정**

$$_{1} \quad - \quad < X \quad -1\}$$
$$S_0 = \{- \quad < X \quad 0\}$$
$$S_1 = \{- \quad < X \quad 1\}$$

$$S_x = \{- \quad < X \quad x\}$$

위와 같이 확률분포를 묘사하는 함수를 누적분포함수라 하고 $F(x)$로 표시한다.
독립변수 x는 구간의 끝점을 뜻하고 모든 실수는 $-\infty$보다 크기 때문에

$$F(x) = P(S_x) = P(\{X < x\})$$

로 나타내며 시작 구간 $-\infty$는 생략하여 나타낸다.

- **누적분포함수의 특징**

1) 음의 무한대에 대한 누적분포함수 값은 1이다.

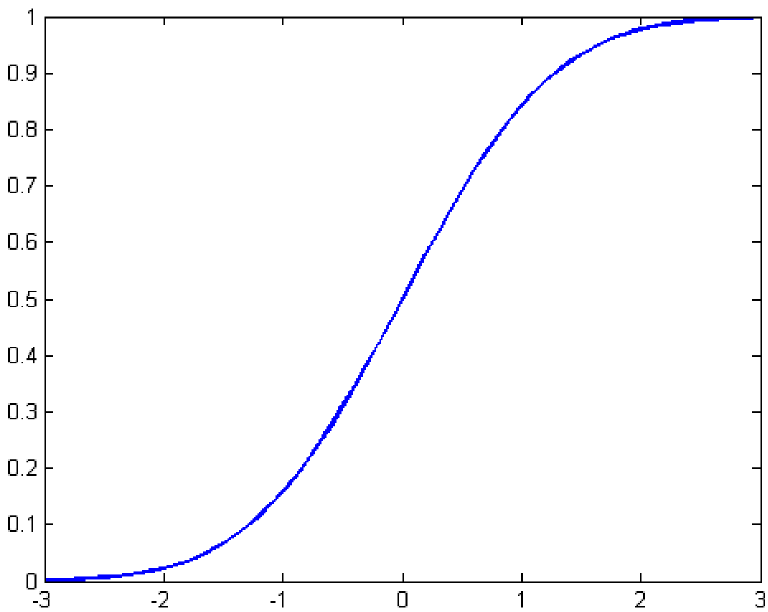
$$- \quad) = 0$$

2) 양의 무한대에 대한 누적분포함수 값은 1이다.

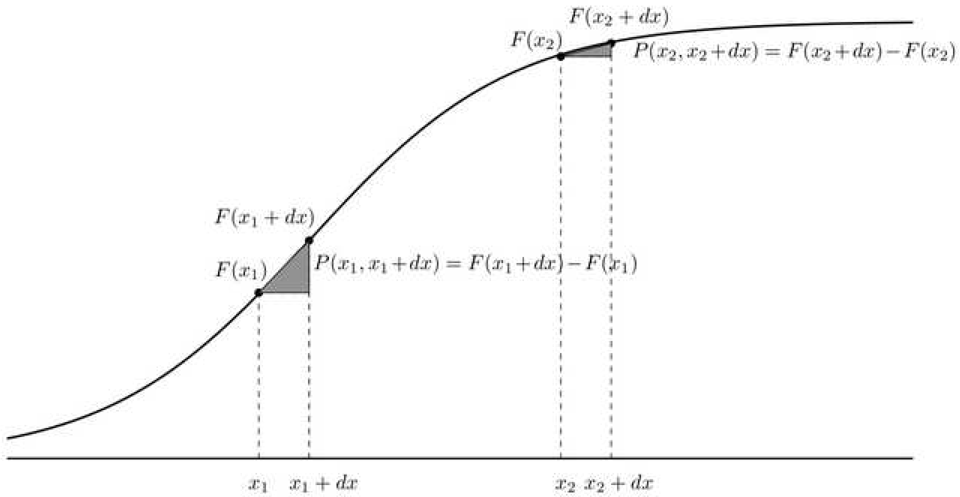
$$F(+ \quad) = 1$$

3) 입력이 크면 누적분포함수 값은 커진다.

$$x > y \ \rightarrow \ F(x) \quad F(y)$$



- **왜 누적분포함수를 사용하는 것이 편리한가?**

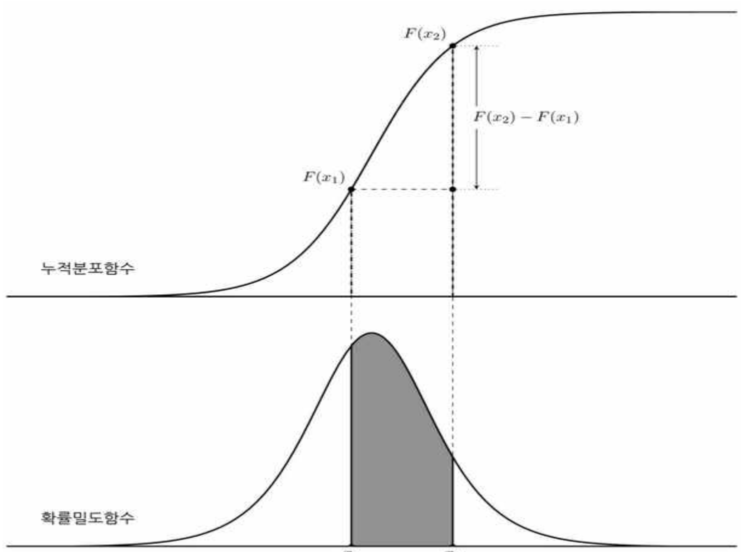


무한한 구간에서 특정 구간의 확률 값을 쉽게 계산할 수 있다!
하지만 만능은 아님..

특정 구간의 확률은 쉽게 구할 수 있으나 어떤 구간이 높은 확률 값이 할당되었는지 직관적으로 확인하는 것이 어렵다.
따라서 특정 구간의 순간변화율을 통해서 각 구간별로 확률이 할당된 정도를 비교를 할 수 있는데..

■ PDF (Probability Density Function : 확률밀도함수)

- **확률밀도함수는 누적분포함수의 도함수이다.**
- 확률밀도함수는 **상대적으로 얼마나 높은가를 확인할 수 있으며 확률밀도함수 값은 확률 값이 절대! 아니다.**
- 확률밀도함수를 통해 확률 값을 계산하는 것은 적분을 이용해야하며 추후 필요시 설명



수학 스터디 : 확률, 조건부확률 1-1

■ 결합 확률 & 조건부확률

- **결합 확률(Joint Probability) - 사건 와 B가 동시에 발생할 확률**

  두 사건(명제)이 진실일 때 동시에 발생했으므로 두 사건의 교집합의 확률 값과 같다.

  $P\ A \cap B)$ 또는 $P(A,\, B)$

- **조건부확률(Conditional Probability) - B가 사실일 경우 A가 일어날 확률**

  사건 B에 대한 사건 A의 조건부확률

  $$A|B)$$

  조건부확률은 다음과 같이 정리한다.

  $$P(A|B) = \begin{matrix} P(A,\, B) \\ P(B) \end{matrix}$$

- **조건부확률의 해석은 다음의 과정을 진행한다.**

  1) 사건 B가 발생한 경우 사건 A의 확률
  2) 전체 표본집합(Ω)에서 사건 B로 제한
  3) 구하고자 하는 표본(w)이 사건 B에 속하면서 사건 A에 속한다는 **신뢰도**를 파악

     → **주어진 단서(사건 B)에 따라 사건 A에 대한 신뢰도는 다분히 변할 수 있다.**

  ※ 단, 사건 A의 확률은 변동이 없을 때 사건 $A,\, B$간의 관여성이 없는 경우를
  서로 독립이라 한다.

※ 예시문항. 무인도 살인사건

■ 독립사건

- **두 사건 $A,\, B$의 결합 확률 값이 다음을 만족하면 두 사건은 서로 독립이라 한다.**

  $$P(A,\, B) = P(A)P(B)$$

- **두 사건이 독립일 때 조건부확률의 값은 서로 영향이 없기 때문에 사건 그 자체의 확률 값과 동일**

  $$P(A|B) = \frac{P(A,\, B)}{P(B)} = \begin{matrix} P(A)P(B) \\ P(B) \end{matrix} = P(A)$$