수학 스터디 : 지수, 로그함수) 1-1 지수, 로그 성질

■ 지수의 성질

지수의 연산 시행 시 지수의 밑은 항상 동일한 값이어야 한다.

지수의 곱: $a^b \times a^c = a^{b+c}$

지수의 나눗셈: $a^b \div a^c = a^{b-c}$

※ 지수의 덧셈과 뺄셈의 경우 계산 방식이 다르다.

$a^b + a^c \neq a^{b+c}$, $a^b - a^c \neq a^{b-c}$

■ 지수의 거듭제곱

지수의 거듭제곱은 지수의 곱과 같다.

거듭제곱: $(a^b)^c = a^{b \times c}$

※ 밑이 다른 지수의 곱과 나눗셈은 연산 그대로 표시한다

ex) $a^b \times b^c = a^b b^c$, $a^b \div b^c = \frac{a^b}{b^c}$

■ 로그의 성질

로그의 연산 시행 시 지수와 마찬가지로 로그의 밑이 동일한 값이어야 한다.

로그의 합: $\log_a b + lob_a c = \log_a (b \times c) = \log_a bc$

로그의 차: $\log_a b - \log_a c = \log_a (b \div c) = \log_a (\frac{b}{c})$

※ 밑이 다른 로그의 경우 합과 차를 구할 수 없으며 서로 다른 밑이 거듭제곱 관계면 동일한 밑으로 변환하여 연산할 수 있다.

ex) $\log_2 7 + \log_3 8$ **연산 불가**

ex2) $\log_2 7 + \log_4 9 = \log_2 7 + \log_{2^2} 3^2 = \log_2 7 + \frac{2}{2}(\log_2 3) = \log_2 7 + \log_2 3 = \log_2 21$

■ 로그 밑과 진수의 거듭제곱에 대한 성질

로그의 밑과 진수가 거듭제곱으로 나타낼 수 있는 경우 거듭제곱 값은 로그의 상수로 나타낼 수 있다.

$\log_{a^b} c^d = \frac{d}{b}(\log_a c)$ → **밑의 거듭제곱은 분모, 진수의 거듭제곱은 분자로 뺄 수 있다.**

■ 로그의 밑 변환 공식

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ → 로그의 밑과 진수를 바꿔쓸 수 있으며 이때에는 역수로 바꿔쓴다.

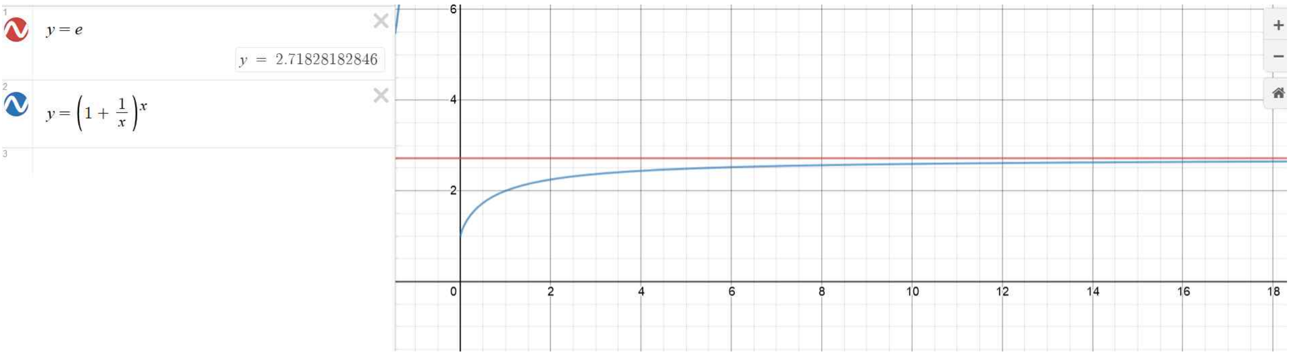
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ → 밑과 진수를 서로 같은 밑(c)를 취하여 각각 분모, 분자로 바꿔쓸 수 있다.

또한 다음의 등호가 성립한다. $a^{\log_a b} = b$, $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

수학 스터디 : 지수, 로그함수) 1-1 지수, 로그 성질

■ e를 이용한 지수, 로그

오일러 상수 e는 다음 극한의 값이 수렴한다는 것을 알 수 있다.



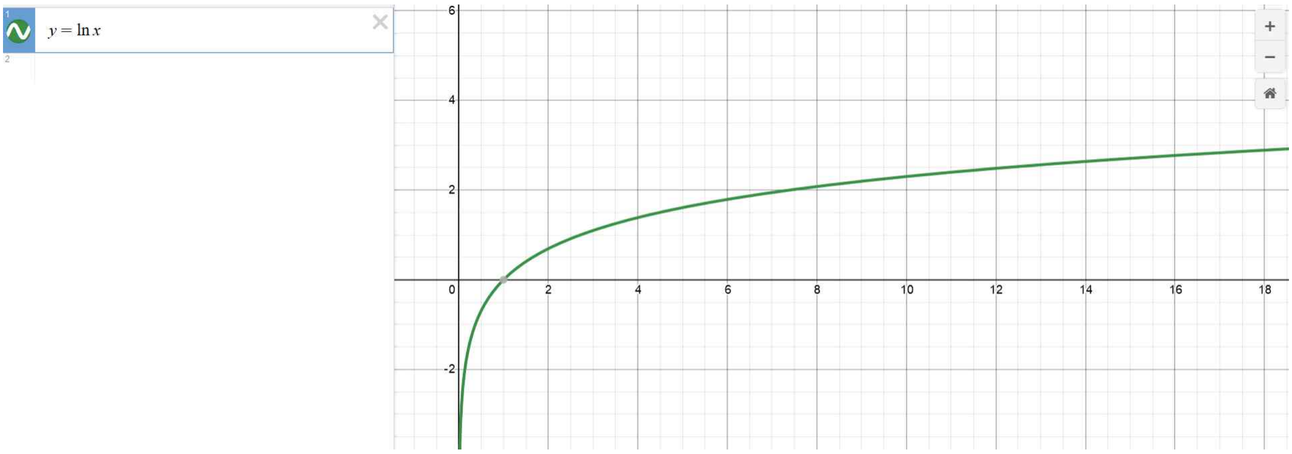
$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e$$

e는 무리수이며 자연로그 값을 이용하는데 쓸 수 있다.

■ 자연로그 $\log_e x$

자연로그 $\log_e x$는 밑이 e인 로그이며 줄여서 $\ln x$라 쓸 수 있다.

로그이므로 모든 로그의 성질을 만족한다.



■ 자연로그의 성질

기본적인 로그의 성질과 자연로그는 밑이 e인 로그이기 때문에 다음의 값을 만족한다.

1) $\ln 1 = 0, \ln e = 1$

2) $\ln xy = \ln x + \ln y$

3) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

4) $\ln x^n = n(\ln x)$

■ 기타 기본적인 지수, 로그 성질

$a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ \log_a 1 = 0,\ \log_a 0$의 값은 존재하지 않는다.**(진수가 0인 경우는 존재하지 않음)**

수학 스터디 : 지수, 로그함수) 1-1 지수, 로그 성질

■ 문제1. 다음의 등식을 만족시키는 x의 값을 구하세요.

1) $e^x = 3$

2) $\ln(x-1) = 5$

3) $\ln(x+1) - \ln x = \ln 4$

4) $\ln(x+e) = 1$

5) $2\ln\sqrt{e}$

■ 문제2. 다음 방정식의 x값을 구하세요.

1) $\ln(6-8x) = -2$

2) $2\ln x = \ln 2 + \ln(2x-3)$

■ 문제3. 다음의 식에서 x의 값을 구하세요.

$$e^{-\ln\frac{e^3}{x}} = \log_e(e^{x^2})$$

■ 문제4. 다음의 식을 오일러 상수 e의 거듭제곱으로 나타내세요.

$$x^{(\ln x)^2}$$

■ 문제5. 다음의 식에서 x의 값을 구하세요. (단, $x > 0$)

$$16^{-4\log_4 x} = (\frac{1}{x})^{\log_2 1024} \times (\ln e^9)$$