12.3 Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas

Kevin Cortés G.
Santiago Quintero C.

Universidad de Antioquia
Instituto de Física, FCEN
Física computacional II

Marzo de 2022

Ecuación de Onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

Dominio

$$D = \{(x, t) \, \epsilon \, \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq l \wedge t > 0\}$$

Condiciones de Cauchy

$$u(0, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(l, t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = f(x), \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \tag{5}$$

Método numérico

Hacemos una partición intervalo $[0, l]$ en m partes, y que junto a un paso del tiempo k nos permiten definir la malla (x_i, t_j):

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, ...m. \tag{6}$$

$$t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2... \tag{7}$$

donde $h = l/m$ y, $k > 0$. En cada punto de la malla tenemos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0 \tag{8}$$

Método numérico

Siempre que $h \to 0$ y $k \to 0$, podemos usar el métodos de cocientes diferenciales para obtener una solución numérica la ecuación de onda (18) con condiciones de Cauchy.

segunda derivada parcial numérica centrada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})}{k^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2}$$

Podemos reescribir (8) como

$$u(x_i, t_{j+1}) + u(x_i, t_{j-1}) - \lambda^2(u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)) + 2(1 - \lambda^2)u(x_i, t_j) = 0,$$

donde $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$.

Método numérico

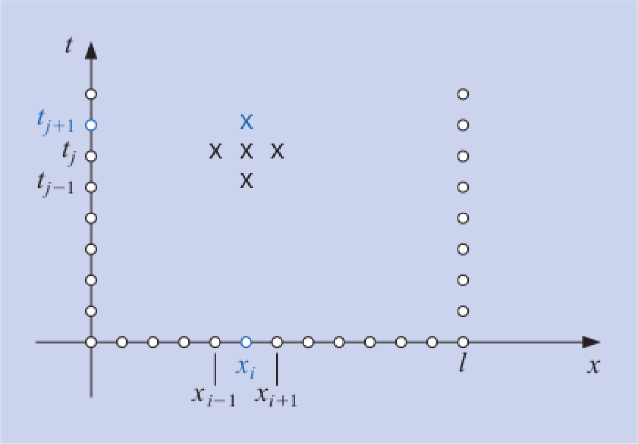
Definiendo $w_{i,j} = u(x_i, t_j)$ y solucionando para $w_{i,j+1}$, obtenemos

$$w_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1} \tag{9}$$

Reescribimos el sistema de ecuaciones anterior(Ecuaciones de recurrencia) en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}.$$

Método numérico



Realizando el cambio $j \to j+1$ en la ecuación (9), reescribimos dicha ecuación como.

Sistema de ecuaciones

$$w_{i,j} = 2(1-\lambda^2)w_{i,j-1} + \lambda^2(w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1}) - w_{i,j-2} \tag{10}$$

La condición de Frontera (2) y (3), implican que

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \quad j = 1, 2, ... \tag{11}$$

y la condición inicial (4) implica que

$$w_{i,0} = f(x_i), \quad i = 1, 2, ...m-1, \tag{12}$$

Note que se tienen problemas para $j = 1$, es decir, para calcular $w_{i,1}$, y estos valores los necesitamos para $j = 2$. Podemos obtener $w_{i,1}$ a partir de las condiciones iniciales.

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) \tag{13}$$

De la ecuación (8) tenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, 0) = \alpha^2 f''(x_i),$$

adicionalmente

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

Evaluando estas dos ultimas ecuaciones en (13) y usando las condiciones iniciales (4) y (5), tenemos que

$$
\begin{aligned}
u(x_i, t_1) &= f(x_i) + kg(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}(f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})) \\
&= (1-\lambda^2)f(x_i) + kg(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}))
\end{aligned}
$$

O en términos de w

$$
w_{i,1} = (1-\lambda^2)f(x_i) + kg(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) \tag{14}
$$

Generalización

Ecuación de onda no homogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho(x,t) \tag{15}$$

con condiciones de frontera e iniciales dadas por (2), (3), (4) y (5)

Sistema de ecuaciones (Eq. de Onda no homogénea)

$$w_{i,j} = 2(1-\lambda^2)w_{i,j-1} + \lambda^2(w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1}) - w_{i,j-2} + \rho_{i,j-1}$$

$$w_{i,1} = (1-\lambda^2)f(x_i) + kg(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) + \frac{k^2}{2}\rho_{i,0}$$

donde $\rho_{i,j} = \rho(x_i, t_j)$

Ejemplo Burden

Ecuación a solucionar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{16}$$

Con $0 < x < 1$ y $t > 0$
Las condiciones iniciales y frontera son:
Para $0 < t$:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

Para $0 \leq x \leq 1$

$$u(x,0) = sin(\pi x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$$

Ondas de presión en un tubo abierto

Ecuación a solucionar

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \tag{17}$$

Con $0 < x < 1$ y $t > 0$
Las condiciones iniciales y frontera son:
Para $0 < t$:

$$p(0,t) = p(1,t) = p_0 = 0{,}9$$

Para $0 \leq x \leq 1$

$$p(x,0) = p_0 cos(2\pi x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,0) = 0$$

Cuerda pulsada

Ecuación a solucionar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{18}$$

Con $0 < x < 1$ y $t > 0$
Las condiciones iniciales y frontera son:
Para $0 < t$:

$$u(0,t) = u(1,t) = p_0 = 0{,}9$$

Para $0 \leq x \leq 1$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2hx}{L} & si \quad 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ 2h\left(1 - \frac{x}{L}\right) & si \quad \frac{L}{2} \leq Lx \leq L \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0$$

Bibliografía

- Burden, R. L., Faires, J. D. (n.d.). Numerical Analysis (9th ed.)
- Sepulveda, A. (2015). Física matemática (2nd ed.)
- Zill, D. G., Cullen, M. R. (n.d.). ECUACIONES DIFERENCIALEScon problemas con valores en la frontera (septima).