Algorytmy tworzone w oparciu o schemat *podziału i ograniczeń*, ograniczają rozmiar przestrzeni poszukiwań poprzez pomijanie fragmentów, co do których istnieje pewność, że nie zawierają optymalnego rozwiązania.

Określanie fragmentów nie wartych przeszukiwania opiera się o dwa oszacowania:

- górne – oszacowanie wartości optymalnego rozwiązania (np. wartość najlepszego znalezionego dotąd rozwiązania),
- dolne – oszacowanie (z dołu) wartości całego rozwiązania na podstawie jego znanej części.

Przykład rozwiązania dyskretngo problemu plecakowego.

i	p_i	w_i	p_i/w_i
1	40	2	20
2	30	5	6
3	50	10	5
4	10	5	2

$n = 4$, $W = 16$

Przykład rozwiązania asymetrycznego *TSP*.

1. Cykl Hamiltona zawiera dokładnie jeden element z każdego wiersza i dokładnie jeden element z każdej kolumny macierzy kosztów.

2. Jeżeli odejmiemy stałą od wszystkich elementów dowolnego wiersza lub dowolnej kolumny maciery kosztów, to waga każdego cyklu Hamiltona zmniejszy się dokładnie o tę stałą $-$ względny koszt wszystkich cykli pozostanie taki sam.

3. Jeżeli powtórzymy 2. do uzyskania w każdym wierszu i w każdej kolumnie co najmniej jednego zera, a pozostałe elementy macierzy kosztów będą nieujemne, to całkowita suma odjętych stałych będzie dolnym ograniczeniem długości jakiegokolwiek cyklu Hamiltona.

Zbiór rozwiązań będziemy dzielić na dwa podzbiory:

1. zbiór złożony z rozwiązań ***zawierających wyróżniony łuk***.

2. zbiór złożony z rozwiązań ***niezawierających wyróżnionego łuku***.

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 93 & 13 & 33 & 9 \\ 4 & \infty & 77 & 42 & 21 & 16 \\ 45 & 17 & \infty & 36 & 16 & 28 \\ 39 & 90 & 80 & \infty & 56 & 7 \\ 28 & 46 & 88 & 33 & \infty & 25 \\ 3 & 88 & 18 & 46 & 92 & \infty \end{bmatrix}$$

Postępujemy zgodnie z 2. i znajdujemy stałe (minimum) najpierw dla wierszy.

Otrzymujemy...

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 93 & 13 & 33 & 9 \\ 4 & \infty & 77 & 42 & 21 & 16 \\ 45 & 17 & \infty & 36 & 16 & 28 \\ 39 & 90 & 80 & \infty & 56 & 7 \\ 28 & 46 & 88 & 33 & \infty & 25 \\ 3 & 88 & 18 & 46 & 92 & \infty \end{bmatrix}$$

Postępujemy zgodnie z 2. i odejmujemy od wszystkich elementów w wierszach stałę (odszukane elementy). Otrzymujemy...

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 0 & 90 & 10 & 30 & 6 \\ 0 & \infty & 73 & 38 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & \infty & 20 & 0 & 12 \\ 32 & 83 & 73 & \infty & 49 & 0 \\ 3 & 21 & 63 & 8 & \infty & 0 \\ 0 & 85 & 15 & 43 & 89 & \infty \end{bmatrix}$$

Postępujemy zgodnie z 2. i znajdujemy stałe (minimum) dla kolumn.

Otrzymujemy…

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 0 & 90 & 10 & 30 & 6 \\ 0 & \infty & 73 & 38 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & \infty & 20 & 0 & 12 \\ 32 & 83 & 73 & \infty & 49 & 0 \\ 3 & 21 & 63 & \textcolor{red}{8} & \infty & 0 \\ 0 & 85 & \textcolor{red}{15} & 43 & 89 & \infty \end{bmatrix}$$

Postępujemy zgodnie z 2. i odejmujemy od wszystkich elementów w wierszach stałę (odszukane elementy). Otrzymujemy…

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 0 & 75 & 2 & 30 & 6 \\ 0 & \infty & 58 & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & \infty & 12 & 0 & 12 \\ 32 & 83 & 58 & \infty & 49 & 0 \\ 3 & 21 & 48 & \color{red}{0} & \infty & 0 \\ 0 & 85 & \color{red}{0} & 35 & 89 & \infty \end{bmatrix}$$

Po redukcji otrzymujemy dolne ograniczenie, $LB = 81$.

Kandydatami do wykonania podziału są łuki mające, w zredukowanej macierzy, koszt równy $ZERO$:

- $< 1, 2 >$,
- $< 2, 1 >$,
- $< 3, 5 >$,
- $< 4, 6 >$,
- $< 5, 4 >$,
- $< 5, 6 >$,
- $< 6, 3 >$.

Wybieramy ten, który ma najwyższy optymistyczny koszt wyłączenia.

Jeżeli wyłączymy odcinek $< i, j >$, to z miasta i musimy wyruszyć do miasta innego niż j, a do miasta j musimy dotrzeć z miasta różnego od i.

Rozważmy odcinek $< 1, 2 >$.
Jeżeli go wyłączymy, to z miasta „1" musimy wyruszyć do miasta różnego od „2", a minimalny koszt z tym związany jest równy 2 – minimalna wartość w wierszu 1 różna od tej na pozycji $< 1, 2 >$.

Z kolei do miasta „2" trzeba dotrzeć z miasta różnego niż „1" i minimalny koszt z tym związany jest równy 1 – minimalna wartość w kolumnie 2 różna od tej na pozycji $< 1, 2 >$.

Suma tych wartości (3) jest optymistycznym kosztem, który musimy ponieść wyłączając łuk $< 1, 2 >$.

Wartości dla każdego kandydata podane są w postaci indeksów przy elementach $ZERO$

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 0^{3} & 75 & 2 & 30 & 6 \\ 0^{12} & \infty & 58 & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & \infty & 12 & 0^{18} & 12 \\ 32 & 83 & 58 & \infty & 49 & 0^{38} \\ 3 & 21 & 48 & 0^{2} & \infty & 0^{0} \\ 0 & 85 & 0^{48} & 35 & 89 & \infty \end{bmatrix}$$

Podziału dokonujemy wyłączając łuk $< 6, 3 >$.

$\boxed{\text{wszystkie rozwiązania}}\ z^* \geqslant 81$

$z \geqslant 81\ \boxed{\text{rozwiązania z} < 6,3 >}\quad \boxed{\text{rozwiązania z} < 6,3 >}\ z \geqslant 81 + 48 = 129$

$$\begin{bmatrix} \infty & 0^{7} & \cdot & 2 & 30 & 6 \\ 0^{15} & \infty & \cdot & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & \cdot & 12 & 0^{18} & 12 \\ 32 & 83 & \cdot & \infty & 49 & 0^{32} \\ 3 & 21 & \cdot & 0^{2} & \infty & 0^{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \infty & 0 & 27 & 2 & 30 & 6 \\ 0 & \infty & 10 & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & \infty & 12 & 0 & 12 \\ 32 & 83 & 10 & \infty & 49 & 0 \\ 3 & 21 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 85 & \infty & 35 & 89 & \infty \end{bmatrix}$$

podział przez wyłączenie łuku $< 4,6 >$ blokujemy połączenie łukiem $< 6,3 >$

$\boxed{\text{rozwiązania z } <6,3>}\ z \geqslant 81$

$z \geqslant 81\ \boxed{\text{z } <6,3> \text{ i } <4,6>}\ \boxed{\text{z } <6,3> \text{ bez } <4,6>}\ z \geqslant 81 + 32 = 113$

$$\begin{bmatrix} \infty & 0^{3} & \cdot & 2 & 30 & \cdot \\ 0^{20} & \infty & \cdot & 30 & 17 & \cdot \\ 29 & 1 & \cdot & 12 & 0^{1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 21 & \cdot & 0^{5} & \infty & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

podział przez wyłączenie łuku $<2,1>$

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & \cdot & 2 & 30 & 6 \\ 0 & \infty & \cdot & 30 & 17 & 12 \\ 29 & 1 & \cdot & 12 & 0 & 12 \\ 0 & 51 & \cdot & \infty & 17 & \infty \\ 3 & 21 & \cdot & 0 & \infty & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

blokujemy połączenie łukiem $<4,6>$

$\boxed{\text{rozwiązania z} < 6,3 > \text{ i } < 4,6 >}$ $z \geqslant 81$

$z \geqslant 81$ $\boxed{\text{z} < 6,3 >, < 4,6 >, < 2,1 >}$ $\boxed{\text{z} < 6,3 >, < 4,6 > \text{ bez } < 2,1 >}$ $z \geqslant 81 + 20 = 101$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \infty & \cdot & 2 & 30 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \infty & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 21 & \cdot & 0 & \infty & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

zgodnie z 1. i 2. polepszamy LB o 3

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & \cdot & 2 & 30 & \cdot \\ \infty & \infty & \cdot & 13 & \cdot & \cdot \\ 26 & 1 & \cdot & \infty & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 21 & \cdot & 0 & \infty & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

blokujemy połączenie łukiem $< 2,1 >$