Capitolul 1
Comportarea semnalelor MA/MF
în cadrul blocurilor de radiofrecven__

1. Caracteristica de transfer a circuitelor rezonante deriva_ie.

Fie amplificatorul cu circuit rezonant deriva_ie din figura de mai jos. Se dau: $y_{12} = 0$, $y_{21} = 20$ mA / V, $g_{11} = 0,5$ mA / V, $g_{22} = 20$ µA / V, $C_{22} = 10$ pF la $f_0 = 1$ MHz. De asemenea se cunosc L = 20 µH _i R = 8 kΩ. Se cer:

a) schema echivalent_ cu parametri Y ai amplificatorului;

b) valoarea condensatorului C pentru ca frecven_a de rezonan__ a circuitului deriva_ie s_ fie $f_r = f_0$;

c) factorul de calitate Q_t _i banda de trecere $B_{3\,dB}$ pentru circuitul rezonant deriva_ie;

d) factorul de transfer H (ω_0) al etajului la frecven_a f_0 ;

e) expresiile pentru factorul de transfer normat, pentru argumentul factorului de transfer _i pentru timpul de întârziere de grup, func_ie de frecven__.

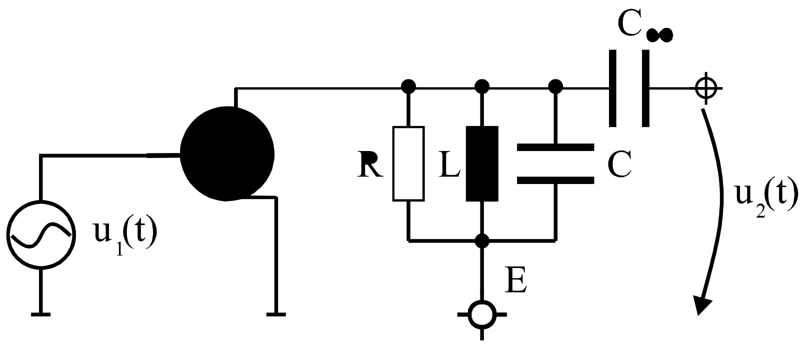

Figura 01.01.01. Amplificator cu circuit rezonant deriva_ie.

Rezolvare.

a) Se pleac_ de la schema echivalent_ cu parametri Y ai tranzistorului în conexiune EC.

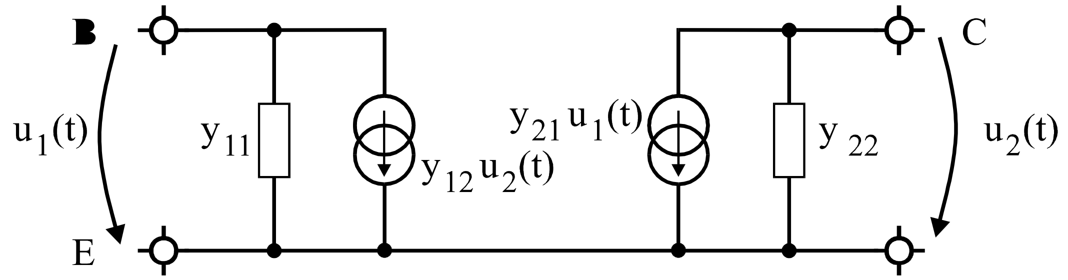

Figura 01.01.02. Schema echivalent_ cu parametri Y ai tranzistorului.

În cadrul schemei din figura 01.01.02 admitan_ele y_{11} _i y_{22} sunt date de rela_iile

$$y_{11} = g_{11} + j\omega C_{11},$$

$$y_{22} = g_{22} + j\omega C_{22}. \qquad (01.01.01)$$

Ca urmare schema echivalent_ a amplificatorului devine cea prezentat_ în cadrul figurii 01.01.03.

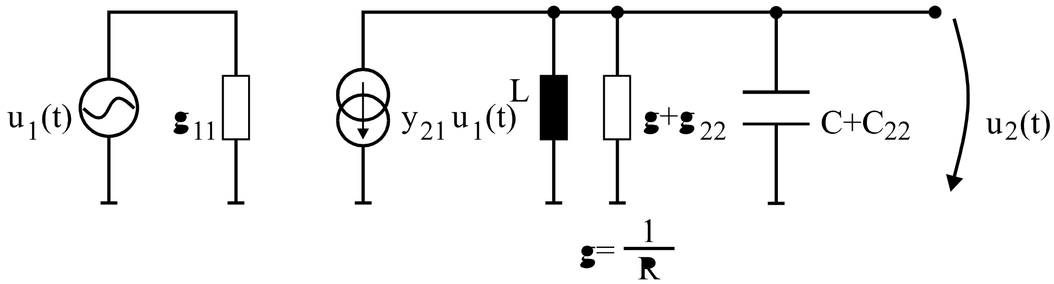

Figura 01.01.03. Schema echivalent_ a amplificatorului.

b) Frecven_a de rezonan__ este:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_{22})}} \quad , \tag{01.01.02}$$

deci

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} - C_{22} = 1{,}25\ nF \quad . \tag{01.01.03}$$

c) Factorul de calitate _i banda la 3 dB sunt date de expresiile:

$$Q=\frac{R_{22}\_R}{\omega_0 L}=\frac{\frac{R}{g_{22}}}{\omega_0 L(R+\frac{1}{g_{22}})}=\frac{R}{\omega_0 L(Rg_{22}+1)}\_54 \ ,$$

(01.01.04)

_i

$$B_{3\,dB}=\frac{f_0}{Q}=18{,}5\ kHz\ . \qquad (01.01.05)$$

d) Factorul de transfer H (ω_0) al etajului se poate deduce din expresia:

$$\underline{H}(\omega)=-g_m\underline{Z}_S=-\underline{y}_{21}\underline{Z}_S\ , \qquad (01.01.06)$$

unde

$$\underline{Y}_S=\underline{y}_{22}+\frac{1}{R}-\frac{1}{j\omega L}+j\omega C=g_{22}+j\omega C_{22}+\frac{1}{R}-\frac{1}{j\omega L}+j\omega C=$$
$$=\frac{1}{R_t}+j(\omega(C+C_{22})-\frac{1}{\omega L})=\frac{1}{R_t}(1+jx)\ .$$

(01.01.07)

Ca urmare, expresia impedan_ei de sarcin_ Z_S devine

$$\underline{Z}_S=\frac{R_t}{1+jx}\ , \qquad (01.01.08)$$

unde variabila normat_ x este

$$x=R_t\ (\omega C_t-\frac{1}{\omega L})=\omega C_t R_t\ (1-\frac{1}{\omega^2 L C_t})=$$
$$=\omega C_t R_t\ (1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})=\ \omega_0 C_t R_t(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})=\beta Q\ ,$$

(01.01.09)

cu

$$\beta = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \ \_i \ Q = \omega_0 C_t R_t \ . \qquad (01.01.10)$$

Dac_ intereseaz_ comportarea amplificatorului în jurul frecven_ei de rezonan__ se poate folosi aproxima_ia de band_ îngust_, adic_:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \ \_ \ \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \ , \qquad (01.01.11)$$

deci

$$x \ \_ \ Q \frac{2 \ \Delta\omega}{\omega_0} \ . \qquad (01.01.12)$$

Dup_ efectuarea calculelor la frecven_a de rezonan__ se ob_ine $R_t = 6{,}9\ k\Omega$ _i $H(\omega_0) = 137{,}93$.

e) Conform expresiilor (01.01.06)-(01.01.08) factorul de transfer $H(\omega)$ al etajului este

$$\underline{H}(\omega) = -\frac{\underline{y_{21}} R_t}{1 + jx} \ , \qquad (01.01.13)$$

sau, _inând cont de expresia factorului de transfer la frecven_a de rezonan__,

$$\left| \frac{\underline{H}(\omega)}{\underline{H}(\omega_0)} \right| = \left| \frac{1}{1 + jx} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad (01.01.14)$$

_i

$$\underline{H}(\omega) = -\frac{g_m R_t}{1 + x^2}(1 - jx) = \frac{\underline{H}(\omega_0)}{1 + x^2}(-1 + jx) \ . \qquad (01.01.15)$$

De aici se ob_ine

_ = arg H(ω) = π - arctg x (01.01.16)

(valoarea complex_ a lui A_V indic_ faptul c_ apar_ine cadranelor II _i III). Timpul de întârziere de grup este:

$$\tau_g = -\frac{d\_}{d\omega} = -\frac{d(arctg\,A_V)}{d\omega} = -\frac{d(\pi - arctg\,x)}{d\omega} = \frac{d(arctg\,x)}{d\omega} =$$

$$= \frac{d(arctg\,x)}{dx}\frac{dx}{d\omega} = \frac{1}{1+x^2}\frac{dx}{d\omega} = \frac{Q}{1+x^2}\left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega^2}\right) = \frac{Q}{1+x^2}\frac{\omega_0^2+\omega^2}{\omega_0\,\omega^2}.$$

(01.01.17)

În cazul aproxima_iei de band_ îngust_ ecua_ia de mai sus se poate scrie:

$$\tau_g - \frac{1}{1+x^2}\frac{2Q\,\omega_0^2}{\omega_0^3} = \frac{2Q}{\omega_0(1+x^2)} = \frac{\frac{2f_0}{B_{3dB}}}{2\pi f_0(1+x^2)} = \frac{1}{\pi B_{3dB}(1+x}$$

(01.01.18)

deci

$$\tau_{g0} - \frac{1}{\pi B_{3dB}}\ ,\ \tau_g - \frac{\tau_{g0}}{1+x^2}\ . \qquad (01.01.19)$$

În cadrul figurii 01.01.04. sunt prezentate varia_iile factorului de transfer normat, a argumentului factorului de transfer arg H(ω) _i a timpului de întârziere de grup în func_ie de frecven__.

2. Influen_a caracteristicii de transfer a circuitelor rezonante deriva_ie asupra semnalului MA.

La intrarea etajului amplificator cu circuit rezonant acordat deriva_ie din problema precedent_ se aplic_ un semnal de forma:

$$u_1(t) = U_{10}\left(1 + A\sum_{k=1}^{5}\cos k\,\omega_m t\right)\cos\omega_0 t\ , \qquad (01.02.01)$$

unde U_{10} = 3 mV, A = 0,1, f_m = 2 kHz, f_0 = 1 MHz. Se cere:
a) caracteristicile semnalului de intrare;
b) banda ocupat_ de semnalul de intrare;
c) expresia semnalului la ie_ire;
d) gradul de modula_ie al semnalului $u_2(t)$.

Rezolvare.

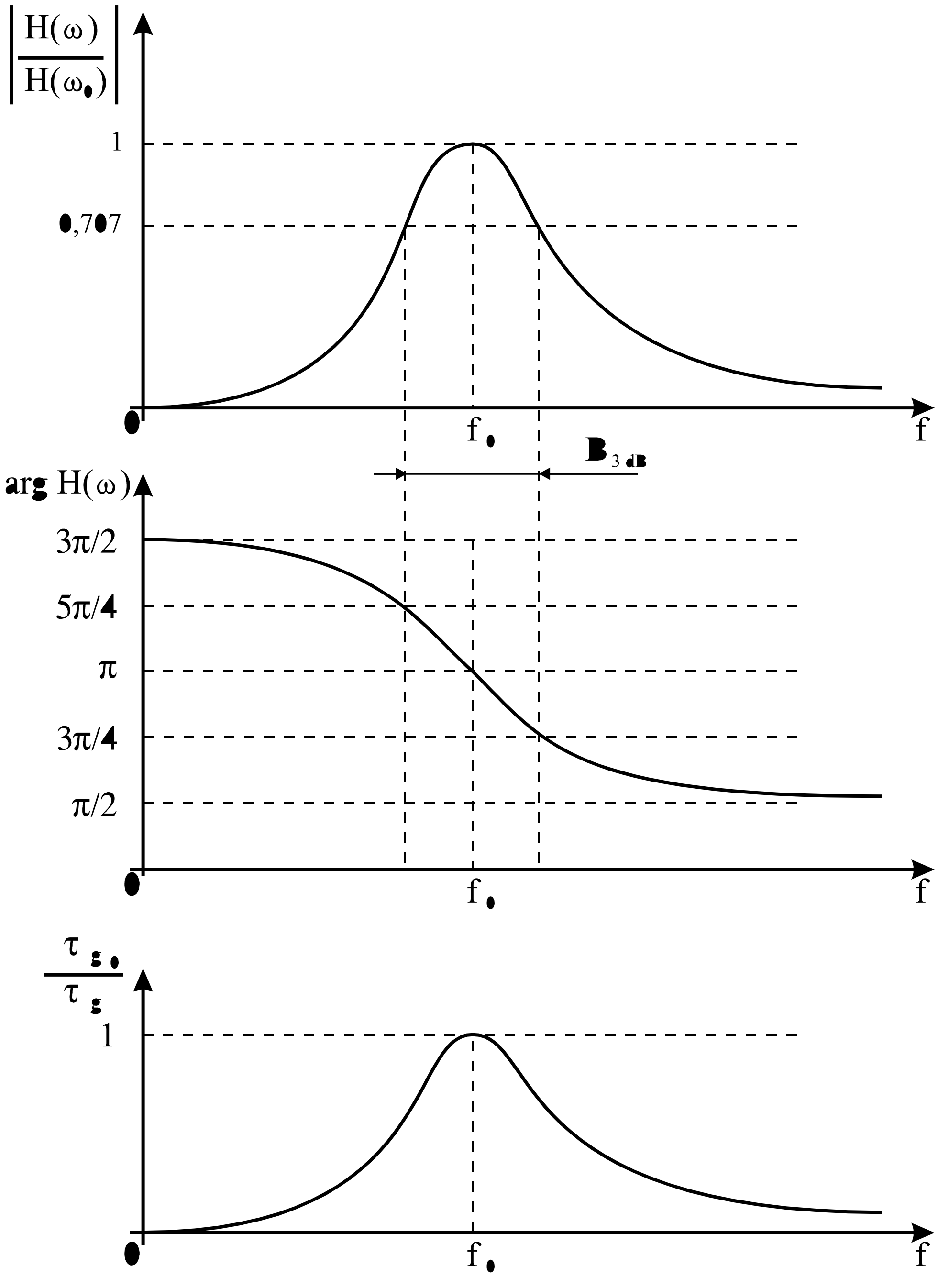

Figura 01.01.04. Varia_ia parametrilor etajului func_ie de frecven__.

a) Se remarc_ faptul c_ $u_1(t)$ este un semnal cu modula_ie în amplitudine, fiind evident_ similitudinea cu forma general_ a semnalelor MA:

$$u(t) \tag{01.02.02}$$

unde f(t) este semnalul modulator normat:

$$f(t)=\frac{g(t)}{\max\limits_{t\in\_}\_\, g(t)\,\_}\ , \qquad (01.02.03)$$

iar g(t) este semnalul modulator. Gradul de modula_ie al semnalului $u_1(t)$ este dat de:

$$m_1=\frac{A_{\max}-A_{\min}}{A_{\max}+A_{\min}}\ , \qquad (01.02.04)$$

unde

$$A_{\max}=U_{10}\left(1+A\sum_{k=1}^{5}1\right)=U_{10}(1+5A)\ \text{\_i}$$
$$A_{\min}=U_{10}\left(1+A\sum_{k=1}^{5}(-1)\right)=U_{10}(1-5A)\ , \qquad (01.02.05)$$

deci este vorba de un semnal MA având gradul de modula_ie subunitar:

$$m_1=\frac{(1+5A)-(1-5A)}{(1+5A)+(1-5A)}=\frac{10\ A}{2}=5\ A=0{,}5\ . \qquad (01.02.06)$$

Se determin_ spectrul semnalului $u_1(t)$:

$$u_1(t)=U_{10}\left(1+A\sum_{k=1}^{5}\cos k\omega_m t\right)\cos\omega_0 t=$$
$$=U_{10}\left(\cos\omega_0 t+A\sum_{k=1}^{5}\cos k\omega_m t\ \cos\omega_0 t\right)=$$
$$=U_{10}\left(\cos\omega_0 t+\frac{A}{2}\sum_{k=1}^{5}\cos(\omega_0+k\ \omega_m)\,t+\frac{A}{2}\sum_{k=1}^{5}\cos(\omega_0-k\ \omega_m)\,t\right).$$

(01.02.07)

Se constat_ c_ spectrul semnalului $u_1(t)$ prezentat în figura 01.02.01 con_ine:

- o component_ pe frecven_a f_0 de amplitudine U_{10} ;
- câte o component_ pe frecven_ele $f_0 \pm k f_m$ având amplitudinea ½ $U_{10}A$, cu k = 1 ... 5.

b) Banda ocupat_ de semnalul $u_1(t)$ este dat_ de:

$$B_{U1}=f_{S\max}-f_{S\min}=(f_0+5\ f_m)-(f_0-5\ f_m)=10\ f_m=20\ kHz\ .$$

(01.02.08)

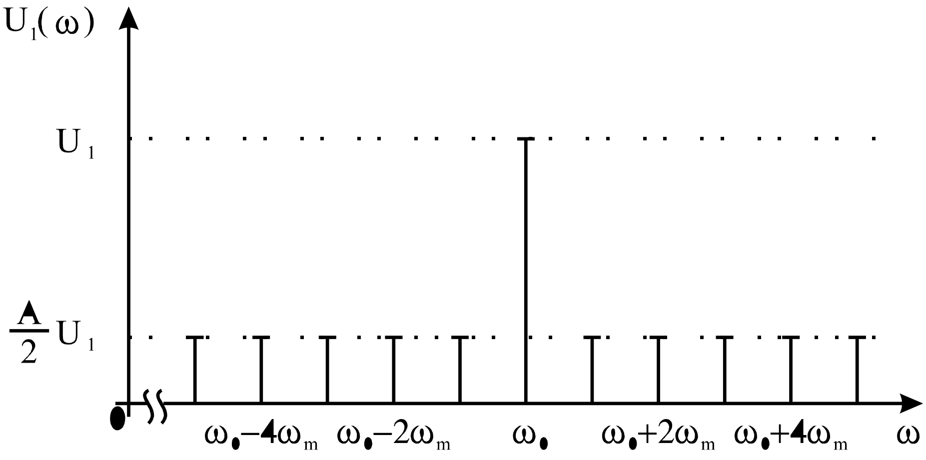

Figura 01.02.01. Spectrul semnalului $u_1(t)$.

c) Fiecare component_ spectral_ a semnalului $u_1(t)$ va fi amplificat_ cu câ_tigul $\underline{H}(\omega)$ evaluat la frecven_a componentei analizate (calculul se face prin aplicarea metodei suprapunerii efectelor _i a metodei armonice). Astfel:

$$u_2(t) = U_{10}\Big(\underline{H}(\omega_0)\cos\omega_0 t + \frac{A}{2}\sum_{k=1}^{5}\underline{H}(\omega_0 + k\omega_m)\cos(\omega_0 + k\omega_m$$

$$+\frac{A}{2}\sum_{k=1}^{5}\underline{H}(\omega_0 - k\omega_m)\cos(\omega_0 - k\omega_m)t\Big).$$

(01.02.09)

Întrucât amplificatorul trece-band_ considerat are frecven_a central_ (frecven_a de rezonan__ a circuitului RLC deriva_ie) egal_ cu frecven_a purt_toarei semnalului MA $u_1(t)$, se introduc nota_iile:

$$\underline{H}(\omega_0)=H_0\ ,\underline{H}(\omega_0+k\omega_m)=\frac{H_0}{1+jx_k}\ ,\underline{H}(\omega_0-k\omega_m)=\frac{H_0}{1+jx_{-k}}$$

(01.02.10)

cu

$$x_k=x_{\omega_0+k\omega_m}\ \_i\ x_{-k}=x_{\omega_0-k\omega_m}\ ,$$

(01.02.11)

respectiv

$$\underline{H}(\omega_0 + k\omega_m) = \frac{H_0}{\sqrt{1+x_k^2}\, e^{j\,arctg\,x_k}},\ \underline{H}(\omega_0 - k\omega_m) = \frac{H_0}{\sqrt{1+x_{-k}^2}\, e^{j a}}$$

(01.02.12)

deci semnalul de ie_ire are expresia

$$u_2(t) = U_{10} H_0 \Big(\cos \omega_0 t + \frac{A}{2} \sum_{k=1}^{5} \frac{e^{-j\,arctg\,x_{-k}}}{\sqrt{1+x_{-k}^2}} \cos(\omega_0 - k\omega_m)t +$$

$$+ \frac{A}{2} \sum_{k=1}^{5} \frac{e^{-j\,arctg\,x_k}}{\sqrt{1+x_k^2}} \cos(\omega_0 + k\omega_m)t \Big).$$

(01.02.13)

Considerând valabil_ aproxima_ia de band_ îngust_ (se are în vedere _i faptul c_ $5f_m \ll f_0$) se poate aproxima x_k _ - x_{-k}, deci:

$$\_\,_k = arctg\,x_k \_ - arctg\,x_{-k}, \qquad (01.02.14)$$

_i

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_k^2}} \_ \frac{1}{\sqrt{1+x_{-k}^2}}, \qquad (01.02.15)$$

unde

$$x_k \_ \frac{2\Delta f}{f_0} Q = \frac{2kf_m}{f_0} Q = k x_0,\ cu\ x_0 = \frac{2f_m}{f_0} Q. \qquad (01.02.16)$$

Deci rela_ia (01.02.13) devine succesiv:

$$u_2(t)=U_{20}(\cos\omega_0 t+\frac{A}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{\cos(\omega_0+k\omega_m)t}{\sqrt{1+k^2x_0^2}}e^{-j\_k}$$

$$+\frac{A}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{\cos(\omega_0-k\omega_m)t}{\sqrt{1+k^2x_0^2}}e^{j\_k})=U_{20}(\cos\omega_0 t+$$

$$+\frac{A}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{\cos((\omega_0+k\omega_m)t-\_k)}{\sqrt{1+k^2x_0^2}}+\frac{A}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{\cos((\omega_0-k\omega_m)t}{\sqrt{1+k^2x_0^2}}$$

$$=U_{20}(\cos\omega_0 t+\frac{A}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{\cos((\omega_0+k\omega_m)t-\_k)+\cos((\omega_0-k\omega}{\sqrt{1+k^2x_0^2}}$$

$$=U_{20}(\cos\omega_0 t+A\sum_{k=1}^{5}\frac{\cos\omega_0 t\cos(k\omega_m t-\_k)}{\sqrt{1+k^2x_0^2}})=$$

$$=U_{20}(1+A\sum_{k=1}^{5}\frac{\cos(k\omega_m t-\_k)}{\sqrt{1+k^2x_0^2}})\cos\omega_0 t\ .$$

(01.02.17)

d) Din expresia (01.02.17) rezult_ gradul de modula_ie m_2 al semnalului de ie_ire:

$$m_2=\frac{(1+A\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{\sqrt{1+k^2x_0^2}})-(1-A\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{\sqrt{1+k^2x_0^2}})}{(1+A\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{\sqrt{1+k^2x_0^2}})+(1-A\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{\sqrt{1+k^2x_0^2}})}=$$

$$=A\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{\sqrt{1+k^2x_0^2}}=0{,}417<m_1=5\ A=0{,}5\ .$$

(01.02.18)

Deci gradul de modula_ie m_2 al semnalului de ie_ire este inferior celui de la intrarea etajului.

3. Influen_a func_iei de transfer a circuitelor rezonante deriva_ie asupra semnalului MF. Analiz_ cu metoda cvasista_ionar_.

La intrarea etajului amplificator cu circuit rezonant deriva_ie analizat în problema 1 se aplic_ un semnal cu modula_ie în frecven__ având expresia:

$$\mathbf{u_1(t) = U_{10} \cos(\omega_0 t + 5 \sin \omega_m t)}, \qquad \textbf{(01.03.01)}$$

unde U_{10} = 2 mV, f_m = 200 Hz, f_0 = 1 MHz. S_ se precizeze:

a) dac_ sunt îndeplinite condi_iile pentru aplicarea metodei cvasista_ionare;

b) amplitudinea semnalului $u_2(t)$ ob_inut la ie_irea etajului;

c) faza semnalului $u_2(t)$;

d) factorul de distorsiuni neliniare de ordinul 3.

Rezolvare.

a) Banda ocupat_ de semnalul MF este dat_ de formula de aproximare a lui Carson:

(01.03.02)

unde f_m = 200 Hz, $\beta = 5$ (indicele de modula_ie în frecven__); deci B_{MF} = 3,294 kHz < B_{3dB} = 18,5 kHz. În cadrul metodei cvasista_ionare se consider_ c_ se poate lucra cu frecven_a instantanee a semnalului

$$\omega_i(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos \omega_m t \qquad (01.03.03)$$

ca _i cum aceasta ar fi constant_ (deci $\omega_i(t) \leftrightarrow \omega_0$).

Condi_iile de regim cvasista_ionar sunt:

1. $2\,\Delta f < B_{3\,dB}$, unde $2\,\Delta f = 2\, f_m\, \beta$ = 2 kHz < $B_{3\,dB}$ = 18,5kHz ; (01.03.04)

2. $f_m \ll \Delta f$. (01.03.05)

Condi_iile (01.03.04) _i (01.03.05) se pot compactiza în rela_ia:

(01.03.06)

Dac_ în expresia (01.03.06) se înlocuiesc datele problemei se ob_ine 0,0006 < 1, evident adev_rat_, deci este îndeplinit_ condi_ia de regim cvasista_ionar.

b) Intereseaz_ amplitudinea semnalului $u_2(t)$ _i faza sa:

$$u_2(t) = U_2(t) \cos(\omega_0 t + \_{}_2(t)) . \qquad (01.03.07)$$

Amplitudinea $U_2(t)$ a semnalului de ie_ire va fi dat_ de:

$$U_2(t) = U_{10}\frac{H(\omega_0)}{\sqrt{1+x_i^2}} \quad , \tag{01.03.08}$$

unde termenul

$$\frac{H(\omega_0)}{\sqrt{1+x_i^2}}$$

reprezint_ amplificarea semnalului u_1 (t) de frecven__ instantanee ω_i (t), iar variabila normat_ x_i este dat_ de

$$x_i = Q\left(\frac{\omega_i}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_i}\right) \_ Q\frac{2(\omega_i - \omega_0)}{\omega_0} = Q\frac{2\Delta f \cos \omega_m t}{f_0} = \frac{2\Delta f \cos \omega_m t}{B_{3dB}}$$

(01.03.09)

deoarece se poate utiliza aproxima_ia de band_ îngust_ pentru a putea simplifica calculele, fiind îndeplinit_ inegalitatea:

(01.03.10)

Una din condi_iile impuse de cvasista_ionaritate fiind

$$\frac{\Delta f}{B_{3dB}} \gg 1 \quad , \tag{01.03.11}$$

deci $|x_i|$ « 1, se pot utiliza aproxima_iile deduse prin dezvoltare în serie Taylor în jurul punctului $x_i = 0$:

$$\sqrt{1+x_i} \_ 1 + \frac{x_i}{2} \_i \frac{1}{1+x_i} \_ 1 - x_i \quad pentru \quad x_i \gg 1 \quad , \tag{01.03.12}$$

rezultând:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_i^2}} \_ 1 - \frac{x_i^2}{2} \quad , \tag{01.03.13}$$

unde au fost neglija_i termenii de ordin mai mare sau egal cu 4. Ca urmare:

(01.03.14)

deci apare o modula_ie parazit_ în amplitudine în urma trecerii semnalului MF prin etajul selectiv. Gradul de modula_ie este dat de:

(01.03.15)

Se constat_ c_ semnalul $u_2(t)$ este modulat în amplitudine cu armonica a II-a a semnalului modulator.

Amplitudinea $U_2(t)$ a semnalului de ie_ire este

$$U_2(t) \_ U_{10} H(\omega_0)\left(1 - \left(\frac{\Delta f}{B_{3\,dB}}\right)^2\right) = 808{,}381\ mV\ .$$

(01.03.16)

c) Faza semnalului $u_2(t)$ este:

$\_{}_2(t) = \beta \sin \omega_m t - \operatorname{arctg} x_i$. (01.03.17)

Întrucât s-a ar_tat c_ x_i « 1, se poate utiliza dezvoltarea în serie Taylor a func_iei arctg:

$\operatorname{arctg} x_i \_ x_i - x_i^3 / 3$; (01.03.18)

dup_ neglijarea termenului de ordin 3 _i remarcând faptul c_

$$x_i \_ \frac{2\ \Delta f}{B_{3\,dB}} \cos \omega_m t\ , \qquad (01.03.19)$$

se ob_ine rela_ia care d_ varia_ia temporal_ a fazei instantanee:

$$\_\ _2 (t)\ \_\ \beta \sin \omega_m t - \frac{2\Delta f}{B_{3dB}} \left(1 - \left(\frac{\Delta f}{B_{3dB}}\right)^2\right) \cos \omega_m t + \frac{1}{12} \left(\frac{2\Delta f}{B_{3dB}} \right.$$

$$\_\ \beta \sin \omega_m t - \frac{2\Delta f}{B_{3dB}} \cos \omega_m t + \frac{1}{12} \left(\frac{2\Delta f}{B_{3dB}} \right)^3 \cos 3\omega_m$$

(01.03.20)

Fie $\psi \in [\, 0 ; 2\pi \,)$ astfel încât:

(01.03.21)

evident ψ - constant. Atunci _ $_2$ (t) va fi dat de:

(01.03.22)

Deci, în cazul în care semnalul respect_ condi_iile de regim cvasista_ionar, în urma trecerii printr-un amplificator cu circuit rezonant deriva_ie RLC, nu apare o modula_ie de faz_ parazit_ semnificativ_, ci numai o întârziere (un defazaj).

Ca urmare, _inând seama de faptul c_ informa_ia este con_inut_ în faz_ _i nu în amplitudine, nu apar distorsiuni semnificative ale semnalului demodulat în urma utiliz_rii acestui tip de amplificator trece-band_ pentru recep_ia semnalelor MF.

Observa_ie:

Modula_ia parazit_ de amplitudine poate fi eliminat_ prin amplificare-limitare. În figura 01.03.01 este dat_ o schem_ tipic_ de eliminare a modula_iei parazite de amplitudine.

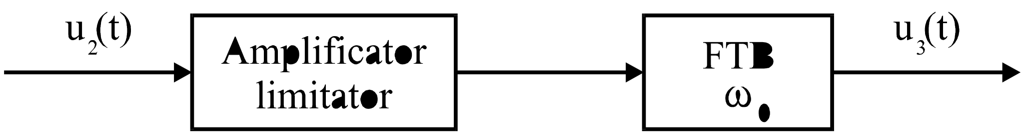

Figura 01.03.01. Schem_ bloc de eliminare a modula_iei parazite de amplitudine a semnalului MF.

d) Factorul de distorsiuni neliniare de ordinul 3 datorate modula_iei parazite de faz_ este

(01.03.23)

Deci distorsiunile de faz_ nu au o pondere semnificativ_.

4. Influen_a func_iei de transfer a circuitelor rezonante deriva_ie asupra unui semnal MF. Analiz_ cu metoda armonic_.

La intrarea unui etaj amplificator cu circuit rezonant deriva_ie de genul celui analizat în problema 1 se aplic_ un semnal cu modula_ie în frecven__ având expresia:

$u_1(t) = U_1 \cos(\omega_0 t + \beta_1 \sin \omega_m t)$,

unde $U_1 = 2$ mV, $f_m = 10$ kHz, $f_0 = 30$ MHz, $\beta_1 = 5$. Factorul de calitate al circuitului rezonant este Q = 50. S_ se precizeze:

a) spectrul semnalului de ie_ire $u_2(t)$;

b) indicele de modula_ie în frecven__ β_2 al semnalului de ie_ire $u_2(t)$, în situa_ia în care $\beta_1 << 1$. Caz particular: $\beta_1 = 0,1$.

Rezolvare.

a) Deoarece

$$\cos(x \sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{m\geq 1} J_{2m}(x)\cos 2m\theta ,$$

$$\sin(x \sin\theta) = 2\sum_{m\geq 1} J_{2m+1}(x)\sin(2m+1)\theta ,$$

(unde $J_n(x)$ este func_ia Bessel de spe_a I _i ordin n, având proprietatea $J_{-n}(x) = J_n(x)$), semnalul $u_1(t)$ poate fi scris ca:

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega_0 t + \beta_1 \sin \omega_m t) = U_1[\cos \omega_0 t \cos(\beta_1 \sin \omega_m t) - \sin \omega_0 t \sin(\beta_1 \sin \omega_m t)] = U_1 \sum_{k\in \_} J_k(\beta_1)\cos(\omega_0 + k\omega_m)t ,$$

(01.04.01)

unde cu I s-a notat mul_imea numerelor întregi. Semnalul de ie_ire $u_2(t)$ este dat de

$$u_2(t)=U_1H(\omega_0)\sum_{k\in\_}\frac{J_k(\beta_1)}{\sqrt{1+x_k^2}}\cos[(\omega_0+k\omega_m)t-arctg\,x_k]\;,$$

(01.04.02)

cu

$$x_k=Q(\frac{f_0+kf_m}{f_0}-\frac{f_0}{f_0+kf_m})=Q\frac{kf_m(2f_0+kf_m)}{f_0(f_0+kf_m)}\;,(\_)k\in\_\;.$$

Pentru k suficient de mic, se poate folosi aproxima_ia de band_ îngust_

$$x_k\_\frac{2kf_m}{f_0}Q\gg 1\;\_i\;arctg\,x_k\_x_k\,.$$

b) Dac_ $\beta_1 << 1$, semnificative pentru semnalul $u_1(t)$ sunt componentele pe frecven_ele f_0 _i $f_0 \pm f_m$. Totodat_ sunt valabile aproxima_iile:

* $J_0(\beta)\_1$ (01.04.03)

* din

$$\int_0^y xJ_0(x)dx=yJ_1(y)\;,$$

avem

$$\int_0^y xJ_0(x)dx\_\int_0^y x\,dx=\frac{y^2}{2}\;,$$

deci

$J_1(\beta)=J_{-1}(\beta)\_\beta/2$; (01.04.04)

* din

$$J_{n+1}(x)=\frac{2J_n(x)}{x}-J_{n-1}(x)\;,$$

pentru n = 1 rezult_

$J_2(\beta)\_0$. (01.04.05).

Deci semnalul de intrare $u_1(t)$ se aproximeaz_ ca fiind

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega_0 t + \beta_1 \sin \omega_m t) \_ U_1 [J_{-1}(\beta_1)\cos(\omega_0 - \omega_m)$$
$$+ J_0(\beta_1)\cos \omega_0 t + J_1(\beta_1)\cos(\omega_0 + \omega_m)t],$$

iar semnalul de ie_ire u_2 (t), evaluat cu metoda armonic_, este:

$$u_2(t) \_ U_1 H(\omega_0)[\frac{J_{-1}(\beta_1)}{\sqrt{1 + x_{-1}^2}} \cos(\omega_0 - \omega_m)t + J_0(\beta_1)\cos \omega_0$$
$$+ \frac{J_1(\beta_1)}{\sqrt{1 + x_1^2}} \cos(\omega_0 + \omega_m)t] = U_1 H(\omega_0)[J_{-1}(\beta_2)\cos(\omega_0 - \omega_m$$
$$+ J_0(\beta_2)\cos \omega_0 t + J_1(\beta_2)\cos(\omega_0 + \omega_m)t],$$

unde s-a folosit nota_ia

$$\beta_2 = \frac{\beta_1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \_i \quad x = x_1 = | x_{-1} | .$$

Conform rela_iilor (01.04.03) - (01.04.05), rezult_

$$J_0(\beta_1) \_ 1 \_ J_0(\beta_2),$$

$$\frac{J_1(\beta_1)}{\sqrt{1 + x_1^2}} \_ \frac{\beta_1}{2\sqrt{1 + x_1^2}} = \frac{\beta_2}{2} \_ J_1(\beta_2), \ \_i$$

$$\frac{J_{-1}(\beta_1)}{\sqrt{1 + x_{-1}^2}} \_ J_{-1}(\beta_2).$$

Deci semnalul de ie_ire va avea indicele de modula_ie

$$\beta_2 \_ \frac{\beta_1}{\sqrt{1 + (\frac{2 f_m}{f_0})^2 Q^2}} = 0{,}09995.$$

Modificarea indicelui de modula_ie este de aproximativ 0,05 %, deci poate fi considerat_ neglijabil_.

5. Influen_a func_iei de transfer a circuitelor rezonante deriva_ie asupra unui semnal MF. Analiz_ cu metoda armonic_.

La intrarea unui etaj amplificator cu circuit rezonant deriva_ie de genul celui analizat în problema 1 se aplic_ un semnal cu modula_ie în frecven__ ideal având expresia:

$u_1(t) = U_1 \cos(\omega_0 t + \beta \sin \omega_m t)$,

unde $U_1 = 2$ mV, $f_m = 10$ kHz, $f_0 = 100$ MHz, $\beta = 5$. Factorul de calitate al circuitului rezonant este Q = 50. Utilizând analiza armonic_, se cere determinarea:

a) gradului de modula_ie parazit_ a anvelopei semnalului $u_2(t)$ ob_inut la ie_ire;

b) expresia semnalului $u_{DEM}(t)$ de la ie_irea unui demodulator ideal (format din circuit de derivare _i detector de anvelop_) la intrarea c_ruia se aplic_ $u_2(t)$;

c) distorsiunile semnalului $u_{DEM}(t)$.

Rezolvare.

a) Unul dintre efectele trecerii unui semnal MF printr-un filtru trece-band_ const_ în apari_ia modula_iei parazite în amplitudine. Dac_ la intrare în etajul amplificator anvelopa semnalului MF are o amplitudine constant_ U_1, în urma modific_rii componentelor va apare o modula_ie parazit_ care va fi pus_ în eviden__ prin metoda armonic_. Se poate scrie

$$u_2(t) = U_1 H_0 \sum_{k \in \_} \frac{J_k(\beta)}{\sqrt{1 + x_k^2}} \cos[(\omega_0 + k\omega_m)t - arctg\, x_k],$$

unde cu I s-a notat mul_imea numerelor întregi, _i, pentru un calcul simplificat s-a neglijat arctg x_k, aproxima_ie justificat_ pentru componentele aflate în cadrul benzii Carson a semnalului. De asemenea, se consider_ x_k _ - x_{-k} rezultând

$$u_2(t) = U_1 H(\omega_0)[(J_0(\beta) + 2\sum_{k \geq 1} \frac{J_{2k}(\beta)}{\sqrt{1 + x_{2k}^2}} \cos 2k\omega_m t)\cos \omega_0 t -$$

$$-(2\sum_{k \geq 1} \frac{J_{2k+1}(\beta)}{\sqrt{1 + x_{2k+1}^2}} \sin(2k+1)\omega_m t)\sin \omega_0 t],$$

de unde se poate determina anvelopa semnalului ca fiind

$$A(t) = U_1 H(\omega_0)\left(\left(J_0(\beta) + 2\sum_{k\geq 1}\frac{J_{2k}(\beta)\cos 2k\omega_m t}{\sqrt{1+x_{2k}^2}}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(2\sum_{k\geq 1}\frac{J_{2k+1}(\beta)\sin(2k+1)\omega_m t}{\sqrt{1+x_{2k+1}^2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = U_1 H(\omega_0)\bullet$$

$$\bullet\left(\left(\sum_{k\in\_}\frac{J_{2k}(\beta)}{\sqrt{1+x_{2k}^2}}\cos 2k\omega_m t\right)^2 + \left(\sum_{k\in\_}\frac{J_{2k+1}(\beta)}{\sqrt{1+x_{2k+1}^2}}\sin(2k+1)\omega_m\right.\right.$$

(01.05.01)

Observa_ie:

În cazul în care filtrul trece-band_ ar fi ideal (nu ar interveni modific_ri diferen_iate ale componentelor), s-ar remarca faptul c_ anvelopa ar avea o amplitudine constant_ _i anume

$$A(t) = U_1 H(\omega_0)\sqrt{\left(\sum_{k\in\_}\frac{J_{2k}(\beta)\cos 2k\omega_m t}{\sqrt{1+x_{2k}^2}}\right)^2 + \left(\sum_{k\in\_}\frac{J_{2k+1}(\beta)\sin}{\sqrt{1+}}\right.}$$

$$= U_1 H(\omega_0)\sqrt{\cos^2(\beta\sin\omega_m t) + \sin^2(\beta\sin\omega_m t)} = U_1$$

ceea ce se observ_ _i dac_ se analizeaz_ expresia

$u_2(t) = H(\omega_0)\, U_1 \cos(\omega_0 t + \beta \sin \omega_m t)$.

În continuare se analizeaz_ anvelopa A(t) pentru un filtru trece-band_ real. Având în vedere c_, practic, banda este limitat_ (formula lui Carson asigur_ c_ 99 % din energie se transfer_ în cadrul benzii $2 f_m(\beta + 1 + \beta^{½})$), deci valorile lui k pentru care componentele spectrale sunt semnificative se încadreaz_ în jurul lui 0, atunci $|x_k| << 1$, deci

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_k^2}} \_ \frac{1}{1+\frac{x_k^2}{2}} \_ 1 - \frac{x_k^2}{2} \_ 1 - k^2\frac{x_1^2}{2}, \text{ unde } x_1 = \frac{2f_m}{f_0}Q_0 .$$

Notând cu E domeniul valorilor de interes pentru k, _i anume valorile întregi cuprinse între $-2(\beta + 1 + \beta^{½})$ _i $2(\beta + 1 + \beta^{½})$, expresia (01.05.01) devine

$$A(t)\_U_1 H(\omega_0)[(\sum_{\substack{k\in E\\ k-par}} J_k(\beta)(1-\frac{k^2 x_1^2}{2})c$$

$$+(\sum_{\substack{k\in E\\ k-impar}} J_k(\beta)(1-\frac{k^2 x_1^2}{2})\sin k\omega_m t)^2]^{\frac{1}{2}} = U_1 H($$

$$-\frac{x_1^2}{2}\sum_{\substack{k\in E\\ k-par}} k^2 J_k(\beta)\cos\omega_m t)^2 + (\sin(\beta\sin\omega_m t) - \frac{x_1^2}{2}\sum_{\substack{k\in\\ k-im}}$$

(01.05.02)

Dar

$\frac{d^2\cos k\omega_m t}{d\omega_m^2} = -k^2 t^2 \cos k\omega_m t$,72deci, folosind prelungirea prin continuitate în punctul t = 0, se rescriu cele dou_ sume ce intervin în expresia amplitudinii:

$$\sum_{\substack{k\in E\\ k-par}} k^2 J_k(\beta)\cos k\omega_m t = -\frac{1}{t^2}\sum_{\substack{k\in E\\ k-par}} \frac{d^2}{d\omega_m^2}(k^2 J_k(\beta)\cos k\omega_m$$

$$= -\frac{1}{t^2}\frac{d^2}{d\omega_m^2}(\sum_{\substack{k\in E\\ k-par}} k^2 J_k(\beta)\cos k\omega_m t) = -\frac{1}{t^2}\frac{d^2}{d\omega_m^2}\cos(\beta\sin\omega_m$$

$$= -\frac{1}{t^2}\frac{d}{d\omega_m}(-\sin(\beta\sin\omega_m t)\bullet\beta t\cos\omega_m t) =$$

$$= \frac{\beta}{t}\frac{d}{d\omega_m}(\sin(\beta\sin\omega_m t)\cos\omega_m t) =$$

$$= \frac{\beta}{t}(\cos(\beta\sin\omega_m t)\bullet\beta t\cos^2\omega_m t - \sin(\beta\sin\omega_m t)t\sin\omega_m t) =$$

$$= \beta^2\cos(\beta\sin\omega_m t)\cos^2\omega_m t - \beta\sin(\beta\sin\omega_m t)\sin\omega_m t.$$

(01.05.03)

Similar

$$\sum_{\substack{k\in E\\ k\text{ - impar}}} k^2 J_k(\beta)\sin k\omega_m t = -\frac{1}{t^2}\sum_{\substack{k\in E\\ k\text{ - impar}}} \frac{d^2}{d\omega_m^2}(k^2 J_k(\beta)\sin k\omega_m$$

$$= -\frac{1}{t^2}\frac{d^2}{d\omega_m^2}(\sum_{\substack{k\in E\\ k\text{ - impar}}} k^2 J_k(\beta)\sin k\omega_m t) = -\frac{1}{t^2}\frac{d^2}{d\omega_m^2}\sin(\beta\sin\omega_m$$

$$= -\frac{1}{t^2}\frac{d}{d\omega_m}(\cos(\beta\sin\omega_m t)\bullet\beta t\cos\omega_m t) =$$

$$= \frac{\beta}{t}(\sin(\beta\sin\omega_m t)\bullet\beta t\cos^2\omega_m t + \cos(\beta\sin\omega_m t)t\sin\omega_m t$$

$$= \beta^2\sin(\beta\sin\omega_m t)\cos^2\omega_m t + \beta\cos(\beta\sin\omega_m t)\sin\omega_m t.$$

(01.05.04)

Ca urmare, notând $\alpha = x_1^2/2$, conform (01.05.03) _i (01.05.04), expresia (01.05.02) devine

$$A(t)\_U_1 H(\omega_0)[(\cos(\beta\sin\omega_m t) - \alpha\beta^2\cos(\beta\sin\omega_m t)\cos^2\omega$$

$$+\alpha\beta\sin(\beta\sin\omega_m t)\sin\omega_m t)^2 + (\sin(\beta\sin\omega_m t) -$$

$$-\alpha\beta^2\sin(\beta\sin\omega_m t)\cos^2\omega_m t - \alpha\beta\cos(\beta\sin\omega_m t)\sin\omega_m t)^2]$$

(01.05.05)

deci

$$\_\frac{A(t)}{U_1 H(\omega_0)}\_^2 = 1+\alpha^2\beta^4\cos^4\omega_m t + \alpha^2\beta^2\sin^2\omega_m t - 2\alpha\beta^2 co$$

$$= 1+\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta^2)\cos^2\omega_m t + \alpha^2\beta^4\cos^4\omega_m t =$$

$$= 1+\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^2(\alpha+2)\cos^2\omega_m t + \alpha^2\beta^4\cos^4\omega_m t =$$

$$= (\frac{\alpha+2}{2} - \alpha\beta\cos^2\omega_m t)^2 + 1 + \alpha^2\beta^2 - (\frac{\alpha+2}{2})^2 =$$

$$= (1+\frac{\alpha}{2} - \alpha\beta\cos^2\omega_m t)^2 + \alpha^2\beta^2 - \alpha - \frac{\alpha^2}{4}.$$

(01.05.06)

Dar $\alpha \beta << (\beta x_1^2)/2 < 1$ (s-a lucrat în ipoteza $x_1 << 1$), deci valoarea minim_ a anvelopei se ob_ine pentru $\cos^2 \omega_m t = 1$, iar cea maxim_ pentru $\cos^2 \omega_m t = 0$. Deci, presupunând c_ $\alpha << 1$, rezult_

$$A_{min} \_ U_1 H(\omega_0)\sqrt{1+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^2(\alpha+2)+\alpha^2\beta^4} =$$
$$= U_1 H_0 \sqrt{1-2\alpha\beta^2+\alpha^2\beta^4} = U_1 H_0 (1-\alpha\beta^2) \ ,$$

(01.05.07)

_i

$$A_{max} \_ U_1 H(\omega_0)\sqrt{1+\alpha^2\beta^2} \_ U_1 H(\omega_0)\left(1+\frac{\alpha^2\beta^2}{2}\right) .$$

(01.05.08)

Cu ajutorul rela_iilor (01.05.07) _i (01.05.08) se poate determina expresia gradului de modula_ie al semnalului $u_2(t)$ al semnalului de la ie_irea filtrului:

$$m_{OUT} = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} = \frac{-1+\alpha\beta^2+1+\frac{\alpha^2\beta^2}{2}}{1-\alpha\beta^2+1+\frac{\alpha^2\beta^2}{2}} = \frac{\alpha\beta^2+\frac{\alpha^2\beta^2}{2}}{2-\alpha\beta^2+\frac{\alpha^2\beta^2}{2}} =$$
$$= \frac{\frac{\alpha^2\beta^2}{2}(\alpha+2)}{2+\frac{\alpha^2\beta^2}{2}(\alpha-2)} \_ \frac{\alpha\beta^2(\alpha+2)}{4} \_ \frac{\alpha\beta^2}{2} = \frac{x_1^2\beta^2}{4} .$$

(01.05.09)

Observa_ie:

În calculele de mai sus s-a lucrat cu ipoteza $\alpha << 1$, care este valabil_ în cele mai multe cazuri. Spre exemplu, pentru cazul analizat în care $f_m = 10$ kHz, $f_S = 100$ MHz, Q = 50, se ob_ine

$$x_1 \_ \frac{2\Delta f}{f_s} Q = \frac{2 f_m}{f_s} Q = 0{,}01 \ ,$$

deci $\alpha = 5 \cdot 10^{-5} << 1$. De asemenea, se remarc_ faptul c_ este îndeplinit_ _i condi_ia $\alpha\beta << 1$.

Observa_ie:

Se remarc_ similitudinea rezultatelor ob_inute prin metodele cvasista_ionar_ _i armonic_. Dac_ în rela_ia (01.05.09) se înlocuie_te expresia lui x_1 _i se _ine cont de faptul c_ $\Delta f = \beta f_m$ se ob_ine rezultatul final al punctului b) de la problema 3.

b) Semnalul de ie_ire fiind

$$u_2(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \_(t)) \ ,$$

dup_ eliminarea modula_iei parazite a anvelopei, la intrarea demodulatorului semnalul poate fi scris ca:

$$u_{in\,dem}(t) = A\cos(\omega_0 t + \_(t)),$$

deci

$$\frac{d}{dt}u_{in\,dem}(t) = A[-(\omega_0 + \_`(t))\sin(\omega_0 t + \_(t))].$$

Dup_ demodularea de anvelop_ _i rejec_ia componentei continue se ob_ine:

$$u_{dem}(t) = A_0\,\_`(t). \qquad (01.05.10)$$

Pentru explicitarea expresiei (01.05.10) se determin_ expresia fazei instantanee _(t). Astfel

$$u_2(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \_(t)),$$

unde

$$A(t)\_U_1 H(\omega_0)\sqrt{(1+\frac{\alpha}{2}-\alpha\beta\cos^2\omega_m t)^2+\alpha^2\beta^2-\alpha-\frac{\alpha^2}{4}},$$

(01.05.11)

_i

$$tg\ \_(t) = \frac{\sum_{k\in\_}\frac{J_{2k}(\beta)}{\sqrt{1+x_{2k}^2}}\cos 2k\omega_m t}{\sum_{k\in\_}\frac{J_{2k+1}(\beta)}{\sqrt{1+x_{2k+1}^2}}\sin(2k+1)\omega_m t} =$$

$$= \frac{\sin(\beta\sin\omega_m t) - \alpha\beta(\beta\sin(\beta\sin\omega_m t)\cos^2\omega_m t + \cos(\beta\sin\omega}{\cos(\beta\sin\omega_m t) - \alpha\beta(\beta\cos(\beta\sin\omega_m t)\cos^2\omega_m t - \sin(\beta\sin\omega}$$

(01.05.12)

cu $\alpha = x_1^2 << 1$. Notând $\gamma = tg(\beta\sin\omega_m t)$, se ob_ine

$$tg\ \_(t)\ \_\ \gamma \frac{1-\alpha\beta^{2}\cos^{2}\omega_{m}t-\frac{\alpha\beta}{\gamma}\sin\omega_{m}t}{1-\alpha\beta^{2}\cos^{2}\omega_{m}t+\alpha\beta\gamma\sin\omega_{m}t}=\frac{\gamma-\frac{\alpha\beta\sin\omega_{m}t}{1-\alpha\beta^{2}\cos^{2}\omega_{m}t}}{1+\gamma\frac{\alpha\beta\sin\omega_{m}t}{1-\alpha\beta^{2}\cos^{2}\omega_{m}t}}$$

$$=tg(\beta\sin\omega_{m}t-arctg(\frac{\alpha\beta\sin\omega_{m}t}{1-\alpha\beta^{2}\cos^{2}\omega_{m}t})),$$

deci

$$\_(t)\_\beta\sin\omega_{m}t-arctg(\frac{\alpha\beta\sin\omega_{m}t}{1-\alpha\beta^{2}\cos^{2}\omega_{m}t}).$$

În ipoteza c_ $\alpha = x_1^2 << 1$ se pot face, succesiv, aproxima_iile

$$arctg(\frac{\alpha\beta\sin\omega_{m}t}{1-\alpha\beta^{2}\cos^{2}\omega_{m}t})\_arctg(\alpha\beta\sin\omega_{m}t)\_$$

$$\_\alpha\beta\sin\omega_{m}t-\frac{(\alpha\beta\sin\omega_{m}t)^{3}}{3},$$

deci

$$\_(t)=(1-\alpha)\beta\sin\omega_{m}t+\alpha^{3}\beta^{3}\frac{3\sin\omega_{m}t-\sin 3\omega_{m}t}{4}=$$

$$=(1-\alpha+\frac{3}{4}\alpha^{3}\beta^{2})\beta\sin\omega_{m}t-\frac{\alpha^{3}\beta^{3}}{4}\sin 3\omega_{m}t.$$

(01.05.13)

Neglijând termenii în α^3 rezult_

$$\_(t)\_(1-\alpha)\beta\sin\omega_{m}t.$$

(01.05.14)

Din rela_iile (01.05.10) _i (01.05.13) se ob_ine expresia semnalului de la ie_irea demodulatorului:

$$u_{dem}(t) = A_0 \_ `(t) =$$

$$= A_0 \beta \left[\left(1 - \alpha + \frac{3}{4} \alpha^3 \beta^2 \right) \beta \cos \omega_m t - \frac{3 \alpha^3 \beta^3}{4} \cos 3 \omega_m t \right] .$$

(01.05.15)

Observa_ie:

Pentru $\alpha = 0$ rezult_ $u_{dem}(t) = A_0 \cos \omega_m t$.

c) Distorsiunile neliniare de ordinul III sunt

$$\delta_3 = \frac{3 \alpha^3 \beta^3}{4 \left(1 - \alpha + \frac{3}{4} \alpha^3 \beta^2 \right)} = 2{,}34 \bullet 10^{-12} \quad ,$$

deci, în cazul considerat, neglijabile.

6. ***Influen_a func_iei de transfer a circuitelor rezonante deriva_ie asupra unui semnal MF. Reducerea spectrului semnalului MF. Analiz_ cu metoda armonic_.***

Un radiotelefon folose_te semnale MF cu devia_ia maxim_ de frecven__ $\Delta f = 5$ kHz _i frecven_a modulatoare $f_m \in [\, 300 ; 3600 \,]$ Hz. Receptorul are frecven_a intermediar_ $f_i = 10{,}7$ MHz, iar circuitele rezonante din amplificatorul de frecven__ intermediar_ realizeaz_ o caracteristic_ de frecven__ apropiat_ de cea a unui filtru trece-band_ ideal cu banda de trecere $B_{3\,dB} = 15$ kHz. Se presupune c_ defazajul introdus de filtru este neglijabil.

Dac_ receptorul este corect acordat _i dac_ $f_m = 3570$ Hz, se cer:

a) modula_ia parazit_ de amplitudine introdus_ de filtru;

b) indicele de modula_ie β_2 al semnalului $u_2(t)$ de la ie_irea filtrului;

c) coeficientul de distorsiuni neliniare al semnalului $u_2(t)$.

d) refacerea punctelor a) - c) în condi_iile în care devia_ia maxim_ de frecven__ este $\Delta f = 2{,}14$ kHz.

Rezolvare.

a) Dac_ $\Delta f = 5$ kHz _i $f_m = 3570$ Hz rezult_ indicele de modula_ie β_1 al semnalului $u_1(t)$ de la intrarea filtrului ca fiind $\beta_1 = 1{,}4$. Expresia semnalului $u_1(t)$ este

$$u_1(t)=U_1\cos(\omega_0 t+\beta_1\sin\omega_m t)=U_1[\cos\omega_0 t\cos(\beta_1\sin\omega_m t)-$$
$$-\sin\omega_0 t\sin(\beta_1\sin\omega_m t)]=U_1\sum_{k\in\_} J_k(\beta_1)\cos(\omega_0+k\omega_m)t\ ,$$

(01.06.01)

unde cu I s-a notat mul_imea numerelor întregi. Deoarece filtrul trece-band_ dispune de o band_ de trecere $B_{3\,dB} = 15$ kHz, mai redus_ decât banda semnalului MF (formula lui Carson precizeaz_ c_ semnalul MF are banda $B_{MF} = 2 f_m(\beta + 1 + \beta^{1/2}) = 25{,}58$ kHz) va apare fenomenul de reducere a spectrului prin pierderea unor componente spectrale semnificative. Filtrul trece-band_ va elimina componentele spectrale dep_rtate de purt_toare cu mai mult de ± 7,5 kHz. Ca urmare în expresia semnalului $u_2(t)$ vor r_mâne componentele spectrale al c_ror indice k respect_ inegalitatea

$$\_\,k\,\_\le\left[\frac{B_{3\,dB}}{2f_m}\right]=2\ ,$$

unde cu [x] s-a notat partea întreag_ a variabilei x, deci

$$u_2(t)=U_1 H(\omega_0)\sum_{k=-2}^{2} J_k(\beta_1)\cos(\omega_0+k\omega_m)t\ .$$

(01.06.02)

În expresia de mai sus s-a notat cu $H(\omega_0)$ modulul factorului de transfer al filtrului trece-band_, presupus constant. În figura 01.06.01 este prezentat spectrul semnalului $u_2(t)$ cu $U_{20}= H(\omega_0)\,U_1$.

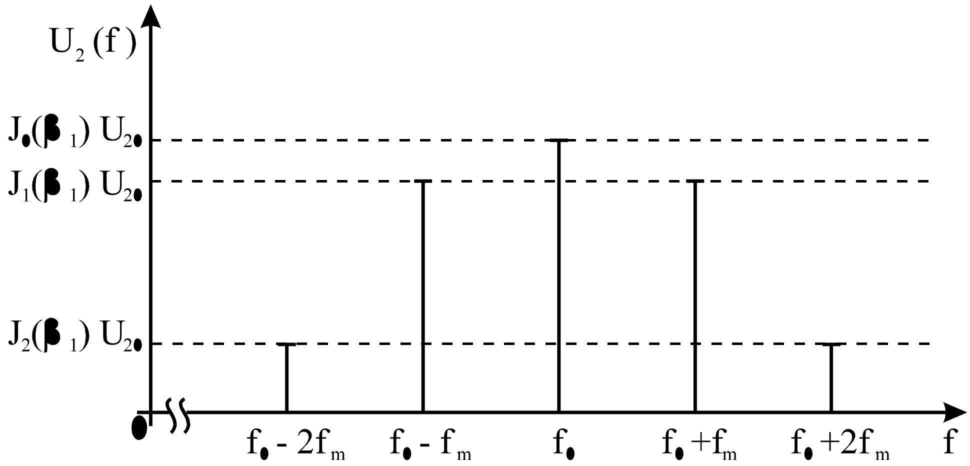

Figura 01.06.01. Spectrul semnalului $u_2(t)$.

Dezvoltând expresia (01.06.02) _i _inând cont de faptul c_ $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$ rezult_:

$$u_2(t)=U_1 H(\omega_0)[J_0(\beta_1)\cos\omega_0 t + J_1(\beta_1)\cos(\omega$$
$$- J_1(\beta_1)\cos(\omega_0 - \omega_m)t + J_2(\beta_1)\cos(\omega_0 + 2\omega$$
$$+ J_2(\beta_1)\cos(\omega_0 - 2\omega_m)t] = Re\{U_1 H(\omega_0)[J_0(\beta_1) + J$$
$$- J_1(\beta_1)e^{-j\omega_m t} + J_2(\beta_1)e^{2j\omega_m t} + J_2(\beta_1)e^{-2j\omega_m}$$
$$= U_1 H(\omega_0)\, Re\{\, [\, J_0(\beta_1) + 2j J_1(\beta_1)\sin\omega_m t + 2J_2(\beta_1$$

(01.06.03)

Pentru rescrierea mai comod_ a expresiei de mai sus se consider_ func_iile P(t) _i Q(t) date de

$$\left\{ \begin{array}{l} P(t) = J_0(\beta_1) + 2J_2(\beta_1)\cos 2\omega_m t, \\ Q(t) = 2J_1(\beta_1)\sin\omega_m t; \end{array} \right. \qquad (01.06.04)$$

ca urmare expresia (01.06.03) devine

$$u_2(t)=U_1 H(\omega_0) Re\{[P(t) + jQ(t)]e^{j\omega_0 t}\}=$$
$$=U_1 H(\omega_0) Re\{\sqrt{P^2(t)+Q^2(t)}\, e^{j\, arctg\frac{Q(t)}{P(t)}} e^{j\omega_0 t}\}=$$
$$=U_1 H(\omega_0)\sqrt{P^2(t)+Q^2(t)}\cos(\omega_0 t + arctg\frac{Q(t)}{P(t)})=$$
$$=U_1 H(\omega_0)\sqrt{P^2(t)+Q^2(t)}\cos\psi(t).$$

(01.06.05)

Amplitudinea normat_ a semnalului $u_2(t)$ este:

$$A(t)=\sqrt{P^2(t)+Q^2(t)}=(J_0^2(\beta_1)+4J_0(\beta_1)J_2(\beta_1)\cos 2\omega$$
$$+4J_2^2(\beta_1)\cos^2 2\omega_m t+4J_1^2(\beta_1)\sin^2\omega_m t)^{\frac{1}{2}}=(J_0^2(\beta_1)+2J_1^2$$
$$+2J_2^2(\beta_1)+2(2J_0(\beta_1)J_2(\beta_1)-J_1^2(\beta_1))\cos 2\omega_m t+$$
$$+2J_2^2(\beta_1)\cos 4\omega_m t)^{\frac{1}{2}},$$

(01.06.06)

deci amplitudinea A(t) se poate scrie sub forma

$$A(t)=\sqrt{J_0^2(\beta_1)+2J_1^2(\beta_1)+2J_2^2(\beta_1)}\sqrt{1+a\cos 2\omega_m t+b\cos 4\omega_m t}$$

(01.06.07)

unde parametrii a _i b sunt

$$a=\frac{2(2J_0(\beta_1)J_2(\beta_1)-J_1^2(\beta_1))}{J_0^2(\beta_1)+2J_1^2(\beta_1)+2J_2^2(\beta_1)},$$
$$b=\frac{2J_2^2(\beta_1)}{J_0^2(\beta_1)+2J_1^2(\beta_1)+2J_2^2(\beta_1)}.$$

Întrucât $J_0(\beta_1)$ = 0,5669, $J_1(\beta_1)$ = 0,5419, $J_2(\beta_1)$ = 0,2073 _i
$J_0^2(\beta_1)+2J_1^2(\beta_1)+2J_2^2(\beta_1)$ = 0,99463 _ 1,
se pot face urm_toarele aproxima_ii succesive:

$$a\,\_\,2(2J_0(\beta_1)J_2(\beta_1)-J_1^2(\beta_1))=-0{,}1172\,»\,1,$$
$$b\,\_\,2J_2^2(\beta_1)=0{,}0859\,»\,1\ ,$$

precum _i

$$A(t)\,\_\,\sqrt{1+a\cos 2\omega_m t+b\cos 4\omega_m t}\,\_\,1+\frac{a}{2}\cos 2\omega_m t+\frac{b}{2}\cos 4\omega_m t\ .$$

(01.06.08)

În concluzie, se poate scrie

$$A(t)\,\_\,1+(2J_0(\beta_1)J_2(\beta_1)-J_1^2(\beta_1))\cos 2\omega_m t+J_2^2(\beta_1)\cos$$

(01.06.09)

Gradul de modula_ie al semnalului $u_2(t)$ are expresia:

$$m_2 = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} ,$$

unde

$$A_{max} = 1 + \frac{|a|}{2} + \frac{|b|}{2} \quad \_i \quad A_{min} = 1 - \frac{|a|}{2} - \frac{|b|}{2} ,$$

deci

$$m_2 = \frac{|a| + |b|}{2} = J_1^2(\beta_1) + J_2^2(\beta_1) - 2\, J_0(\beta_1)\, J_2(\beta_1) = 10{,}16$$

b) Frecven_a instantantanee a semnalului $u_2(t)$ este

$$\omega_i = \frac{d}{dt}\psi(t) = \frac{d}{dt}\left(\omega_0 t + arctg\,\frac{Q(t)}{P(t)}\right) = \omega_0 + \frac{P(t)Q'(t) - P'(t)Q(t)}{P^2(t) + Q^2(t)} ,$$

(01.06.10)

_i, _inând cont de posibilitatea de aproximare $P^2(t) + Q^2(t) = A^2(t)$ _ 1 (deci în ipoteza c_ modula_ia de amplitudine a anvelopei este neglijabil_), se ob_ine

$$\omega_i = \omega_0 + (P(t)Q'(t) - P'(t)Q(t)) . \qquad (01.06.11)$$

Apoi, succesiv:

$$P'(t) = -4\,\omega_m J_2(\beta_1) \sin 2\omega_m t ,$$

$$Q'(t) = 2\,\omega_m J_1(\beta_1) \cos \omega_m t ,$$

$$P(t)Q'(t) - P'(t)Q(t) = 2\,\omega_m J_1(\beta_1) [J_0(\beta_1) + 3\, J_2(\beta_1)] \cos$$
$$-2\,\omega_m J_1(\beta_1) J_2(\beta_1) \cos 3\omega_m t .$$

Ca urmare, expresia frecven_ei instantanee din (01.06.11) devine

$$\omega_i = \omega_0 + 2\,\omega_m J_1(\beta_1)\,[\,J_0(\beta_1) + 3\, J_2(\beta_1)]\,\cos \omega_m t -$$
$$-2\,\omega_m J_1(\beta_1)\, J_2(\beta_1) \cos 3\,\omega_m t .$$

(01.06.12)

Dar, pentru un semnal MF, având faza $\psi(t) = \omega_0 t + \beta \sin \omega_m t$, expresia frecven_ei instantanee este $\omega_i = \omega_0 + \beta\, \omega_m \cos \omega_m t$. Având în vedere acest lucru, se poate identifica indicele de modula_ie al semnalului $u_2(t)$ din expresia (01.06.12) ca fiind:

$$\beta_2 = 2\, J_1(\beta_1)\, [\, J_0(\beta_1) + 3\, J_2(\beta_1)\,] = 1{,}2884 < \beta_1 = 1{,}4 \ .$$

(01.06.13)

Observa_ie:

_i în cazul elimin_rii unor componente spectrale, ca _i în situa_ia atenu_rii acestora (situa_ie studiat_ anterior în cadrul problemelor 3-5), se constat_ mic_orarea indicelui de modula_ie al semnalului de ie_ire $u_2(t)$.

c) Intereseaz_ determinarea distorsiunilor semnalului $u_2(t)$. Conform ecua_iei (01.06.12), distorsiunile provin din apari_ia armonicii de ordinul III. Valoarea distorsiunilor este dat_ de:

$$\delta_3 = \frac{J_2(\beta_1)}{J_0(\beta_1) + 3\, J_2(\beta_1)} = 17{,}44\,\% \ . \qquad (01.06.14)$$

d) Pentru $\Delta f = 2{,}14$ kHz se ob_ine succesiv $\beta_1 = 0{,}6$,

$J_0(\beta_1) = 0{,}9120$,

$J_1(\beta_1) = 0{,}2867$,

$J_2(\beta_1) = 0{,}0437$,

$J_0^2(\beta_1) + 2\, J_1^2(\beta_1) + 2\, J_2^2(\beta_1) = 0{,}999957$ _ 1 ,

$a = -\,0{,}00498 \ll 1$,

$b = 0{,}0038 \ll 1$,

$m_2 = 0{,}44\,\%$,

$\beta_2 = 0{,}5981$ _i

$\delta_3 = 4{,}19\,\%$.