Curs 7, Analiză Matematică

Prof. dr. Gheorghe Moza

1 Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile

Pentru o funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, A deschisă, $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_p) \in A$, dorim să evaluăm schimbarea lui $f(x)$ în jurul punctului fix x_0.

Definiţie 1.1 *O funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, A deschisă, se numeşte **diferenţiabilă** în punctul $x_0 \in A$, dacă există un operator liniar (o funcţie) $\Phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi o funcţie $\omega_{x_0} : A \to \mathbb{R}$ continuă în x_0 şi $\omega_{x_0}(x_0) = 0$, asfel încât $\forall x \in A$, are loc relaţia:*

$$f(x) = f(x_0) + \Phi(x - x_0) + \|x - x_0\| \, \omega_{x_0}(x) . \tag{1}$$

*Operatorul liniar Φ se numeşte **diferenţiala** lui f în x_0 şi este adesea notat prin $\Phi = d_{x_0} f$.*

Remarca 1.1 *Reamintim că operatorul $\Phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este numit liniar dacă el satisface relaţia:*

$$\Phi(ax + by) = a\Phi(x) + b\Phi(y),$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi $x, y \in \mathbb{R}^p$.

Propoziţie 1.1 *Operatorul liniar Φ dat de (1) pentru o funcţie diferenţiabilă f în x_0 este unic.*

Propoziţie 1.2 *Dacă o funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, A deschisă, este diferenţiabilă într-un punct $x_0 \in A$, atunci f este continuă în x_0.*

Propoziţie 1.3 *Dacă o funcţie* $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, *A deschisă, este diferenţiabilă într-un punct* $x_0 \in A$, *atunci* f *este derivabilă după vectorul* $v \in \mathbb{R}^p, v \neq \bar{0}$ *în* x_0, *şi are loc*

$$d_{x_0} f(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0). \tag{2}$$

Remarca 1.2 *Dacă* $B = \{e_1, ..., e_p\}$ *este baza ortonormată în* $\mathbb{R}^p$, *pentru* $v = e_i$, $i = 1, ..., p$, *din* (2) *obţinem*

$$d_{x_0} f(e_i) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \tag{3}$$

adică, dacă f *este diferenţiabilă în* x_0 *atunci* f *este diferenţiabilă parţial în* x_0 *în raport cu variabila* x_i, $\forall i = 1, ..., p$. *Prin urmare, dacă o funcţie nu este diferenţiabilă parţial în* x_0, *atunci ea nu este nici diferenţiabilă în* x_0.

Teorema 1.1 ***(Expresia diferenţialei)*** *Dacă o funcţie* f *definită pe o muţime deschisă* A, $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *este diferenţiabilă în* $x_0 \in A$, *atunci diferenţiala sa* $d_{x_0} f$ *în* x_0 *este definită pentru orice vector* $v = (h_1, h_2, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p, v \neq \bar{0}$, *şi are loc relaţia:*

$$d_{x_0} f(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) h_p. \tag{4}$$

Remarca 1.3 *Există funcţii continue, derivabile parţial într-un punct, dar care nu sunt diferenţiabile în acel punct.*

Propoziţie 1.4 *Orice operator liniar* $\Phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *este diferenţiabil în orice punct* $x_0 \in \mathbb{R}^p$ *şi* $d_{x_0}\Phi = \Phi$.

Teorema 1.2 ***(Condiţii suficiente de diferenţiabilitate).*** *Dacă o funcţie* $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, *A deschisă, este de clasă* C^1 *într-o vecinătate* V_{x_0} *a unui punct* $x_0 \in A$, $f \in C^1(V_{x_0})$, *atunci* f *este diferenţiabilă în* x_0. *Mai mult, pentru orice* $x \in V_{x_0}$ *are loc aproximarea:*

$$f(x) \simeq f(x_0) + d_{x_0} f(x - x_0). \tag{5}$$

Remarca 1.4 *Dacă o funcţie* $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, *A deschisă, este de clasă* $C^1(A)$, *atunci* f *este diferenţiabilă pe* A *(adică în orice punct* $x_0 \in A$*). Într-adevăr, întrucât* A *este deschisă,* A *este o vecinătate pentru orice punct* $x_0 \in A$. *Din* $f \in C^1(A)$, *aplicând Teorema 1.2 rezultă că* f *este diferenţiabilă în* x_0, *pentru orice* $x_0 \in A$, *adică,* f *este diferenţiabilă pe* A.

Remarca 1.5 *Aproximarea* (5) *este importantă în aplicaţii practice, fiind prima aproximare a unei funcţii de mai multe variabile (aproximarea prin partea ei liniară).*

Definiţie 1.2 *Fie* $F : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, *A deschisă,* $F = (f_1, ..., f_q)$, $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_p) \in A$, *o funcţie vectorială. Spunem că F este* ***diferenţiabilă*** *în* x_0 *dacă există un operator liniar* $\Psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *şi o funcţie* $\omega_{x_0} : A \to \mathbb{R}^q$ *continuă în* x_0 *cu* $\omega_{x_0}(x_0) = \overline{0}$, *astfel încât* $\forall x \in A$, *are loc relaţia:*

$$F(x) = F(x_0) + \Psi(x - x_0) + \|x - x_0\| \, \omega_{x_0}(x). \tag{6}$$

Operatorul Ψ *în acest caz se numeşte diferenţiala lui F în* x_0 *şi se notează prin* $\Psi = d_{x_0}F$.

Propoziţie 1.5 *Fie* $F : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, *A deschisă,* $F = (f_1, ..., f_q)$, *o funcţie vectorială şi* $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_p) \in A$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) F este diferenţiabilă în x_0;

b) f_j *este diferenţiabilă în* x_0 *pentru orice* $j = 1, ..., q$.

Remarca 1.6 *a) Din această propoziţie obţinem că, dacă* $F : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, *A deschisă,* $F = (f_1, ..., f_q)$, *este o funcţie vectorială diferenţiabilă în* $x_0 \in A$, *atunci diferenţiala sa este*

$$d_{x_0}F = (d_{x_0}f_1, d_{x_0}f_2, ..., d_{x_0}f_q),$$

unde $d_{x_0}f_j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *este diferenţiala funcţiei* f_j *în* $x_0 \in A$, $\forall j = 1, ..., q$. *Deoarece* $d_{x_0}f_j$ *este unică, la fel este şi* $d_{x_0}F$.

b) Dacă $J_F(x_0)$ *este matricea Jacobi a lui F în* x_0, *atunci pentru orice vector* $v = (h_1, h_2, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p, v \neq \bar{0}$, *avem*

$$d_{x_0}F(v) = J_F(x_0) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ ... \\ h_p \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Teorema 1.3 *Considerăm două funcţii vectoriale* $F : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$ *şi* $G : B \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^q$, *A, B deschise,* $F(A) \subseteq B$. *Dacă F este diferenţiabilă în* $x_0 \in A$ *şi G diferenţiabilă în* $y_0 = F(x_0) \in B$, *atunci funcţia compusă* $G \circ F : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *este diferenţiabilă în* x_0 *şi*

$$d_{x_0}(G \circ F) = d_{y_0}G \circ d_{x_0}F, \tag{8}$$

unde $d_{y_0}G \circ d_{x_0}F$ *reprezintă compunere de funcţii liniare. În termeni de matrici Jacobi avem relaţia*

$$J_{G\circ F} = J_G \cdot J_F. \tag{9}$$

Regula de derivare a funcţiilor compuse.

În contextul teoremei de mai sus, notăm prin $H = G \circ F$, unde $H : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $H = (h_1, h_2, ..., h_q)$, $F = (f_1, f_2, ..., f_r)$ şi $G = (g_1, g_2, ..., g_q)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in A$, $y = (y_1, y_2, ..., y_r) \in B$. Atunci, pentru orice $x_0 \in A$ şi $y_0 = F(x_0) \in B$, din $J_{G\circ F} = J_G \cdot J_F$ obţinem

$$J_H(x_0) = J_G(y_0) \cdot J_F(x_0),$$

adică,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_p}(x_0) \\ \cdots & & \\ \frac{\partial h_q}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial h_q}{\partial x_p}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(y_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(y_0) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_r}(y_0) \\ \cdots & & \\ \frac{\partial g_q}{\partial y_1}(y_0) & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial y_r}(y_0) \end{pmatrix} \times \tag{10}$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(x_0) \\ \cdots & & \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_p}(x_0) \end{pmatrix}$$

sau, pentru orice $i = 1, ..., p$ şi $j = 1, ..., q$, avem relaţia:

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(y_0) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x_0), \tag{11}$$

cunoscută ca **regula de derivare a funcţiilor compuse.**

Cazuri particulare.

1. Dacă $p = q = r = 1$, $h = g \circ f$, obţinem regula de derivare a funcţiilor compuse de o singură variabilă:

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

2. Dacă $p = r = 2$ şi $q = 1$,putem scrie

$$h(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)),$$

deoarece $h(x,y) = (g \circ f)(x,y)$, unde $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (u,v)$, şi $g : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g = g(u,v)$. Din (11) obţinem două formule utile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

3. Pentru $p = 2$, $r = q = 1$, putem scrie

$$h(x,y) = g(u(x,y)),$$

deoarece $h(x,y) = (g \circ f)(x,y)$, unde $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u = f(x,y)$, şi $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = g(u)$. Atunci, (11) conduce la

$$\frac{\partial h}{\partial x} = g'(u)\frac{\partial u}{\partial x}, \text{ şi, } \frac{\partial h}{\partial y} = g'(u)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Teorema 1.4 ***(Diferenţiala funcţiei inverse).*** *Fie $F : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, A deschisă, o funcţie vectorială, bijectivă şi diferenţiabilă în $x_0 \in A$, având matricea Jacobi $J_F(x_0)$ nesingulară (i.e. $\det J_F(x_0) \neq 0$). Atunci funcţia inversă $F^{-1} : B \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în $y_0 = F(x_0)$ şi*

$$d_{y_0}F^{-1} = (d_{x_0}F)^{-1}. \tag{12}$$

Exerciţii

1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Arătaţi că f este continuă în $x_0 = (0,0)$ dar nu este diferenţiabilă în x_0.

R. Pentru orice vector $v = (h_1, h_2)$, $v \neq (0,0)$, avem

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = \frac{2h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2},$$

adică, f are derivată după orice direcţie (vector) $v = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ în x_0. În particular, pentru $v = e_1 = (1,0)$ şi $v = e_2 = (0,1)$, rezultă că f are derivatele parţiale

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(x_0).$$

Presupunem că f este diferenţiabilă în x_0. Din (4),

$$d_{x_0} f(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) h_2 = 0,$$

dar, din (2) $d_{x_0} f(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$, adică, $0 = \frac{2h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2}$, care este o contradicţie deoarece $v = (h_1, h_2) \neq (0,0)$. Deci f nu este diferenţiabilă în x_0.

Funcţia f este continuă în $(0,0)$ deoarece

$$\left| \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |2y|,$$

adică

$$-|2y| \leq \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} \leq |2y|,$$

de unde, prin trecere la limită cu $(x,y) \to (0,0)$, se obţine prin Teorema cleştelui că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Astfel, f nu este diferenţiabilă în x_0 dar are derivată după orice vector $v \in \mathbb{R}^2$ şi este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

2. Găsiţi o primă aproximare pentru $1.01^{1.02}$.

R. Fie funcţia $f(x,y) = x^y$ şi $x_0 = (1,1)$. Atunci, din (5),

$$f(x,y) \simeq f(1,1) + d_{x_0} f(v),$$

unde $v=(x,y)-(1,1)=(x-1,y-1)$. Dar $\frac{\partial f}{\partial x}=x^{y-1}y$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}=x^{y}\ln x$, respectiv, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=0$. Rezultă

$$d_{x_0}f(v)=(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)+(y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=x-1.$$

Deci,

$$x^{y}\simeq 1+(x-1)=x.$$

Luând $x=1.01$, obţinem $1.01^{1.02}\simeq 1.01$. Folosind un calculator de buzunar, găsim $1.01^{1.02}=1.0102$. Deci cele două aproximaţii coincid în primele două zecimale.

3. Găsiţi $d_{x_0}f(v)$ unde $f=xy^2z-yz^2+xz$ şi $x_0=(0,1,1)$.

R. Expresia lui $df(v)$ este

$$d_{x_0}f(v)=f'_x(x_0)\,h_1+f'_y(x_0)\,h_2+f'_z(x_0)\,h_3,$$

unde $v=(h_1,h_2,h_3)\neq(0,0,0)$. Calculând derivatele parţiale ale funcţiei f, obţinem

$$df(v)=\left(y^2z+z\right)h_1+\left(2xyz-z^2\right)h_2+\left(xy^2-2yz+x\right)h_3.$$

Deci $d_{x_0}f(v)=2h_1-h_2-2h_3$.

4. Găsiţi derivatele parţiale de ordinul întâi ale următoarelor funcţii compuse.
a) $h(x,y)=xy^2g\left(x^2y^2\right)$; b) $h(x,y)=g\left(x^2+y^2,x^2-y^2\right)$;
c) $h(x,y)=xy^2g\left(xy,\sqrt{x+y^2}\right)$; d) $h(x,y)=g\left(xy,x+y,x+y^2\right)$.

R. a) Notăm $u=x^2y^2$. Atunci

$$h'_x=y^2g(u)+xy^2g'(u)\,2xy^2=y^2g(u)+2x^2y^4g'(u),$$

şi

$$h'_y=2xyg(u)+xy^2g'(u)\,2x^2y=2xyg(u)+2x^3y^3g'(u).$$

b) Notăm $u=x^2+y^2$ şi $v=x^2-y^2$. Atunci

$$h'_x=g'_uu'_x+g'_vv'_x=2xg'_u+2xg'_v,$$

şi

$$h'_y=g'_uu'_y+g'_vv'_y=2yg'_u-2yg'_v.$$

În particular, dacă funcţia g este cunoscută, de exemplu, $g(u,v) = uv$, obţinem

$$h'_x = 2xv + 2xu, \text{ şi, } h'_y = 2yv - 2yu.$$

c) Notăm $u = xy$ şi $v = \sqrt{x+y^2}$. Atunci,

$$h'_x = y^2 g(u,v) + xy^2 \left(g'_u u'_x + g'_v v'_x\right) = y^2 g(u,v) + xy^2 \left(y g'_u + \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}} g'_v\right),$$

şi

$$h'_y = 2xyg(u,v) + xy^2 \left(g'_u u'_y + g'_v v'_y\right) = 2xyg(u,v) + xy^2 \left(x g'_u + \frac{y}{\sqrt{x+y^2}} g'_v\right).$$

d) $h(x,y) = g(xy, x+y, x+y^2)$. Notăm $u = xy$, $v = x+y$ şi $w = x+y^2$. Atunci,

$$h'_x = g'_u u'_x + g'_v v'_x + g'_w w'_x = y g'_u + g'_v + g'_w$$

şi

$$h'_y = g'_u u'_y + g'_v v'_y + g'_w w'_y = x g'_u + g'_v + 2y g'_w.$$