

# Modelação Matemática de uma Concha do Náutilus usando Python/turtle

Adrian Dias

Número 1

October 2, 2025

## Abstract

Este relatório apresenta o desenvolvimento de um modelo matemático e a respectiva implementação em `Python/turtle`, com vista à representação de uma concha do náutilus encontrada na natureza. São descritos os objectivos, a metodologia seguida e os principais resultados obtidos.

## 1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se o enquadramento teórico do trabalho, incluindo o modelo matemático de base e o modelo específico implementado no código.

### 1.1 Modelo Matemático da Espiral Logarítmica (1.1)

A concha do náutilus segue uma espiral logarítmica, também conhecida como espiral de crescimento ou espiral equiangular. Esta curva é representada pela equação polar:

$$r(\theta) = a \cdot e^{b \cdot \theta} \tag{1}$$

onde:

- $r$  é o raio da espiral (distância do ponto à origem)
- $\theta$  é o ângulo em radianos (parâmetro angular)
- $a$  é o raio inicial (constante de escala que determina o tamanho inicial)
- $b$  é a taxa de crescimento (controla a "abertura" ou "fechamento" da espiral)
- $e$  é a base do logaritmo natural ( $e \approx 2.71828$ )

## 1.2 Propriedades Matemáticas Fundamentais (1.2)

A espiral logarítmica possui propriedades matemáticas notáveis que explicam sua prevalência na natureza:

- **Auto-similaridade:** A forma mantém-se invariante sob transformações de escala. Isto significa que qualquer secção da espiral é geometricamente similar à espiral completa.
- **Ângulo constante:** O ângulo  $\alpha$  entre o raio vetor e a tangente à curva é constante em todos os pontos, satisfazendo a relação  $\cot(\alpha) = b$ .
- **Crescimento exponencial:** O raio cresce exponencialmente com o ângulo, o que corresponde a uma taxa de crescimento proporcional ao tamanho atual.
- **Propriedade de crescimento isomórfico:** A forma da espiral mantém-se constante durante o crescimento, o que é energeticamente eficiente para organismos vivos.

## 1.3 Implementação Computacional (1.3)

No script `Python/turtle`, a equação 1 é implementada através da conversão de coordenadas polares para cartesianas:

$$x = r(\theta) \cdot \cos(\theta), \quad y = r(\theta) \cdot \sin(\theta) \quad (2)$$

Para criar a forma tridimensional da concha, utilizou-se o conceito de faixa espiral, onde uma segunda espiral com raio  $r_2(\theta) = r_1(\theta) + d(\theta)$  é desenhada, sendo  $d(\theta)$  uma função que define a largura da concha.

## 1.4 Formulação por Equações Diferenciais (1.4)

A espiral logarítmica surge naturalmente de sistemas dinâmicos. Considerando o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} - \dot{y} = \ddot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \dot{x} + \dot{y} = \ddot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{cases} \quad (3)$$

A solução em coordenadas polares conduz ao sistema:

$$\dot{r} = 1, \quad \dot{\theta} = \frac{1}{r} \quad (4)$$

cujas solução é a espiral logarítmica  $r = c_0 \cdot e^\theta$ , demonstrando como padrões naturais emergem de leis dinâmicas simples.

## 1.5 Propriedade de Inversão (1.5)

A inversão da espiral logarítmica no círculo unitário, dada por  $r_{inv}(\theta) = 1/r(\theta)$ , produz outra espiral logarítmica. Esta propriedade é particularmente relevante em transformações geométricas e mapeamentos conformes.

## 1.6 Cálculo de Áreas na Concha (1.6)

A área de uma secção da concha pode ser calculada através da integral:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} a^2 e^{2b\theta} d\theta = \frac{a^2}{4b} (e^{2b\theta_2} - e^{2b\theta_1}) \quad (5)$$

Para a concha do náutilus, consideramos normalmente  $\theta_1 = 6\pi$  e  $\theta_2 = 8\pi$  para a última revolução, resultando numa área que cresce exponencialmente com cada volta.

## 1.7 Modelo de Faixa Espiral para Conchas (1.7)

Para representar a concha 3D, utilizou-se o modelo de faixa espiral com duas espirais concêntricas:

$$\begin{cases} r_1(\theta) = a \cdot e^{b\theta} & \text{(espiral interna)} \\ r_2(\theta) = r_1(\theta) + d(\theta) & \text{(espiral externa)} \end{cases} \quad (6)$$

onde  $d(\theta)$  representa a largura da concha. A área da secção transversal da última revolução é dada por:

$$A_{seccao} = \frac{1}{2} \int_{6\pi}^{8\pi} [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] d\theta \quad (7)$$

No caso de uma concha real,  $d(\theta)$  tipicamente aumenta com  $\theta$  para acomodar o crescimento do organismo.

## 1.8 Parâmetros e Ajuste

Os parâmetros  $a$  e  $b$  foram ajustados empiricamente para aproximar a forma de uma concha real:

- $a = 2.0$ : Define o tamanho inicial da concha
- $b = 0.22$ : Controla a taxa de abertura da espiral
- $\theta \in [0, 8\pi]$ : Permite 4 voltas completas da espiral
- $d(\theta) = 0.4 \cdot r(\theta)$ : Largura proporcional ao raio atual



Figure 1: Concha do Náutilus - modelo matemático implementado em Python/turtle.

## 2 Parte Experimental

A componente experimental deste trabalho corresponde à elaboração e explicação do código. Tal como num procedimento laboratorial, importa detalhar a lógica implementada, os algoritmos utilizados e as opções tomadas em cada etapa, de forma a permitir a replicação do processo.

## 3 Discussão dos Resultados

Apresentam-se e analisam-se, nesta secção, as imagens geradas automaticamente pelo código. Não foram utilizadas capturas de ecrã, mas sim exportações directas produzidas pelo programa. Discutem-se as semelhanças e diferenças entre os resultados e a imagem de referência, identificando as causas dos desvios e avaliando a qualidade da aproximação obtida.

## 4 Conclusões

As conclusões são redigidas a partir da análise dos resultados. Evitam-se afirmações superficiais ou subjectivas; privilegiam-se observações fundamentadas, como, por exemplo:

- O modelo reproduz com fidelidade parcial a forma natural seleccionada.
- As limitações decorrem de aproximações matemáticas ou restrições do ambiente de programação.
- Futuras melhorias poderão incluir optimizações algorítmicas ou refinamentos gráficos.

## 5 Bibliografia

### References

- [1] Carvalho, J. (2021). *Práticas de Programação em Python*. Editora XYZ.
- [2] Martins, A. e Silva, M. (2015). *Programação Científica com Python*. Editora ABC.
- [3] Math Stack Exchange. (2019). *Deriving the Nautilus shell spiral equation*.