a) Thuật toán Floyd được sử dụng để tìm đường đi ngắn nhất giữa tất cả các cặp đỉnh trong đồ thị có trọng số dương. Dưới đây là thuật toán Floyd:

1. Khởi tạo ma trận kết quả ban đầu bằng ma trận trọng số ban đầu của đồ thị.

2. Dùng hai vòng lặp lồng nhau để cập nhật ma trận kết quả. Với mỗi cặp đỉnh u và v, kiểm tra xem có đỉnh k nào mà đường đi từ u đến v thông qua k có độ dài nhỏ hơn đường đi trực tiếp từ u đến v hay không. Nếu có, cập nhật lại độ dài của đường đi ngắn nhất và đỉnh trung gian.

3. Khi kết thúc thuật toán, ma trận kết quả sẽ chứa độ dài của đường đi ngắn nhất giữa tất cả các cặp đỉnh trong đồ thị.

b) Áp dụng thuật toán Floyd vào đồ thị G đã cho, ta sẽ có các bước sau:

Bước 0:

Ma trận kết quả ban đầu:

0 1 15 ∞ ∞ 20

1 0 ∞ 0 1 ∞ 7

∞ ∞ 1 0 20 20

∞ 5 ∞ 20 0 5

20 30 20 7 5 0

Bước 1:

Ta kiểm tra xem có đỉnh nào k nào mà đường đi từ 1 đến 2 thông qua k có độ dài nhỏ hơn đường đi trực tiếp từ 1 đến 2 hay không. Trong trường hợp này, không có đỉnh nào thỏa mãn, nên ma trận kết quả không thay đổi.

Bước 2:

Ta kiểm tra xem có đỉnh nào k nào mà đường đi từ 1 đến 6 thông qua k có độ dài nhỏ hơn đường đi trực tiếp từ 1 đến 6 hay không. Trong trường hợp này, ta thấy rằng đường đi từ 1 đến 6 thông qua đỉnh 5 (1 -> 5 -> 6) có độ dài 20 + 5 = 25, nhỏ hơn đường đi trực tiếp từ 1 đến 6 (20). Vì vậy, ta cập nhật lại ma trận kết quả như sau:

0 1 15 ∞ ∞ 20

1 0 ∞ 0 1 ∞ 7

∞ ∞ 1 0 20 20

∞ 5 ∞ 20 0 5

20 30 20 7 5 0

Bước 3:

Ta kiểm tra xem có đỉnh nào k nào mà đường đi từ 2 đến 5 thông qua k có độ dài nhỏ hơn đường đi trực tiếp từ 2 đến 5 hay không. Trong trường hợp này, ta thấy rằng đường đi từ 2 đến 5 thông qua đỉnh 4 (2 -> 4 -> 5) có độ dài 1 + 5 = 6, nhỏ hơn đường đi trực tiếp từ 2 đến 5 (7). Vì vậy, ta cập nhật lại ma trận kết quả như sau:

0 1 15 ∞ ∞ 20

1 0 ∞ 0 1 7

∞ ∞ 1 0 20 20

∞ 5 ∞ 20 0 5

20 30 20 6 5 0

Bước 4:

Ta kiểm tra xem có đỉnh nào k nào mà đường đi từ 5 đến 6 thông qua k có độ dài nhỏ hơn đường đi trực tiếp từ 5 đến 6 hay không. Trong trường hợp này, không có đỉnh nào thỏa mãn, nên ma trận kết quả không thay đổi.

Kết quả cuối cùng là:

0 1 15 ∞ ∞ 20

1 0 ∞ 0 1 7

∞ ∞ 1 0 20 20

∞ 5 ∞ 20 0 5

20 30 20 6 5 0

Vậy, đường đi ngắn nhất giữa các cặp đỉnh (1,2), (1,6), (2,5), (5,6) lần lượt là:

- Đường đi ngắn nhất từ 1 đến 2: 1 -> 2, độ dài 1.

- Đường đi ngắn nhất từ 1 đến 6: 1 -> 5 -> 6, độ dài 25.

- Đường đi ngắn nhất từ 2 đến 5: 2 -> 4 -> 5, độ dài 6.

- Đường đi ngắn nhất từ 5 đến 6: 5 -> 6, độ dài 5.