

ChaosKITs  
Karlsruhe Institute of Technology

# Inhaltsverzeichnis

2.7.3	Anwendungen . . . . .	6
2.8	Min-Cost-Max-Flow . . . . .	7
2.9	Maximal Cardinatlity Bipartite Mat- ching . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Geometrie</b>	<b>8</b>
3.1	Closest Pair . . . . .	8
3.2	Geraden . . . . .	8
3.3	Konvexe Hülle . . . . .	8
3.4	Formeln - std::complex . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Mathe</b>	<b>10</b>
4.1	ggT, kgV, erweiterter euklidischer Al- gorithmus . . . . .	10
4.2	Mod-Exponent über $\mathbb{F}_p$ . . . . .	10
4.3	LGS über $\mathbb{F}_p$ . . . . .	11
4.4	LGS über $\mathbb{R}$ . . . . .	11
4.5	Chinesischer Restsatz . . . . .	11
4.6	Primzahlsieb von ERATOSTHENES . . . .	12
4.7	MILLER-RABIN-Primzahltest . . . . .	12
4.8	Binomialkoeffizienten . . . . .	12
4.9	Polynome & FFT . . . . .	12
4.10	3D-Kugeln . . . . .	13
4.11	Kombinatorik . . . . .	13

4.11.1	Berühmte Zahlen . . . . .	13
4.11.2	Verschiedenes . . . . .	14
4.12	Satz von SPRAGUE-GRUNDY . . . . .	14
4.13	Big Integers . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Strings</b>	<b>16</b>
5.1	KNUTH-MORRIS-PRATT-Algorithmus . .	16
5.2	AHO-CORASICK-Automat . . . . .	17
5.3	Trie . . . . .	17
5.4	Suffix-Array . . . . .	17
5.5	Longest Common Substring . . . . .	18
5.6	Longest Common Subsequence . . . .	18
<b>6</b>	<b>Java</b>	<b>18</b>
6.1	Introduction . . . . .	18
6.2	BigInteger . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Sonstiges</b>	<b>19</b>
7.1	2-SAT . . . . .	19
7.2	Zeileneingabe . . . . .	19
7.3	Bit Operations . . . . .	19
7.4	Josephus-Problem . . . . .	19
7.5	Gemischtes . . . . .	19
7.6	Sonstiges . . . . .	20

# Datenstrukturen

## 1.1 Union-Find

```

1 // Laufzeit: O(n*alpha(n))
2 // "height" ist obere Schranke für die Höhe der Bäume. Sobald
3 // Pfadkompression angewendet wurde, ist die genaue Höhe nicht mehr
4 // effizient berechenbar.
5 vector<int> parent // Initialisiere mit Index im Array.
6 vector<int> height; // Initialisiere mit 0.
7
8 int findSet(int n) { // Pfadkompression
9     if (parent[n] != n) parent[n] = findSet(parent[n]);
10    return parent[n];
11 }
12
13 void linkSets(int a, int b) { // Union by rank.
14     if (height[a] < height[b]) parent[a] = b;
15     else if (height[b] < height[a]) parent[b] = a;
16     else {
17         parent[a] = b;
18         height[b]++;
19     }
20 }
21
22 void unionSets(int a, int b) { // Diese Funktion aufrufen.
23     if (findSet(a) != findSet(b)) linkSets(findSet(a), findSet(b));
24 }

```

## 1.2 Segmentbaum

```

1 // Laufzeit: init: O(n), query: O(log n), update: O(log n)
2 // Berechnet das Maximum im Array.
3 int a[MAX_N], m[4 * MAX_N];
4
5 int query(int x, int y, int k = 0, int X = 0, int Y = MAX_N - 1) {
6     if (x <= X && Y <= y) return m[k];
7     if (y < X || Y < x) return -INF; // Ein "neutrales" Element.
8     int M = (X + Y) / 2;
9     return max(query(x, y, 2*k+1, X, M), query(x, y, 2*k+2, M+1, Y));
10 }
11
12 void update(int i, int v, int k = 0, int X = 0, int Y = MAX_N - 1) {
13     if (i < X || Y < i) return;
14     if (X == Y) { m[k] = v; a[i] = v; return; }
15     int M = (X + Y) / 2;
16     update(i, v, 2 * k + 1, X, M);
17     update(i, v, 2 * k + 2, M + 1, Y);
18     m[k] = max(m[2 * k + 1], m[2 * k + 2]);
19 }
20
21 void init(int k = 0, int X = 0, int Y = MAX_N - 1) {
22     if (X == Y) { m[k] = a[X]; return; }

```

```

23     int M = (X + Y) / 2;
24     init(2 * k + 1, X, M);
25     init(2 * k + 2, M + 1, Y);
26     m[k] = max(m[2 * k + 1], m[2 * k + 2]);
27 }

```

Mit update() können ganze Intervalle geändert werden. Dazu: Offset in den inneren Knoten des Baums speichern.

## 1.3 Fenwick Tree

```

1 vector<int> FT; // Fenwick-Tree
2 int n;
3
4 // Addiert val zum Element an Index i. O(log(n)).
5 void updateFT(int i, int val) {
6     i++; while(i <= n) { FT[i] += val; i += (i & (-i)); }
7 }
8
9 // Baut Baum auf. O(n*log(n)).
10 void buildFenwickTree(vector<int>& a) {
11     n = a.size();
12     FT.assign(n+1, 0);
13     for(int i = 0; i < n; i++) updateFT(i, a[i]);
14 }
15
16 // Präfix-Summe über das Intervall [0..i]. O(log(n)).
17 int prefix_sum(int i) {
18     int sum = 0; i++;
19     while(i > 0) { sum += FT[i]; i -= (i & (-i)); }
20     return sum;
21 }

```

## 1.4 Range Minimum Query

```

1 vector<int> data(RMQ_SIZE);
2 vector<vector<int>> rmq(floor(log2(RMQ_SIZE))+1, vector<int>(RMQ_SIZE));
3
4 // Baut Struktur auf. O(n*log(n))
5 void initRMQ() {
6     for(int i = 0, s = 1, ss = 1; s <= RMQ_SIZE; ss=s, s*=2, i++) {
7         for(int l = 0; l + s <= RMQ_SIZE; l++) {
8             if(i == 0) rmq[0][l] = 1;
9             else {
10                 int r = l + ss;
11                 rmq[i][l] = (data[rmq[i-1][l]] <= data[rmq[i-1][r]]) ?
12                     rmq[i-1][l] : rmq[i-1][r];
13             }
14         }
15     }
16 }
17
18 // Gibt den Index des Minimums im Intervall [l,r] zurück. O(1).
19 int queryRMQ(int l, int r) {

```

```

17 if(l >= r) return l;
18 int s = floor(log2(r-l)); r = r - (1 << s);
19 return (data[rmq[s][l]] <= data[rmq[s][r]] ? rmq[s][l] : rmq[s][r]);
20 }

```

## 1.5 STL-Tree

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
3 #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
4 using namespace std; using namespace __gnu_pbds;
5 typedef tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag,
6     tree_order_statistics_node_update> Tree;
7
8 int main() {
9     Tree X;
10    for (int i = 1; i <= 16; i <= 1) X.insert(i); // {1, 2, 4, 8, 16}
11    cout << *X.find_by_order(3) << endl; // => 8
12    cout << X.order_of_key(10) << endl; // => 4 = min i, mit X[i] >= 10
13    return 0;
14 }

```

# 2 Graphen

## 2.1 Minimale Spannbäume

**Schnitteigenschaft** Für jeden Schnitt  $C$  im Graphen gilt: Gibt es eine Kante  $e$ , die echt leichter ist als alle anderen Schnittkanten, so gehört diese zu allen minimalen Spannbäumen. ( $\Rightarrow$  Die leichteste Kante in einem Schnitt kann in einem minimalen Spannbaum verwendet werden.)

**Kreiseigenschaft** Für jeden Kreis  $K$  im Graphen gilt: Die schwerste Kante auf dem Kreis ist nicht Teil des minimalen Spannbau.

### 2.1.1 Kruskal

```

1 // Union-Find Implementierung von oben. Laufzeit:  $O(|E| \cdot \log(|E|))$ 
2 sort(edges.begin(), edges.end());
3 vector<ii> mst; int cost = 0;
4 for (auto &e : edges) {
5     if (findSet(e.from) != findSet(e.to)) {
6         unionSets(e.from, e.to);
7         mst.push_back(ii(e.from, e.to));
8         cost += e.cost;
9     }

```

## 2.2 Kürzeste Wege

### 2.2.1 Algorithmus von DIJKSTRA

Kürzeste Pfade in Graphen ohne negative Kanten.

```

1 // Laufzeit:  $O((|E|+|V|) \cdot \log |V|)$ 
2 void dijkstra(int start) {
3     priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii>> > pq;
4     vector<int> dist(NUM_VERTICES, INF), parent(NUM_VERTICES, -1);
5     dist[start] = 0; pq.push(ii(0, start));
6
7     while (!pq.empty()) {
8         ii front = pq.top(); pq.pop();
9         int curNode = front.second, curDist = front.first;
10        if (curDist > dist[curNode]) continue; // WICHTIG!
11
12        for (auto n : adjlist[curNode]) {
13            int nextNode = n.first, nextDist = curDist + n.second;
14            if (nextDist < dist[nextNode]) {
15                dist[nextNode] = nextDist; parent[nextNode] = curNode;
16                pq.push(ii(nextDist, nextNode));
17            }

```

### 2.2.2 BELLMAN-FORD-Algorithmus

Kürzestes Pfade in Graphen mit negativen Kanten. Erkennt negative Zyklen.

```

1 // Laufzeit:  $O(|V| \cdot |E|)$ 
2 vector<edge> edges; // Kanten einfügen!
3 vector<int> dist, parent;
4
5 void bellmanFord() {
6     dist.assign(NUM_VERTICES, INF); dist[0] = 0;
7     parent.assign(NUM_VERTICES, -1);
8     for (int i = 0; i < NUM_VERTICES - 1; i++) {
9         for (auto &e : edges) {
10            if (dist[e.from] + e.cost < dist[e.to]) {
11                dist[e.to] = dist[e.from] + e.cost;
12                parent[e.to] = e.from;
13            }
14        }
15
16        // "dist" und "parent" sind korrekte kürzeste Pfade.
17        // Folgende Zeilen prüfen nur negative Kreise.
18        for (auto &e : edges) {
19            if (dist[e.from] + e.cost < dist[e.to]) {
20                // Negativer Kreis gefunden.

```

## 2.2.3 FLOYD-WARSHALL-Algorithmus

```

1 // Initialisiere mat: mat[i][i] = 0, mat[i][j] = INF falls i & j nicht
2 // adjazent, Länge sonst. Laufzeit: O(|V|^3)
3 void floydWarshall() {
4     for (k = 0; k < MAX_V; k++) {
5         for (i = 0; i < MAX_V; i++) {
6             for (j = 0; j < MAX_V; j++) {
7                 if (mat[i][k] != INF && mat[k][j] != INF && mat[i][k] + mat[k][j]
8                     < mat[i][j]) {
9                     mat[i][j] = mat[i][k] + mat[k][j];
10                }
11            }
12        }
13    }
14 }
```

- Nur negative Werte sollten die Nullen überschreiben.
- Von parallelen Kanten sollte nur die günstigste gespeichert werden.
- i liegt genau dann auf einem negativen Kreis, wenn  $\text{dist}[i][i] < 0$  ist.
- Wenn für c gilt, dass  $\text{dist}[u][c] \neq \text{INF}$  &&  $\text{dist}[c][v] \neq \text{INF}$  &&  $\text{dist}[c][c] < 0$ , wird der u-v-Pfad beliebig kurz.

## 2.3 Strongly Connected Components (TARJANS-Algorithmus)

```

1 // Laufzeit: O(|V|+|E|)
2 int counter, sccCounter;
3 vector<bool> visited, inStack;
4 vector< vector<int> > adjlist;
5 vector<int> d, low, sccs; // sccs enthält den Index der SCC pro Knoten.
6 stack<int> s;
7
8 void visit(int v) {
9     visited[v] = true;
10    d[v] = low[v] = counter++;
11    s.push(v); inStack[v] = true;
12
13    for (auto u : adjlist[v]) {
14        if (!visited[u]) {
15            visit(u);
16            low[v] = min(low[v], low[u]);
17        } else if (inStack[u]) {
18            low[v] = min(low[v], low[u]);
19        }
20    }
21
22    if (d[v] == low[v]) {
23        int u;
24        do {
25            u = s.top(); s.pop(); inStack[u] = false;
26            sccs[u] = sccCounter;
27        } while (u != v);
28        sccCounter++;
29    }
30 }
```

```

29
30 void scc() {
31     visited.assign(adjlist.size(), false);
32     d.assign(adjlist.size(), -1);
33     low.assign(adjlist.size(), -1);
34     inStack.assign(adjlist.size(), false);
35     sccs.resize(adjlist.size(), -1);
36
37     counter = sccCounter = 0;
38     for (int i = 0; i < (int)adjlist.size(); i++) {
39         if (!visited[i]) {
40             visit(i);
41         }
42     }
43 }
```

## 2.4 Artikulationspunkte und Brücken

```

1 // Laufzeit: O(|V|+|E|)
2 vector< vector<int> > adjlist;
3 vector<bool> isArt;
4 vector<int> d, low;
5 int counter, root; // root >= 2 <=> Wurzel Artikulationspunkt
6 vector<ii> bridges; // Nur fuer Brücken.
7
8 void dfs(int v, int parent) { // Mit parent=-1 aufrufen.
9     d[v] = low[v] = counter++;
10    if (parent == 0) root++;
11
12    for (auto w : adjlist[v]) {
13        if (!d[w]) {
14            dfs(w, v);
15            if (low[w] >= d[v]) isArt[v] = true;
16            if (low[w] > d[v]) bridges.push_back(ii(v, w));
17            low[v] = min(low[v], low[w]);
18        } else if (w != parent) {
19            low[v] = min(low[v], d[w]);
20        }
21    }
22
23 void findArticulationPoints() {
24     counter = 1; // Nicht auf 0 setzen!
25     low.resize(adjlist.size());
26     d.assign(adjlist.size(), 0);
27     isArt.assign(adjlist.size(), false);
28     bridges.clear(); //nur fuer Bruecken
29     for (int v = 0; v < (int)adjlist.size(); v++) if (!d[v]) visit(v, -1);
30 }
```

## 2.5 Eulertouren

- Zyklus existiert, wenn jeder Knoten geraden Grad hat (ungerichtet), bzw. bei jedem Knoten Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen (gerichtet).

- Pfad existiert, wenn alle bis auf (maximal) zwei Knoten geraden Grad haben (ungerichtet), bzw. bei allen Knoten bis auf zwei Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen, wobei einer eine Ausgangskante mehr hat (Startknoten) und einer eine Eingangskante mehr hat (Endknoten).
- **Je nach Aufgabenstellung überprüfen, wie isolierte Punkte interpretiert werden sollen.**
- Der Code unten läuft in Linearzeit. Wenn das nicht notwendig ist (oder bestimmte Sortierungen verlangt werden), gehts mit einem set einfacher.
- Algorithmus schlägt nicht fehl, falls kein Eulerzyklus existiert. Die Existenz muss separat geprüft werden.

```

1 VISIT(v):
2   forall e=(v,w) in E
3   delete e from E
4   VISIT(w)
5   print e

```

```

1 // Laufzeit: O(|V|+|E|)
2 vector< vector<int> > adjlist, otherIdx;
3 vector<int> cycle, validIdx;
4
5 // Vertauscht Kanten mit Indizes a und b von Knoten n.
6 void swapEdges(int n, int a, int b) {
7     int neighA = adjlist[n][a], neighB = adjlist[n][b];
8     int idxNeighA = otherIdx[n][a], idxNeighB = otherIdx[n][b];
9     swap(adjlist[n][a], adjlist[n][b]);
10    swap(otherIdx[n][a], otherIdx[n][b]);
11    otherIdx[neighA][idxNeighA] = b;
12    otherIdx[neighB][idxNeighB] = a;
13 }
14
15 // Entfernt Kante i von Knoten n (und die zugehörige Rückwärtskante).
16 void removeEdge(int n, int i) {
17     int other = adjlist[n][i];
18     if (other == n) { //Schlingen.
19         validIdx[n]++;
20         return;
21     }
22     int otherIndex = otherIdx[n][i];
23     validIdx[n]++;
24     if (otherIndex != validIdx[other]) {
25         swapEdges(other, otherIndex, validIdx[other]);
26     }
27     validIdx[other]++;
28 }
29
30 // Findet Eulerzyklus an Knoten n startend.
31 // Teste vorher, dass Graph zusammenhängend ist! Isolierten Knoten?
32 // Teste vorher, ob Eulerzyklus überhaupt existiert!
33 void euler(int n) {

```

```

34 while (validIdx[n] < (int)adjlist[n].size()) {
35     int nn = adjlist[n][validIdx[n]];
36     removeEdge(n, validIdx[n]);
37     euler(nn);
38 }
39 cycle.push_back(n); // Zyklus in cycle in umgekehrter Reihenfolge.
40 }

```

## 2.6 Lowest Common Ancestor

```

1 vector<int> visited(2*MAX_N), first(MAX_N, 2*MAX_N), depth(2*MAX_N);
2 vector<vector<int>> graph(MAX_N);
3
4 void initLCA(int gi, int d, int &c) { // Laufzeit: O(n)
5     visited[c] = gi, depth[c] = d, first[gi] = min(c, first[gi]), c++;
6     for(int gn : graph[gi]) {
7         initLCA(gn, d+1, c);
8         visited[c] = gi, depth[c] = d, c++;
9     }
10
11 int getLCA(int a, int b) { // Laufzeit: O(1)
12     return visited[queryRMQ(
13         min(first[a], first[b]), max(first[a], first[b]))];
14 }
15
16 // Benutzung:
17 int c = 0;
18 initLCA(0, 0, c);
19 initRMQ(); // Ersetze das data im RMQ-Code von oben durch depth.

```

## 2.7 Max-Flow

### 2.7.1 Capacity Scaling

Gut bei dünn besetzten Graphen.

```

1 // Ford Fulkerson mit Capacity Scaling. Laufzeit: O(|E|^2*log(C))
2 struct MaxFlow { // Muss mit new erstellt werden!
3     static const int MAX_N = 500; // #Knoten, egal für die Laufzeit.
4     struct edge { int dest, rev; ll cap, flow; };
5     vector<edge> adjlist[MAX_N];
6     int visited[MAX_N] = {0}, target, dfsCounter = 0;
7     ll capacity;
8
9     bool dfs(int x) {
10         if (x == target) return 1;
11         if (visited[x] == dfsCounter) return 0;
12         visited[x] = dfsCounter;
13         for (edge &e : adjlist[x]) {
14             if (e.cap >= capacity && dfs(e.dest)) {
15                 e.cap -= capacity; adjlist[e.dest][e.rev].cap += capacity;

```

```

16         e.flow += capacity; adjlist[e.dest][e.rev].flow -= capacity;
17         return 1;
18     }}
19     return 0;
20 }
21
22 void addEdge(int u, int v, ll c) {
23     adjlist[u].push_back(edge {v, (int)adjlist[v].size(), c, 0});
24     adjlist[v].push_back(edge {u, (int)adjlist[u].size() - 1, 0, 0});
25 }
26
27 ll maxFlow(int s, int t) {
28     capacity = 1L << 62;
29     target = t;
30     ll flow = 0L;
31     while (capacity) {
32         while (dfsCounter++, dfs(s)) flow += capacity;
33         capacity /= 2;
34     }
35     return flow;
36 }
37 };

```

## 2.7.2 Push Relabel

Gut bei sehr dicht besetzten Graphen.

```

1 // Laufzeit:  $O(|V|^3)$ 
2 struct PushRelabel {
3     ll capacities[MAX_V][MAX_V], flow[MAX_V][MAX_V], excess[MAX_V];
4     int height[MAX_V], list[MAX_V - 2], seen[MAX_V], n;
5
6     PushRelabel(int n) {
7         this->n = n;
8         memset(capacities, 0L, sizeof(capacities));
9         memset(flow, 0L, sizeof(flow));
10        memset(excess, 0L, sizeof(excess));
11        memset(height, 0, sizeof(height));
12        memset(list, 0, sizeof(list));
13        memset(seen, 0, sizeof(seen));
14    }
15
16    inline void addEdge(int u, int v, ll c) { capacities[u][v] += c; }
17
18    void push(int u, int v) {
19        ll send = min(excess[u], capacities[u][v] - flow[u][v]);
20        flow[u][v] += send; flow[v][u] -= send;
21        excess[u] -= send; excess[v] += send;
22    }
23
24    void relabel(int u) {
25        int minHeight = INT_MAX / 2;
26        for (int v = 0; v < n; v++) {
27            if (capacities[u][v] - flow[u][v] > 0) {

```

```

28                minHeight = min(minHeight, height[v]);
29                height[u] = minHeight + 1;
30            }}
31
32    void discharge(int u) {
33        while (excess[u] > 0) {
34            if (seen[u] < n) {
35                int v = seen[u];
36                if (capacities[u][v] - flow[u][v] > 0 && height[u] > height[v]) {
37                    push(u, v);
38                } else seen[u]++;
39            } else {
40                relabel(u);
41                seen[u] = 0;
42            }}
43
44    void moveToFront(int u) {
45        int temp = list[u];
46        for (int i = u; i > 0; i--) list[i] = list[i - 1];
47        list[0] = temp;
48    }
49
50    ll maxFlow(int source, int target) {
51        for (int i = 0, p = 0; i < n; i++)
52            if (i != source && i != target) list[p++] = i;
53
54        height[source] = n;
55        excess[source] = LLONG_MAX / 2;
56        for (int i = 0; i < n; i++) push(source, i);
57
58        int p = 0;
59        while (p < n - 2) {
60            int u = list[p], oldHeight = height[u];
61            discharge(u);
62            if (height[u] > oldHeight) {
63                moveToFront(p);
64                p = 0;
65            } else p++;
66        }
67
68        ll maxflow = 0L;
69        for (int i = 0; i < n; i++) maxflow += flow[source][i];
70        return maxflow;
71    }
72 };

```

## 2.7.3 Anwendungen

### • Maximum Edge Disjoint Paths

Finde die maximale Anzahl Pfade von  $s$  nach  $t$ , die keine Kante teilen.

1. Setze  $s$  als Quelle,  $t$  als Senke und die Kapazität jeder Kante auf 1.
2. Der maximale Fluss entspricht den unterschiedlichen Pfaden ohne gemeinsame Kanten.

- **Maximum Independent Paths**

Finde die maximale Anzahl an Pfaden von  $s$  nach  $t$ , die keinen Knoten teilen.

1. Setze  $s$  als Quelle,  $t$  als Senke und die Kapazität jeder Kante *und jedes Knotens* auf 1.
2. Der maximale Fluss entspricht den unterschiedlichen Pfaden ohne gemeinsame Knoten.

- **Min-Cut**

Der maximale Fluss ist gleich dem minimalen Schnitt. Bei Quelle  $s$  und Senke  $t$ , partitioniere in  $S$  und  $T$ . Zu  $S$  gehören alle Knoten, die im Residualgraphen von  $s$  aus erreichbar sind (Rückwärtskanten beachten).

## 2.8 Min-Cost-Max-Flow

```

1 static const ll flowlimit = 1LL << 60; // Größer als der maximale Fluss.
2 struct MinCostFlow { // Mit new erstellen!
3     static const int maxn = 400; // Größer als die Anzahl der Knoten.
4     static const int maxm = 5000; // Größer als die Anzahl der Kanten.
5     struct edge { int node, next; ll flow, value; } edges[maxm << 1];
6     int graph[maxn], queue[maxn], pre[maxn], con[maxn];
7     int n, m, source, target, top;
8     bool inqueue[maxn];
9     ll maxflow, mincost, dis[maxn];
10
11     MinCostFlow() { memset(graph, -1, sizeof(graph)); top = 0; }
12
13     inline int inverse(int x) { return 1 + ((x >> 1) << 2) - x; }
14
15     // Directed edge from u to v, capacity c, weight w.
16     inline int addedge(int u, int v, int c, int w) {
17         edges[top].value = w; edges[top].flow = c; edges[top].node = v;
18         edges[top].next = graph[u]; graph[u] = top++;
19         edges[top].value = -w; edges[top].flow = 0; edges[top].node = u;
20         edges[top].next = graph[v]; graph[v] = top++;
21         return top - 2;
22     }
23
24     bool SPFA() {
25         int point, node, now, head = 0, tail = 1;
26         memset(pre, -1, sizeof(pre));
27         memset(inqueue, 0, sizeof(inqueue));
28         memset(dis, 0x7F, sizeof(dis));
29         dis[source] = 0; queue[0] = source;
30         pre[source] = source; inqueue[source] = true;
31
32         while (head != tail) {
33             now = queue[head++];
34             point = graph[now];
35             inqueue[now] = false;
36             head %= maxn;
37
38             while (point != -1) {

```

```

39                 node = edges[point].node;
40                 if (edges[point].flow > 0 &&
41                     dis[node] > dis[now] + edges[point].value) {
42                     dis[node] = dis[now] + edges[point].value;
43                     pre[node] = now; con[node] = point;
44                     if (!inqueue[node]) {
45                         inqueue[node] = true; queue[tail++] = node;
46                         tail %= maxn;
47                     }
48                     point = edges[point].next;
49                 }
50                 return pre[target] != -1;
51             }
52
53     void extend() {
54         ll w = flowlimit;
55         for (int u = target; pre[u] != u; u = pre[u])
56             w = min(w, edges[con[u]].flow);
57         maxflow += w;
58         mincost += dis[target] * w;
59         for (int u = target; pre[u] != u; u = pre[u]) {
60             edges[con[u]].flow -= w;
61             edges[inverse(con[u])].flow += w;
62         }
63
64     void mincostflow() {
65         maxflow = mincost = 0;
66         while (SPFA()) extend();
67     }
68 };

```

## 2.9 Maximal Cardinality Bipartite Matching

```

1 // Laufzeit: O(n*min(ans^2, |E|))
2 vector< vector<int> > adjlist; // Von links nach rechts.
3 vector<int> pairs; // Der gematchte Knoten oder -1.
4 vector<bool> visited;
5
6 bool dfs(int v) {
7     if (visited[v]) return false;
8     visited[v] = true;
9     for (auto w : adjlist[v]) if (pairs[w] < 0 || dfs(pairs[w])) {
10         pairs[w] = v; pairs[v] = w; return true;
11     }
12     return false;
13 }
14
15 int kuhn(int n) { // n = #Knoten links.
16     pairs.assign(adjlist.size(), -1);
17     int ans = 0;
18     // Greedy Matching. Optionale Beschleunigung.
19     for (int i = 0; i < n; i++) for (auto w : adjlist[i])
20         if (pairs[w] == -1) pairs[i] = w; pairs[w] = i; ans++; break; }

```



```

21 for (int i = 0; i < n; i++) if (pairs[i] == -1) {
22     visited.assign(n, false);
23     ans += dfs(i);
24 }
25 return ans; // Größe des Matchings.
26 }

```

## 3 Geometrie

### 3.1 Closest Pair

```

1 double squaredDist(pt a, pt b) {
2     return (a.fst-b.fst) * (a.fst-b.fst) + (a.snd-b.snd) * (a.snd-b.snd);
3 }
4
5 bool compY(pt a, pt b) {
6     if (a.snd == b.snd) return a.fst < b.fst;
7     return a.snd < b.snd;
8 }
9
10 // points.size() > 1 und alle Punkte müssen verschieden sein!
11 double shortestDist(vector<pt> &points) {
12     set<pt, bool(*)>(pt, pt)> status(compY);
13     sort(points.begin(), points.end());
14     double opt = 1e30, sqrtOpt = 1e15;
15     auto left = points.begin(), right = points.begin();
16     status.insert(*right); right++;
17
18     while (right != points.end()) {
19         if (fabs(left->fst - right->fst) >= sqrtOpt) {
20             status.erase(*(left++));
21         } else {
22             auto lower = status.lower_bound(pt(-1e20, right->snd - sqrtOpt));
23             auto upper = status.upper_bound(pt(-1e20, right->snd + sqrtOpt));
24             while (lower != upper) {
25                 double cand = squaredDist(*right, *lower);
26                 if (cand < opt) {
27                     opt = cand;
28                     sqrtOpt = sqrt(opt);
29                 }
30                 ++lower;
31             }
32             status.insert(*(right++));
33         }
34     }
35     return sqrtOpt;
36 }

```

### 3.2 Geraden

```

1 // Nicht complex<double> benutzen. Eigene struct schreiben.
2 struct line {
3     double a, b, c; // ax + by + c = 0; vertikale Line: b = 0, sonst: b = 1
4 };
5
6 line pointsToLine(pt p1, pt p2) {
7     line l;
8     if (fabs(p1.x - p2.x) < EPSILON) {
9         l.a = 1; l.b = 0.0; l.c = -p1.x;
10    } else {
11        l.a = -(double)(p1.y - p2.y) / (p1.x - p2.x);
12        l.b = 1.0;
13        l.c = -(double)(l.a * p1.x) - p1.y;
14    }
15    return l;
16 }
17
18 bool areParallel(line l1, line l2) {
19     return (fabs(l1.a - l2.a) < EPSILON) && (fabs(l1.b - l2.b) < EPSILON);
20 }
21
22 bool areSame(line l1, line l2) {
23     return areParallel(l1, l2) && (fabs(l1.c - l2.c) < EPSILON);
24 }
25
26 bool areIntersect(line l1, line l2, pt &p) {
27     if (areParallel(l1, l2)) return false;
28     p.x = (l2.b * l1.c - l1.b * l2.c) / (l2.a * l1.b - l1.a * l2.b);
29     if (fabs(l1.b) > EPSILON) p.y = -(l1.a * p.x + l1.c);
30     else p.y = -(l2.a * p.x + l2.c);
31     return true;
32 }

```

### 3.3 Konvexe Hülle

```

1 // Laufzeit: O(n*log(n))
2
3 ll cross(const pt p, const pt a, const pt b) {
4     return (a.x - p.x) * (b.y - p.y) - (a.y - p.y) * (b.x - p.x);
5 }
6
7 // Punkte auf der konvexen Hülle, gegen den Uhrzeigersinn sortiert.
8 // Kollineare Punkte nicht enthalten, entferne dafür "=" im CCW-Test.
9 // Achtung: Der erste und letzte Punkt im Ergebnis sind gleich.
10 // Achtung: Alle Punkte müssen verschieden sein.
11 vector<pt> convexHull(vector<pt> p){
12     int n = p.size(), k = 0;
13     vector<pt> h(2 * n);
14     sort(p.begin(), p.end());
15     for (int i = 0; i < n; i++) { // Untere Hülle.
16         while (k >= 2 && cross(h[k - 2], h[k - 1], p[i]) <= 0.0) k--;
17         h[k++] = p[i];
18     }
19 }

```



```

18 }
19 for (int i = n - 2, t = k + 1; i >= 0; i--) { // Obere Hülle.
20     while (k >= t && cross(h[k - 2], h[k - 1], p[i]) <= 0.0) k--;
21     h[k++] = p[i];
22 }
23 h.resize(k);
24 return h;
25 }

```

### 3.4 Formeln - std::complex

```

1 // Komplexe Zahlen als Darstellung für Punkte. Wenn immer möglich
2 // complex<int> verwenden. Funktionen wie abs() geben dann int zurück.
3 typedef pt complex<double>;
4
5 // Winkel zwischen Punkt und x-Achse in [0, 2 * PI), bzw. zwischen a, b.
6 double angle = arg (a), angle_a_b = arg (a - b);
7
8 // Punkt rotiert um Winkel theta.
9 pt a_rotated = a * exp (pt (0, theta));
10
11 // Mittelpunkt des Dreiecks abc.
12 pt centroid = (a + b + c) / 3.0;
13
14 // Skalarprodukt.
15 double dot(pt a, pt b) { return real(conj(a) * b); }
16
17 // Kreuzprodukt, 0, falls kollinear.
18 double cross(pt a, pt b) { return imag(conj(a) * b); }
19
20 // Flächeninhalt eines Dreiecks bei bekannten Eckpunkten.
21 double areaOfTriangle(pt a, pt b, pt c) {
22     return abs(cross(b - a, c - a)) / 2.0;
23 }
24
25 // Flächeninhalt eines Dreiecks bei bekannten Seitenlängen.
26 double areaOfTriangle(double a, double b, double c) {
27     double s = (a + b + c) / 2;
28     return sqrt(s * (s-a) * (s-b) * (s-c));
29 }
30
31 // Sind die Dreiecke a1, b1, c1, and a2, b2, c2 ähnlich?
32 // Erste Zeile testet Ähnlichkeit mit gleicher Orientierung,
33 // zweite Zeile testet Ähnlichkeit mit unterschiedlicher Orientierung
34 bool similar (pt a1, pt b1, pt c1, pt a2, pt b2, pt c2) {
35     return (
36         (b2-a2) * (c1-a1) == (b1-a1) * (c2-a2) ||
37         (b2-a2) * (conj(c1)-conj(a1)) == (conj(b1)-conj(a1)) * (c2-a2)
38     );
39 }
40
41 // -1 => gegen den Uhrzeigersinn, 0 => kollinear, 1 => im Uhrzeigersinn.
42 // Einschränken der Rückgabe auf [-1,1] ist sicherer gegen Overflows.

```

```

43 double orientation(pt a, pt b, pt c) {
44     double orien = cross(b - a, c - a);
45     if (abs(orien) < EPSILON) return 0; // Braucht großes EPSILON: ~1e-6
46     return orien < 0 ? -1 : 1;
47 }
48
49 // Test auf Streckenschnitt zwischen a-b und c-d.
50 bool lineSegmentIntersection(pt a, pt b, pt c, pt d) {
51     if (orientation(a, b, c) == 0 && orientation(a, b, d) == 0) {
52         double dist = abs(a - b);
53         return (abs(a - c) <= dist && abs(b - c) <= dist) ||
54             (abs(a - d) <= dist && abs(b - d) <= dist);
55     }
56     return orientation(a, b, c) * orientation(a, b, d) <= 0 &&
57         orientation(c, d, a) * orientation(c, d, b) <= 0;
58 }
59
60 // Berechnet die Schnittpunkte der Strecken a-b und c-d. Enthält entweder
61 // keinen Punkt, den einzigen Schnittpunkt oder die Endpunkte der
62 // Schnittstrecke. operator<, min, max müssen noch geschrieben werden!
63 vector<pt> lineSegmentIntersection(pt a, pt b, pt c, pt d) {
64     vector<pt> result;
65     if (orientation(a, b, c) == 0 && orientation(a, b, d) == 0 &&
66         orientation(c, d, a) == 0 && orientation(c, d, b) == 0) {
67         pt minAB = min(a, b), maxAB = max(a, b);
68         pt minCD = min(c, d), maxCD = max(c, d);
69         if (minAB < minCD && maxAB < minCD) return result;
70         if (minCD < minAB && maxCD < minAB) return result;
71         pt start = max(minAB, minCD), end = min(maxAB, maxCD);
72         result.push_back(start);
73         if (start != end) result.push_back(end);
74         return result;
75     }
76     double x1 = real(b) - real(a), y1 = imag(b) - imag(a);
77     double x2 = real(d) - real(c), y2 = imag(d) - imag(c);
78     double u1 = (-y1 * (real(a) - real(c)) + x1 * (imag(a) - imag(c))) /
79         (-x2 * y1 + x1 * y2);
80     double u2 = (x2 * (imag(a) - imag(c)) - y2 * (real(a) - real(c))) /
81         (-x2 * y1 + x1 * y2);
82     if (u1 >= 0 && u1 <= 1 && u2 >= 0 && u2 <= 1) {
83         double x = real(a) + u2 * x1, y = imag(a) + u2 * y1;
84         result.push_back(pt(x, y));
85     }
86     return result;
87 }
88
89 // Entfernung von Punkt p zur Geraden durch a-b.
90 double distToLine(pt a, pt b, pt p) {
91     return abs(cross(p - a, b - a)) / abs(b - a);
92 }
93
94 // Liegt p auf der Geraden a-b?
95 bool pointOnLine(pt a, pt b, pt p) {
96     return orientation(a, b, c) == 0;
97 }

```

```

98
99 // Liegt p auf der Strecke a-b?
100 bool pointOnLineSegment(pt a, pt b, pt p) {
101     if (orientation(a, b, p) != 0) return false;
102     return real(p) >= min(real(a), real(b)) &&
103         real(p) <= max(real(a), real(b)) &&
104         imag(p) >= min(imag(a), imag(b)) &&
105         imag(p) <= max(imag(a), imag(b));
106 }
107
108 // Entfernung von Punkt p zur Strecke a-b.
109 double distToSegment(pt a, pt b, pt p) {
110     if (a == b) return abs(p - a);
111     double segLength = abs(a - b);
112     double u = ((real(p) - real(a)) * (real(b) - real(a)) +
113         (imag(p) - imag(a)) * (imag(b) - imag(a))) /
114         (segLength * segLength);
115     pt projection(real(a) + u * (real(b) - real(a)),
116         imag(a) + u * (imag(b) - imag(a)));
117     double projectionDist = abs(p - projection);
118     if (!pointOnLineSegment(a, b, projection)) projectionDist = 1e30;
119     return min(projectionDist, min(abs(p - a), abs(p - b)));
120 }
121
122 // Kürzeste Entfernung zwischen den Strecken a-b und c-d.
123 double distBetweenSegments(pt a, pt b, pt c, pt d) {
124     if (lineSegmentIntersection(a, b, c, d)) return 0.0;
125     double result = distToSegment(a, b, c);
126     result = min(result, distToSegment(a, b, d));
127     result = min(result, distToSegment(c, d, a));
128     return min(result, distToSegment(c, d, b));
129 }
130
131 // Liegt d in der gleichen Ebene wie a, b, und c?
132 bool isCoplanar(pt a, pt b, pt c, pt d) {
133     return abs((b - a) * (c - a) * (d - a)) < EPSILON;
134 }
135
136 // Berechnet den Flächeninhalt eines Polygons (nicht selbstschneidend).
137 // Punkte gegen den Uhrzeigersinn: positiv, sonst negativ.
138 double areaOfPolygon(vector<pt> &polygon) { // Jeder Eckpunkt nur einmal.
139     double res = 0; int n = polygon.size();
140     for (int i = 0; i < n; i++)
141         res += real(polygon[i]) * imag(polygon[(i + 1) % n]) -
142             real(polygon[(i + 1) % n]) * imag(polygon[i]);
143     return 0.5 * res;
144 }
145
146 // Schneiden sich (p1, p2) und (p3, p4) (gegenüberliegende Ecken).
147 bool rectIntersection(pt p1, pt p2, pt p3, pt p4) {
148     double minx12=min(real(p1), real(p2)), maxx12=max(real(p1), real(p2));
149     double minx34=min(real(p3), real(p4)), maxx34=max(real(p3), real(p4));
150     double miny12=min(imag(p1), imag(p2)), maxy12=max(imag(p1), imag(p2));
151     double miny34=min(imag(p3), imag(p4)), maxy34=max(imag(p3), imag(p4));
152     return (maxx12 >= minx34) && (maxx34 >= minx12) &&

```

```

153         (maxy12 >= miny34) && (maxy34 >= miny12);
154 }
155
156 // Testet, ob ein Punkt im Polygon liegt (beliebige Polygone).
157 bool pointInPolygon(pt p, vector<pt> &polygon) { // Punkte nur einmal.
158     pt rayEnd = p + pt(1, 1000000);
159     int counter = 0, n = polygon.size();
160     for (int i = 0; i < n; i++) {
161         pt start = polygon[i], end = polygon[(i + 1) % n];
162         if (lineSegmentIntersection(p, rayEnd, start, end)) counter++;
163     }
164     return counter & 1;
165 }

```

## 4 Mathe

### 4.1 ggT, kgV, erweiterter euklidischer Algorithmus

```

1 // Laufzeiten: O(log(a) + log(b))
2 ll gcd(ll a, ll b) { return b == 0 ? a : gcd(b, a % b); }
3 ll lcm(ll a, ll b) { return a * (b / gcd(a, b)); }

```

```

1 ll extendedEuclid(ll a, ll b, ll &x, ll &y) { // a*x + b*y = ggt(a, b).
2     if (a == 0) { x = 0; y = 1; return b; }
3     ll x1, y1, d = extendedEuclid(b % a, a, x1, y1);
4     x = y1 - (b / a) * x1; y = x1;
5     return d;
6 }

```

**Multiplikatives Inverses von  $x$  in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**  Sei  $0 \leq x < n$ . Definiere  $d := \gcd(x, n)$ .

Falls  $d = 1$ :

- Erweiterter euklidischer Algorithmus liefert  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $\alpha x + \beta n = 1$ .
- Nach Kongruenz gilt  $\alpha x + \beta n \equiv \alpha x \equiv 1 \pmod{n}$ .
- $x^{-1} \equiv \alpha \pmod{n}$

Falls  $d \neq 1$ : Es existiert kein  $x^{-1}$ .

```

1 // Laufzeit: O(log(n) + log(p))
2 ll multInv(ll n, ll p) {
3     ll x, y;
4     extendedEuclid(n, p, x, y); // Implementierung von oben.
5     x += ((x / p) + 1) * p;
6     return x % p;
7 }

```

### 4.2 Mod-Exponent über $\mathbb{F}_p$

```

1 // Laufzeit:  $O(\log(b))$ 
2 ll multMod(ll a, ll b, ll n) {
3     if(a == 0 || b == 0) return 0;
4     if(b == 1) return a % n;
5     if(b % 2 == 1) return (a + multMod(a, b-1, n)) % n;
6     else return multMod((a + a) % n, b / 2, n);
7 }
8
9 // Laufzeit:  $O(\log(b))$ 
10 ll powMod(ll a, ll b, ll n) {
11     if(b == 0) return 1;
12     if(b == 1) return a % n;
13     if(b % 2 == 1) return multMod(powMod(a, b-1, n), a, n);
14     else return powMod(multMod(a, a, n), b / 2, n);
15 }

```

die Moduli nicht teilerfremd, existiert genau dann eine Lösung, wenn  $a_i \equiv a_j \pmod{\gcd(m_i, m_j)}$ . In diesem Fall sind keine Faktoren auf der linken Seite erlaubt.

```

1 // Laufzeit: O(n * log(n)), n := Anzahl der Kongruenzen
2 // Nur für teilerfremde Moduli. Berechnet das kleinste, nicht negative x,
3 // das alle Kongruenzen simultan löst. Alle Lösungen sind kongruent zum
4 // kgV der Moduli (Produkt, falls alle teilerfremd sind).
5 struct ChineseRemainder {
6     typedef __int128 lll;
7     vector<lll> lhs, rhs, mods, inv;
8     lll M; // Produkt über die Moduli. Kann leicht überlaufen.
9
10    ll g(vector<lll> &vec) {
11        lll res = 0;
12        for (int i = 0; i < (int)vec.size(); i++) {
13            res += (vec[i] * inv[i]) % M;
14            res %= M;
15        }
16        return res;
17    }
18
19    // Fügt Kongruenz l * x = r (mod m) hinzu.
20    void addEquation(ll l, ll r, ll m) {
21        lhs.push_back(l);
22        rhs.push_back(r);
23        mods.push_back(m);
24    }
25
26    // Löst das System.
27    ll solve() {
28        M = accumulate(mods.begin(), mods.end(), lll(1), multiplies<lll>());
29        inv.resize(lhs.size());
30        for (int i = 0; i < (int)lhs.size(); i++) {
31            lll x = (M / mods[i]) % mods[i];
32            inv[i] = (multInv(x, mods[i]) * (M / mods[i]));
33        }
34        return (multInv(g(lhs), M) * g(rhs)) % M;
35    }
36 };

```

## 4.6 Primzahlsieb von ERATOSTHENES

```

1 // Laufzeit: O(n * log log n)
2 #define N 1000000001 // Bis 10^8 in unter 64MB Speicher.
3 bitset<N / 2> isPrime;
4
5 inline bool check(int x) { // Diese Methode zum Lookup verwenden.
6     if (x < 2) return false;
7     else if (x == 2) return true;
8     else if (!(x & 1)) return false;
9     else return !isPrime[x / 2];

```

```

10 }
11
12 inline int primeSieve(int n) { // Rückgabe: Anzahl der Primzahlen <= n.
13     int counter = 1;
14     for (int i = 3; i <= min(N, n); i += 2) {
15         if (!isPrime[i / 2]) {
16             for (int j = 3 * i; j <= min(N, n); j += 2 * i) isPrime[j / 2] = 1;
17             counter++;
18         }
19     }
20     return counter;

```

## 4.7 MILLER-RABIN-Primzahltest

```

1 // Laufzeit: O(log n). Exakt, nicht probabilistisch.
2 bool isPrime(ll n) {
3     if (n == 2) return true;
4     if (n < 2 || n % 2 == 0) return false;
5     ll d = n - 1, j = 0;
6     while (d % 2 == 0) d >>= 1, j++;
7     for (int a = 2; a <= min((ll)37, n - 1); a++) {
8         ll v = powMod(a, d, n); // Implementierung von oben.
9         if (v == 1 || v == n - 1) continue;
10        for (int i = 1; i <= j; i++) {
11            v = multMod(v, v, n); // Implementierung von oben.
12            if (v == n - 1 || v <= 1) break;
13        }
14        if (v != n - 1) return false;
15    }
16    return true;
17 }

```

## 4.8 Binomialkoeffizienten

Vorberechnen, wenn häufig benötigt.

```

1 // Laufzeit: O(k)
2 ll calc_binom(ll n, ll k) { // Sehr sicher gegen Overflows.
3     ll r = 1, d;
4     if (k > n) return 0;
5     for (d = 1; d <= k; d++) { // Reihenfolge garantiert Teilbarkeit.
6         r *= n--;
7         r /= d;
8     }
9     return r;
10 }

```

## 4.9 Polynome & FFT

Multipliziert Polynome A und B.

- $\deg(A * B) = \deg(A) + \deg(B)$
- Vektoren  $a$  und  $b$  müssen mindestens Größe  $\deg(A * B) + 1$  haben. Größe muss eine Zweierpotenz sein.
- Für ganzzahlige Koeffizienten: `(int)round(real(a[i]))`

```

1 // Laufzeit: O(n log(n)).
2 typedef complex<double> cplx; // Eigene Implementierung ist schneller.
3
4 // a.size() muss eine Zweierpotenz sein!
5 vector<cplx> fft(const vector<cplx> &a, bool inverse = 0) {
6     int logn = 1, n = a.size();
7     vector<cplx> A(n);
8     while ((1 << logn) < n) logn++;
9     for (int i = 0; i < n; i++) {
10         int j = 0;
11         for (int k = 0; k < logn; k++) j = (j << 1) | ((i >> k) & 1);
12         A[j] = a[i];
13     }
14     for (int s = 2; s <= n; s <= 1) {
15         double angle = 2 * PI / s * (inverse ? -1 : 1);
16         cplx ws(cos(angle), sin(angle));
17         for (int j = 0; j < n; j += s) {
18             cplx w = 1;
19             for (int k = 0; k < s / 2; k++) {
20                 cplx u = A[j + k], t = A[j + s / 2 + k];
21                 A[j + k] = u + w * t;
22                 A[j + s / 2 + k] = u - w * t;
23                 if (inverse) A[j + k] /= 2, A[j + s / 2 + k] /= 2;
24                 w *= ws;
25             }
26         }
27     }
28     return A;
29 }
30 // Polynome: a[0] = a_0, a[1] = a_1, ... und b[0] = b_0, b[1] = b_1, ...
31 // Bei Integern: Runde Koeffizienten: (int)round(a[i].real())
32 vector<cplx> a = {0,0,0,0,1,2,3,4}, b = {0,0,0,0,2,3,0,1};
33 a = fft(a); b = fft(b);
34 for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) a[i] *= b[i];
35 a = fft(a,1); // a = a * b

```

## 4.10 3D-Kugeln

```

1 // Great Circle Distance mit Längen- und Breitengrad.
2 double gcDist(
3     double pLat, double pLon, double qLat, double qLon, double radius) {
4     pLat *= PI / 180; pLon *= PI / 180; qLat *= PI / 180; qLon *= PI / 180;
5     return radius * acos(cos(pLat) * cos(pLon) * cos(qLat) * cos(qLon) +
6                           cos(pLat) * sin(pLon) * cos(qLat) * sin(qLon) +
7                           sin(pLat) * sin(qLat));
8 }
9
10 // Great Circle Distance mit kartesischen Koordinaten.

```

```

11 double gcDist(point p, point q) {
12     return acos(p.x * q.x + p.y * q.y + p.z * q.z);
13 }
14
15 // 3D Punkt in kartesischen Koordinaten.
16 struct point{
17     double x, y, z;
18     point() {}
19     point(double x, double y, double z) : x(x), y(y), z(z) {}
20     point(double lat, double lon) {
21         lat *= PI / 180.0; lon *= PI / 180.0;
22         x = cos(lat) * sin(lon); y = cos(lat) * cos(lon); z = sin(lat);
23     }
24 };

```

## 4.11 Kombinatorik

### 4.11.1 Berühmte Zahlen

FIBONACCI-Zahlen	$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \quad f(n+2) = f(n+1) + f(n)$
CATALAN-Zahlen	$C_0 = 1 \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{2(2n-1)}{n+1} \cdot C_{n-1}$
EULER-Zahlen (I)	$\langle n \rangle = \langle n-1 \rangle = 1 \quad \langle n \rangle_k = (k+1) \langle n-1 \rangle_k + (n-k) \langle n-1 \rangle_{k-1}$
EULER-Zahlen (II)	$\langle\langle n \rangle\rangle = 1 \quad \langle\langle n \rangle\rangle_k = 0 \quad \langle\langle n \rangle\rangle_k = (k+1) \langle\langle n-1 \rangle\rangle_k + (2n-k-1) \langle\langle n-1 \rangle\rangle_{k-1}$
STIRLING-Zahlen (I)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$
STIRLING-Zahlen (II)	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1 \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$
Integer-Partitions	$f(1,1) = 1 \quad f(n,k) = 0 \text{ für } k > n \quad f(n,k) = f(n-k,k) + f(n,k-1)$

**Bemerkung 1**  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$

**Bemerkung 2 (ZECKENDORFS Theorem)** Jede positive natürliche Zahl kann eindeutig als Summe einer oder mehrerer verschiedener FIBONACCI-Zahlen geschrieben werden, sodass keine zwei aufeinanderfolgenden FIBONACCI-Zahlen in der Summe vorkommen.

Lösung: Greedy, nimm immer die größte FIBONACCI-Zahl, die noch hineinpasst.

**Bemerkung 3** • Die erste und dritte angegebene Formel sind relativ sicher gegen Overflows.

• Die erste Formel kann auch zur Berechnung der CATALAN-Zahlen bezüglich eines Moduls genutzt werden.

**Bemerkung 4** Die CATALAN-Zahlen geben an:  $C_n =$

- Anzahl der Binärbäume mit  $n$  nicht unterscheidbaren Knoten.
- Anzahl der validen Klammerausdrücke mit  $n$  Klammerpaaren.
- Anzahl der korrekten Klammerungen von  $n + 1$  Faktoren.
- Anzahl der Möglichkeiten ein konvexes Polygon mit  $n + 2$  Ecken in Dreiecke zu zerlegen.
- Anzahl der monotonen Pfade (zwischen gegenüberliegenden Ecken) in einem  $n \times n$ -Gitter, die nicht die Diagonale kreuzen.

**Bemerkung 5 (EULER-Zahlen 1. Ordnung)** Die Anzahl der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  mit genau  $k$  Anstiegen.

Begründung: Für die  $n$ -te Zahl gibt es  $n$  mögliche Positionen zum Einfügen. Dabei wird entweder ein Anstieg in zwei gesplittet oder ein Anstieg um  $n$  ergänzt.

**Bemerkung 6 (EULER-Zahlen 2. Ordnung)** Die Anzahl der Permutationen von  $\{1, 1, \dots, n, n\}$  mit genau  $k$  Anstiegen.

**Bemerkung 7 (STIRLING-Zahlen 1. Ordnung)** Die Anzahl der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  mit genau  $k$  Zyklen.

Begründung: Es gibt zwei Möglichkeiten für die  $n$ -te Zahl. Entweder sie bildet einen eigenen Zyklus, oder sie kann an jeder Position in jedem Zyklus einsortiert werden.

**Bemerkung 8 (STIRLING-Zahlen 2. Ordnung)** Die Anzahl der Möglichkeiten  $n$  Elemente in  $k$  nichtleere Teilmengen zu zerlegen.

Begründung: Es gibt  $k$  Möglichkeiten die  $n$  in eine  $n - 1$ -Partition einzuordnen. Dazu kommt der Fall, dass die  $n$  in ihrer eigenen Teilmenge (alleine) steht.

**Bemerkung 9** Anzahl der Teilmengen von  $\mathbb{N}$ , die sich zu  $n$  aufaddieren mit maximalem Element  $\leq k$ .

#### 4.11.2 Verschiedenes

Türme von Hanoi, minimale Schrittzahl:	$T_n = 2^n - 1$
#Regionen zwischen $n$ Gearden	$n(n+1)/2 + 1$
#Abgeschlossene Regionen zwischen $n$ Geraden	$(n^2 - 3n + 2)/2$
#Markierte, gewurzelte Bäume	$n^{n-1}$
#Markierte, nicht gewurzelte Bäume	$n^{n-2}$

## 4.12 Satz von SPRAGUE-GRUNDY

Weise jedem Zustand  $X$  wie folgt eine GRUNDY-Zahl  $g(X)$  zu:

$$g(X) := \min \{ \mathbb{Z}_0^+ \setminus \{g(Y) \mid Y \text{ von } X \text{ aus direkt erreichbar} \} \}$$

$X$  ist genau dann gewonnen, wenn  $g(X) > 0$  ist.

Wenn man  $k$  Spiele in den Zuständen  $X_1, \dots, X_k$  hat, dann ist die GRUNDY-Zahl des Gesamtzustandes  $g(X_1) \oplus \dots \oplus g(X_k)$ .

## 4.13 Big Integers

```

1 // Bislang keine Division. Multiplikation nach Schulmethode.
2 #define PLUS 0
3 #define MINUS 1
4 #define BASE 1000000000
5 #define EXPONET 9
6
7 struct bigint {
8     int sign;
9     vector<ll> digits;
10
11     // Initialisiert mit 0.
12     bigint(void) { sign = PLUS; }
13
14     // Initialisiert mit kleinem Wert.
15     bigint(ll value) {
16         if (value == 0) sign = PLUS;
17         else {
18             sign = value >= 0 ? PLUS : MINUS;
19             value = abs(value);
20             while (value) {
21                 digits.push_back(value % BASE);
22                 value /= BASE;
23             }
24         }
25
26     // Initialisiert mit C-String. Kann nicht mit Vorzeichen umgehen.
27     bigint(char *str, int length) {
28         int base = 1;
29         ll digit = 0;
30         for (int i = length - 1; i >= 0; i--) {
31             digit += base * (str[i] - '0');
32             if (base * 10 == BASE) {
33                 digits.push_back(digit);
34                 digit = 0;
35                 base = 1;
36             } else base *= 10;
37         }
38         if (digit != 0) digits.push_back(digit);
39         sign = PLUS;
40     }
41
42     // Löscht führende Nullen und macht -0 zu 0.
43     void trim() {
44         while (digits.size() > 0 && digits[digits.size() - 1] == 0)
45             digits.pop_back();
46         if (digits.size() == 0 && sign == MINUS) sign = PLUS;
47     }

```



```

47 // Gibt die Zahl aus.
48 void print() {
49     if (digits.size() == 0) { printf("0"); return; }
50     if (sign == MINUS) printf("-");
51     printf("%lld", digits[digits.size() - 1]);
52     for (int i = digits.size() - 2; i >= 0; i--) {
53         printf("%09lld", digits[i]); // Anpassen, wenn andere Basis gewählt
54         wird.
55     }
56 };
57
58 // Kleiner-oder-gleich-Vergleich.
59 bool operator<=(bigint &a, bigint &b) {
60     if (a.digits.size() == b.digits.size()) {
61         int idx = a.digits.size() - 1;
62         while (idx >= 0) {
63             if (a.digits[idx] < b.digits[idx]) return true;
64             else if (a.digits[idx] > b.digits[idx]) return false;
65             idx--;
66         }
67         return true;
68     }
69     return a.digits.size() < b.digits.size();
70 }
71
72 // Kleiner-Vergleich.
73 bool operator<(bigint &a, bigint &b) {
74     if (a.digits.size() == b.digits.size()) {
75         int idx = a.digits.size() - 1;
76         while (idx >= 0) {
77             if (a.digits[idx] < b.digits[idx]) return true;
78             else if (a.digits[idx] > b.digits[idx]) return false;
79             idx--;
80         }
81         return false;
82     }
83     return a.digits.size() < b.digits.size();
84 }
85
86 void sub(bigint *a, bigint *b, bigint *c);
87
88 // a + b = c. a, b, c dürfen gleich sein.
89 void add(bigint *a, bigint *b, bigint *c) {
90     if (a->sign == b->sign) c->sign = a->sign;
91     else {
92         if (a->sign == MINUS) {
93             a->sign ^= 1;
94             sub(b, a, c);
95             a->sign ^= 1;
96         } else {
97             b->sign ^= 1;
98             sub(a, b, c);
99             b->sign ^= 1;
100     }

```

```

101     return;
102 }
103
104 c->digits.resize(max(a->digits.size(), b->digits.size()));
105 ll carry = 0;
106 int i = 0;
107 for (; i < (int)min(a->digits.size(), b->digits.size()); i++) {
108     ll sum = carry + a->digits[i] + b->digits[i];
109     c->digits[i] = sum % BASE;
110     carry = sum / BASE;
111 }
112 if (i < (int)a->digits.size()) {
113     for (; i < (int)a->digits.size(); i++) {
114         ll sum = carry + a->digits[i];
115         c->digits[i] = sum % BASE;
116         carry = sum / BASE;
117     }
118 } else {
119     for (; i < (int)b->digits.size(); i++) {
120         ll sum = carry + b->digits[i];
121         c->digits[i] = sum % BASE;
122         carry = sum / BASE;
123     }
124     if (carry) c->digits.push_back(carry);
125 }
126
127 // a - b = c. c darf a oder b sein. a und b müssen verschieden sein.
128 void sub(bigint *a, bigint *b, bigint *c) {
129     if (a->sign == MINUS || b->sign == MINUS) {
130         b->sign ^= 1;
131         add(a, b, c);
132         b->sign ^= 1;
133         return;
134     }
135
136     if (a < b) {
137         sub(b, a, c);
138         c->sign = MINUS;
139         c->trim();
140         return;
141     }
142
143     c->digits.resize(a->digits.size());
144     ll borrow = 0;
145     int i = 0;
146     for (; i < (int)b->digits.size(); i++) {
147         ll diff = a->digits[i] - borrow - b->digits[i];
148         if (a->digits[i] > 0) borrow = 0;
149         if (diff < 0) {
150             diff += BASE;
151             borrow = 1;
152         }
153         c->digits[i] = diff % BASE;
154     }
155     for (; i < (int)a->digits.size(); i++) {

```



```

156     ll diff = a->digits[i] - borrow;
157     if (a->digits[i] > 0) borrow = 0;
158     if (diff < 0) {
159         diff += BASE;
160         borrow = 1;
161     }
162     c->digits[i] = diff % BASE;
163 }
164 c->trim();
165 }
166
167 // Ziffernmultiplikation a * b = c. b und c dürfen gleich sein.
168 // a muss kleiner BASE sein.
169 void digitMul(ll a, bigint *b, bigint *c) {
170     if (a == 0) {
171         c->digits.clear();
172         c->sign = PLUS;
173         return;
174     }
175     c->digits.resize(b->digits.size());
176     ll carry = 0;
177     for (int i = 0; i < (int)b->digits.size(); i++) {
178         ll prod = carry + b->digits[i] * a;
179         c->digits[i] = prod % BASE;
180         carry = prod / BASE;
181     }
182     if (carry) c->digits.push_back(carry);
183     c->sign = (a > 0) ? b->sign : 1 ^ b->sign;
184     c->trim();
185 }
186
187 // Zifferndivision b / a = c. b und c dürfen gleich sein.
188 // a muss kleiner BASE sein.
189 void digitDiv(ll a, bigint *b, bigint *c) {
190     c->digits.resize(b->digits.size());
191     ll carry = 0;
192     for (int i = (int)b->digits.size() - 1; i >= 0; i--) {
193         ll quot = (carry * BASE + b->digits[i]) / a;
194         carry = carry * BASE + b->digits[i] - quot * a;
195         c->digits[i] = quot;
196     }
197     c->sign = b->sign ^ (a < 0);
198     c->trim();
199 }
200
201 // a * b = c. c darf weder a noch b sein. a und b dürfen gleich sein.
202 void mult(bigint *a, bigint *b, bigint *c) {
203     bigint row = *a, tmp;
204     c->digits.clear();
205     for (int i = 0; i < (int)b->digits.size(); i++) {
206         digitMul(b->digits[i], &row, &tmp);
207         add(&tmp, c, c);
208         row.digits.insert(row.digits.begin(), 0);
209     }
210     c->sign = a->sign != b->sign;

```

```

211     c->trim();
212 }
213
214 // Berechnet eine kleine Zehnerpotenz.
215 inline ll pow10(int n) {
216     ll res = 1;
217     for (int i = 0; i < n; i++) res *= 10;
218     return res;
219 }
220
221 // Berechnet eine große Zehnerpotenz.
222 void power10(ll e, bigint *out) {
223     out->digits.assign(e / EXPONET + 1, 0);
224     if (e % EXPONET)
225         out->digits[out->digits.size() - 1] = pow10(e % EXPONET);
226     else out->digits[out->digits.size() - 1] = 1;
227 }
228
229 // Nimmt eine Zahl module einer Zehnerpotenz 10^e.
230 void mod10(int e, bigint *a) {
231     int idx = e / EXPONET;
232     if ((int)a->digits.size() < idx + 1) return;
233     if (e % EXPONET) {
234         a->digits.resize(idx + 1);
235         a->digits[idx] %= pow10(e % EXPONET);
236     } else {
237         a->digits.resize(idx);
238     }
239     a->trim();
240 }

```

## 5 Strings

### 5.1 KNUTH-MORRIS-PRATT-Algorithmus

```

1 // Laufzeit: O(n + m), n = #Text, m = #Pattern
2 vector<int> kmpPreprocessing(string &sub) {
3     vector<int> b(sub.length() + 1);
4     b[0] = -1;
5     int i = 0, j = -1;
6     while (i < (int)sub.length()) {
7         while (j >= 0 && sub[i] != sub[j]) j = b[j];
8         i++; j++;
9         b[i] = j;
10    }
11    return b;
12 }
13
14 vector<int> kmpSearch(string &s, string &sub) {
15     vector<int> pre = kmpPreprocessing(sub), result;
16     int i = 0, j = 0;
17     while (i < (int)s.length()) {

```

```

18 while (j >= 0 && s[i] != sub[j]) j = pre[j];
19 i++; j++;
20 if (j == (int)sub.length()) {
21     result.push_back(i - j);
22     j = pre[j];
23 }
24 return result;
25 }

```

## 5.2 AHO-CORASICK-Automat

```

1 // Laufzeit: O(n + m + z), n = #Text, m = Summe #Pattern, z = #Matches
2 // Findet mehrere Patterns gleichzeitig in einem String.
3 // 1) Wurzel erstellen: vertex *automaton = new vertex();
4 // 2) Mit addString(automaton, s, idx); Patterns hinzufügen.
5 // 3) finishAutomaton(automaton) aufrufen.
6 // 4) Mit automaton = go(automaton, c) in nächsten Zustand wechseln.
7 // DANACH: Wenn patterns-Vektor nicht leer ist: Hier enden alle
8 // enthaltenen Patterns.
9 // ACHTUNG: Die Zahlenwerte der auftretenden Buchstaben müssen
10 // zusammenhängend sein und bei 0 beginnen!
11 struct vertex {
12     vertex *next[ALPHABET_SIZE], *failure;
13     char character;
14     vector<int> patterns; // Indizes der Patterns, die hier enden.
15     vertex() { for (int i = 0; i < ALPHABET_SIZE; i++) next[i] = NULL; }
16 };
17
18 void addString(vertex *v, string &pattern, int patternIdx) {
19     for (int i = 0; i < (int)pattern.length(); i++) {
20         if (!v->next[(int)pattern[i]]) {
21             vertex *w = new vertex();
22             w->character = pattern[i];
23             v->next[(int)pattern[i]] = w;
24         }
25         v = v->next[(int)pattern[i]];
26     }
27     v->patterns.push_back(patternIdx);
28 }
29
30 void finishAutomaton(vertex *v) {
31     for (int i = 0; i < ALPHABET_SIZE; i++)
32         if (!v->next[i]) v->next[i] = v;
33
34     queue<vertex*> q;
35     for (int i = 0; i < ALPHABET_SIZE; i++) {
36         if (v->next[i] != v) {
37             v->next[i]->failure = v;
38             q.push(v->next[i]);
39         }
40     }
41     while (!q.empty()) {
42         vertex *r = q.front(); q.pop();
43         for (int i = 0; i < ALPHABET_SIZE; i++) {

```

```

43         if (r->next[i]) {
44             q.push(r->next[i]);
45             vertex *f = r->failure;
46             while (!f->next[i]) f = f->failure;
47             r->next[i]->failure = f->next[i];
48             for (int j = 0; j < (int)f->next[i]->patterns.size(); j++) {
49                 r->next[i]->patterns.push_back(f->next[i]->patterns[j]);
50             }
51         }
52     }
53     vertex* go(vertex *v, char c) {
54         if (v->next[(int)c]) return v->next[(int)c];
55         else return go(v->failure, c);
56     }

```

## 5.3 Trie

```

1 struct node {
2     node *(e)[26]; // Implementierung für Kleinbuchstaben.
3     int c = 0; // Anzahl der Wörter, die an diesem node enden.
4     node() { for(int i = 0; i < 26; i++) e[i] = NULL; }
5 };
6
7 void insert(node *root, string &txt, int s) { // Laufzeit: O(|txt|)
8     if(s == (int)txt.size()) root->c++;
9     else {
10         int idx = (int)(txt[s] - 'a');
11         if(root->e[idx] == NULL) root->e[idx] = new node();
12         insert(root->e[idx], txt, s+1);
13     }
14 }
15
16 int contains(node *root, string &txt, int s) { // Laufzeit: O(|txt|)
17     if(s == txt.size()) return root->c;
18     int idx = (int)(txt[s] - 'a');
19     if(root->e[idx] != NULL) return contains(root->e[idx], txt, s + 1);
20     else return 0;
21 }

```

## 5.4 Suffix-Array

```

1 struct SuffixArray { // MAX_LG = ceil(log2(MAX_N))
2     static const int MAX_N = 100010, MAX_LG = 17;
3     pair<pair<int, int>, int> L[MAX_N];
4     int P[MAX_LG + 1][MAX_N], n, step, count;
5     int suffixArray[MAX_N], lcpArray[MAX_N];
6
7     SuffixArray(const string &s) : n(s.size()) { // Laufzeit: O(n*log^2(n))
8         for (int i = 0; i < n; i++) P[0][i] = s[i];
9         suffixArray[0] = 0; // Falls n == 1.
10        for (step = 1, count = 1; count < n; step++, count <= 1) {
11            for (int i = 0; i < n; i++) L[i] =

```

```

12     {{P[step-1][i], i+count < n ? P[step-1][i+count] : -1}, i};
13     sort(L, L + n);
14     for (int i = 0; i < n; i++) P[step][L[i].second] = i > 0 &&
15         L[i].first == L[i-1].first ? P[step][L[i-1].second] : i;
16 }
17 for (int i = 0; i < n; i++) suffixArray[i] = L[i].second;
18 for (int i = 1; i < n; i++)
19     lcpArray[i] = lcp(suffixArray[i - 1], suffixArray[i]);
20 }
21
22 // x und y sind Indizes im String, nicht im Suffixarray.
23 int lcp(int x, int y) { // Laufzeit: O(log(n))
24     int k, ret = 0;
25     if (x == y) return n - x;
26     for (k = step - 1; k >= 0 && x < n && y < n; k--)
27         if (P[k][x] == P[k][y])
28             x += 1 << k, y += 1 << k, ret += 1 << k;
29     return ret;
30 }
31 };

```

## 5.5 Longest Common Substring

```

1 //longest common substring.
2 struct lcse {
3     int i = 0, s = 0;
4 };
5 string lcp(string s[2]) {
6     if(s[0].length() == 0 || s[1].length() == 0) return "";
7     vector<lcse> a(s[0].length()+s[1].length());
8     for(int k = 0; k < a.size(); k++) a[k].i=(k < s[0].length() ? k : k - s
9         [0].length()), a[k].s = (k < s[0].length() ? 0 : 1);
10    sort(a.begin(), a.end(), [&] (const lcse &u, const lcse &l) {
11        int ui = u.i, li = l.i;
12        while(ui < s[u.s].length() && li < s[l.s].length()) {
13            if(s[u.s][ui] < s[l.s][li]) return true;
14            else if(s[u.s][ui] > s[l.s][li]) return false;
15            ui++; li++;
16        }
17        return !(ui < s[u.s].length());
18    });
19    int r = 0, m=0, c=0;
20    for(int i = 0; i < a.size() - 1; i++) {
21        if(a[i].s == a[i+1].s) continue;
22        c = 0;
23        while(a[i].i+c < s[a[i].s].length() && a[i+1].i+c < s[a[i+1].s].
24            length() && s[a[i].s][a[i].i+c] == s[a[i+1].s][a[i+1].i+c]) c++;
25        if(c > m) r=i, m=c;
26    }
27    return m == 0 ? "" : s[a[r].s].substr(a[r].i, m);
28 }

```

## 5.6 Longest Common Subsequence

```

1 // Laufzeit: O(|a|*|b|)
2 string lcsc(string &a, string &b) {
3     int m[a.length() + 1][b.length() + 1], x=0, y=0;
4     memset(m, 0, sizeof(m));
5     for(int y = a.length() - 1; y >= 0; y--) {
6         for(int x = b.length() - 1; x >= 0; x--) {
7             if(a[y] == b[x]) m[y][x] = 1 + m[y+1][x+1];
8             else m[y][x] = max(m[y+1][x], m[y][x+1]);
9         } // Für die Länge: return m[0][0];
10    }
11    string res;
12    while(x < b.length() && y < a.length()) {
13        if(a[y] == b[x]) res += a[y++], x++;
14        else if(m[y][x+1] > m[y+1][x+1]) x++;
15        else y++;
16    }
17    return res;
18 }

```

## 6 Java

### 6.1 Introduction

- Compilen: javac main.java
- Ausführen: java main < sample.in
- Eingabe: Scanner ist sehr langsam. Bei großen Eingaben muss ein Buffered Reader verwendet werden.

```

1 Scanner in = new Scanner(System.in); // java.util.Scanner
2 String line = in.nextLine(); // Die nächste Zeile.
3 int num = in.nextInt(); // Das nächste Token als int.
4 double num2 = in.nextDouble(); // Das nächste Token als double.

```

- Ausgabe:

```

1 // In StringBuilder schreiben und auf einmal ausgeben ist schneller.
2 StringBuilder sb = new StringBuilder(); // java.lang.StringBuilder
3 sb.append("Hallo Welt");
4 System.out.print(sb.toString());

```

### 6.2 BigInteger

```

1 // Berechnet this +,*,/,- val.
2 BigInteger add(BigInteger val), multiply(BigInteger val),
3     divide(BigInteger val), subtract(BigInteger val)
4
5 // Berechnet this^e.
6 BigInteger pow(BigInteger e)
7

```

```

8 // Bit-Operationen.
9 BigInteger and(BigInteger val), or(BigInteger val), xor(BigInteger val),
10    not(), shiftLeft(int n), shiftRight(int n)
11
12 // Berechnet den ggT von abs(this) und abs(val).
13 BigInteger gcd(BigInteger val)
14
15 // Berechnet this mod m, this^-1 mod m, this^e mod m.
16 BigInteger mod(BigInteger m), modInverse(BigInteger m),
17    modPow(BigInteger e, BigInteger m)
18
19 // Berechnet die nächste Zahl, die größer und wahrscheinlich prim ist.
20 BigInteger nextProbablePrime()
21
22 // Berechnet int/long/float/double-Wert.
23 // Ist die Zahl zu groß werden die niedrigsten Bits konvertiert.
24 int intValue(), long longValue(),
25 float floatValue(), double doubleValue()

```

## 7 Sonstiges

### 7.1 2-SAT

1. Bedingungen in 2-CNF formulieren.
2. Implikationsgraph bauen,  $(a \vee b)$  wird zu  $\neg a \Rightarrow b$  und  $\neg b \Rightarrow a$ .
3. Finde die starken Zusammenhangskomponenten.
4. Genau dann lösbar, wenn keine Variable mit ihrer Negation in einer SCC liegt.

### 7.2 Zeileneingabe

```

1 // Zerlegt s anhand aller Zeichen in delim.
2 vector<string> split(string &s, string delim) {
3     vector<string> result; char *token;
4     token = strtok((char*)s.c_str(), (char*)delim.c_str());
5     while (token != NULL) {
6         result.push_back(string(token));
7         token = strtok(NULL, (char*)delim.c_str());
8     }
9     return result;
10 }

```

### 7.3 Bit Operations

```

1 // Bit an Position j auslesen.
2 (a & (1 << j)) != 0
3 // Bit an Position j setzen.
4 a |= (1 << j)
5 // Bit an Position j löschen.
6 a &= ~(1 << j)
7 // Bit an Position j umkehren.
8 a ^= (1 << j)
9 // Wert des niedrigsten gesetzten Bits.
10 (a & -a)
11 // Setzt alle Bits auf 1.
12 a = -1
13 // Setzt die ersten n Bits auf 1. Achtung: Overflows.
14 a = (1 << n) - 1

```

## 7.4 Josephus-Problem

$n$  Personen im Kreis, jeder  $k$ -te wird erschossen.

**Spezialfall  $k = 2$ :** Betrachte Binärdarstellung von  $n$ . Für  $n = 1b_1b_2b_3..b_n$  ist  $b_1b_2b_3..b_n1$  die Position des letzten Überlebenden. (Rotiere  $n$  um eine Stelle nach links)

```

1 int rotateLeft(int n) { // Der letzte Überlebende, 1-basiert.
2     for (int i = 31; i >= 0; i--)
3         if (n & (1 << i)) {
4             n &= ~(1 << i);
5             break;
6         }
7     n <<= 1; n++; return n;
8 }

```

**Allgemein:** Sei  $F(n, k)$  die Position des letzten Überlebenden. Nummeriere die Personen mit  $0, 1, \dots, n-1$ . Nach Erschießen der  $k$ -ten Person, hat der Kreis noch Größe  $n-1$  und die Position des Überlebenden ist jetzt  $F(n-1, k)$ . Also:  $F(n, k) = (F(n-1, k) + k) \% n$ . Basisfall:  $F(1, k) = 0$ .

```

1 int josephus(int n, int k) { // Der letzte Überlebende, 0-basiert.
2     if (n == 1) return 0;
3     return (josephus(n - 1, k) + k) % n;
4 }

```

**Beachte bei der Ausgabe, dass die Personen im ersten Fall von  $1, \dots, n$  nummeriert sind, im zweiten Fall von  $0, \dots, n-1$ !**

## 7.5 Gemischtes

- JOHNSONS *Reweighting Algorithmus*: Füge neue Quelle  $s$  hinzu, mit Kanten mit Gewicht 0 zu allen Knoten. Nutze BELLMANN-FORD zum Betsimmen

der Entfernungen  $d[i]$  von  $s$  zu allen anderen Knoten. Stoppe, wenn es negative Zyklen gibt. Sonst ändere die Gewichte von allen Kanten  $(u, v)$  im ursprünglichen Graphen zu  $d[u] + w[u, v] - d[v]$ . Dann sind alle Kantengewichte nichtnegativ, DIJKSTRA kann angewendet werden.

- Für ein System von Differenzbeschränkungen: Ändere alle Bedingungen in die Form  $a - b \leq c$ . Für jede Bedingung füge eine Kante  $(b, a)$  mit Gewicht  $c$  ein. Füge Quelle  $s$  hinzu, mit Kanten zu allen Knoten mit Gewicht 0. Nutze BELLMANN-FORD, um die kürzesten Pfade von  $s$  aus zu finden.  $d[v]$  ist mögliche Lösung für  $v$ .
- Min-Weight-Vertex-Cover im bipartiten Graph: Partitioniere in  $A$ ,  $B$  und füge Kanten  $s \rightarrow A$  mit Gewicht  $w(A)$  und Kanten  $B \rightarrow t$  mit Gewicht  $w(B)$  hinzu. Füge Kanten mit Kapazität  $\infty$  von  $A$  nach  $B$  hinzu, wo im originalen Graphen Kanten waren. Max-Flow ist die Lösung.  
Im Residualgraphen:

- Das Vertex-Cover sind die Knoten inzident zu den Brücken. *oder*
- Die Knoten in  $A$ , die *nicht* von  $s$  erreichbar sind und die Knoten in  $B$ , die von  $t$  erreichbar sind.

- Allgemeiner Graph: Das Komplement eines Vertex-Cover ist ein Independent Set.  $\Rightarrow$  Max Weight Independent Set ist Komplement von Min Weight Vertex Cover.
- Bipartiter Graph: Min Vertex Cover (kleinste Menge Kanten, die alle Knoten berühren) = Max Matching.

- Bipartites Matching mit Gewichten auf linken Knoten. Minimiere Matchinggewicht. Lösung: Sortiere Knoten links aufsteigend nach Gewicht, danach nutze normlen Algorithmus (KUHN, Seite 7)

## 7.6 Sonstiges

```

1 // Alles-Header.
2 #include <bits/stdc++.h>
3
4 // Setzt das deutsche Tastaturlayout.
5 setxkbmap de
6
7 // Schnelle Ein-/Ausgabe mit cin/cout.
8 ios::sync_with_stdio(false);
9
10 // Set mit eigener Sortierfunktion. Typ muss nicht explizit angegeben
    werden.
11 set<point2, decltype(comp)> set1(comp);
12
13 // PI
14 #define PI (2*acos(0))
15
16 // STL-Debugging, Compiler flags.
17 -D_GLIBCXX_DEBUG
18 #define _GLIBCXX_DEBUG
19
20 // 128-Bit Integer. Muss zum Einlesen/Ausgeben in einen int oder long
    long gecastet werden.
21 __int128

```