

# Team Contest Reference

ChaosKITs  
Karlsruhe Institute of Technology

8. Januar 2016

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Datenstrukturen</b>	<b>2</b>		
1.1 Union-Find	2		
1.2 Segmentbaum	2		
1.3 Fenwick Tree	3		
1.4 Range Minimum Query	3		
1.5 STL-Tree	3		
<b>2 Graphen</b>	<b>4</b>		
2.1 Minimale Spannbäume	4		
2.1.1 Kruskal	4		
2.2 Kürzeste Wege	4		
2.2.1 Algorithmus von DIJKSTRA	4		
2.2.2 BELLMANN-FORD-Algorithmus	5		
2.2.3 FLOYD-WARSHALL-Algorithmus	5		
2.3 Strongly Connected Components (TARJANS-Algorithmus)	5		
2.4 Artikulationspunkte und Brücken	6		
2.5 Eulertouren	7		
2.6 Lowest Common Ancestor	8		
2.7 Max-Flow	8		
2.7.1 Capacity Scaling	8		
2.7.2 Push Relabel	9		
2.7.3 Anwendungen	10		
2.8 Min-Cost-Max-Flow	10		
2.9 Maximal Cardinatlity Bipartite Matching	11		
2.10 TSP	12		
2.11 Bitonic TSP	12		
<b>3 Geometrie</b>	<b>13</b>		
3.1 Closest Pair	13		
3.2 Geraden	13		
3.3 Konvexe Hülle	14		
3.4 Formeln - std::complex	15		
<b>4 Mathe</b>	<b>16</b>		
4.1 ggT, kgV, erweiterter euklidischer Algorithmus	16		
		4.1.1 Multiplikatives Inverses von $x$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	16
		4.2 Primzahlsieb von Eratosthenes	17
		4.2.1 Faktorisierung	17
		4.2.2 Mod-Exponent über $\mathbb{F}_p$	17
		4.3 LGS über $\mathbb{F}_p$	17
		4.4 Binomialkoeffizienten	18
		4.5 Satz von SPRAGUE-GRUNDY	18
		4.6 Maximales Teilfeld	18
		4.7 Kombinatorik	19
		4.7.1 Berühmte Zahlen	19
		4.7.2 Verschiedenes	20
		<b>5 Strings</b>	<b>20</b>
		5.1 KNUTH-MORRIS-PRATT-Algorithmus	20
		5.2 LEVENSHTEIN-Distanz	20
		5.3 Trie	20
		5.4 Suffix-Array	21
		5.5 Longest Common Substring	21
		5.6 Longest Common Subsequence	22
		<b>6 Java</b>	<b>22</b>
		6.1 Introduction	22
		6.2 BigInteger	23
		<b>7 Sonstiges</b>	<b>23</b>
		7.1 2-SAT	23
		7.2 Sortieren in Linearzeit	23
		7.2.1 Bucketsort	23
		7.2.2 LSD-Radixsort	23
		7.3 Bit Operations	24
		7.4 Josephus-Problem	24
		7.5 Gemischtes	25
		<b>8 Convenience-Methoden</b>	<b>25</b>
		8.1 Zeileneingabe	25
		8.2 Template	25
		8.3 Deutsches Tatstaturlayout	26

# 1 Datenstrukturen

## 1.1 Union-Find

```

1 // Laufzeit:  $O(n \cdot \alpha(n))$ 
2 // "height" ist obere Schranke für die Höhe der Bäume. Sobald Pfadkompression
3 // angewendet wurde, ist die genaue Höhe nicht mehr effizient berechenbar.
4 vector<int> parent // Initialisiere mit Index im Array.
5 vector<int> height; // Initialisiere mit 0.
6
7 int findSet(int n) { // Pfadkompression
8     if (parent[n] != n) parent[n] = findSet(parent[n]);
9     return parent[n];
10 }
11
12 void linkSets(int a, int b) { // Union by rank.
13     if (height[a] < height[b]) parent[a] = b;
14     else if (height[b] < height[a]) parent[b] = a;
15     else {
16         parent[a] = b;
17         height[b]++;
18     }
19 }
20
21 void unionSets(int a, int b) { // Diese Funktion aufrufen.
22     if (findSet(a) != findSet(b)) linkSets(findSet(a), findSet(b));
23 }

```

## 1.2 Segmentbaum

```

1 // Laufzeit: init:  $O(n)$ , query:  $O(\log n)$ , update:  $O(\log n)$ 
2 // Berechnet das Maximum im Array.
3 int a[MAX_N], m[4 * MAX_N];
4
5 int query(int x, int y, int k = 0, int X = 0, int Y = MAX_N - 1) {
6     if (x <= X && Y <= y) return m[k];
7     if (y < X || Y < x) return -1000000000; // Ein "neutrales" Element.
8     int M = (X + Y) / 2;
9     return max(query(x, y, 2 * k + 1, X, M), query(x, y, 2 * k + 2, M + 1, Y));
10 }
11
12 void update(int i, int v, int k = 0, int X = 0, int Y = MAX_N - 1) {
13     if (i < X || Y < i) return;
14     if (X == Y) {
15         m[k] = v;
16         a[i] = v;
17         return;
18     }
19     int M = (X + Y) / 2;
20     update(i, v, 2 * k + 1, X, M);
21     update(i, v, 2 * k + 2, M + 1, Y);
22     m[k] = max(m[2 * k + 1], m[2 * k + 2]);
23 }
24
25 // Einmal vor allen anderen Operationen aufrufen.
26 void init(int k = 0, int X = 0, int Y = MAX_N - 1) {
27     if (X == Y) {
28         m[k] = a[X];
29         return;
30     }
31     int M = (X + Y) / 2;
32     init(2 * k + 1, X, M);
33     init(2 * k + 2, M + 1, Y);
34     m[k] = max(m[2 * k + 1], m[2 * k + 2]);
35 }

```

update() kann so umgeschrieben werden, dass ganze Intervalle geändert werden. Dazu muss ein Offset in den inneren Knoten des Baums gespeichert werden.

### 1.3 Fenwick Tree

```

1  vector<int> FT; //Fenwick-Tree
2
3  //Build an Fenwick-Tree over an array a. Time Complexity: O(n*log(n))
4  buildFenwickTree(vector<int>& a) {
5      n = a.size();
6      FT.assign(n+1,0);
7      for(int i = 0; i < n; i++) updateFT(i,a[i]);
8  }
9
10 //Prefix-Sum of intervall [0..i]. Time Complexity: O(log(n))
11 int prefix_sum(int i) {
12     int sum = 0; i++;
13     while(i > 0) { sum += FT[i]; i -= (i & (-i)); }
14     return sum;
15 }
16
17 //Adds val to index i. Time Complexity O(log(n))
18 void updateFT(int i, int val) {
19     i++; while(i <= n) { FT[i] += val; i += (i & (-i)); }
20 }

```

### 1.4 Range Minimum Query

```

1  vector<int> data(RMQ_SIZE);
2  vector<vector<int>> rmq(floor(log2(RMQ_SIZE)) + 1, vector<int>(RMQ_SIZE));
3
4  //Runtime: O(n*log(n))
5  void initRMQ() {
6      for(int i = 0, s = 1, ss = 1; s <= RMQ_SIZE; ss=s, s*=2, i++) {
7          for(int l = 0; l + s <= RMQ_SIZE; l++) {
8              if(i == 0) rmq[0][l] = l;
9              else {
10                 int r = l + ss;
11                 rmq[i][l] = (data[rmq[i-1][l]] <= data[rmq[i-1][r]] ? rmq[i-1][l] : rmq[i-1][r]);
12             }
13         }
14     }
15 }
16 //returns index of minimum! [l, r)
17 //Runtime: O(1)
18 int queryRMQ(int l, int r) {
19     if(l >= r) return l;
20     int s = floor(log2(r-l)); r = r - (1 << s);
21     return (data[rmq[s][l]] <= data[rmq[s][r]] ? rmq[s][l] : rmq[s][r]);
22 }

```

### 1.5 STL-Tree

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
3  #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
4  using namespace std; using namespace __gnu_pbds;
5  typedef tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag, tree_order_statistics_node_update> Tree;
6  int main() {
7      Tree X;
8      for (int i = 1; i <= 16; i <= 1) X.insert(i); // {1, 2, 4, 8, 16}
9      cout << *X.find_by_order(3) << endl; // => 8
10     cout << X.order_of_key(10) << endl; // => 4 = successor of 10 = min i such that X[i] >= 10
11     return 0;
12 }

```

## 2 Graphen

### 2.1 Minimale Spannbäume

Benutze Algorithmus von KRUSKAL oder Algorithmus von PRIM.

**Schnitteigenschaft** Für jeden Schnitt  $C$  im Graphen gilt: Gibt es eine Kante  $e$ , die echt leichter ist als alle anderen Schnittkanten, so gehört diese zu allen minimalen Spannbäumen. ( $\Rightarrow$  Die leichteste Kante in einem Schnitt kann in einem minimalen Spannbaum verwendet werden.)

**Kreiseigenschaft** Für jeden Kreis  $K$  im Graphen gilt: Die schwerste Kante auf dem Kreis ist nicht Teil des minimalen Spannbauums.

#### 2.1.1 Kruskal

```

1 typedef pair<int,int> ii;
2 typedef vector<pair<int,ii>> graph;
3
4 //Takes a Graph g (EdgeList!!!) with N nodes and computes the MST and Cost of it. Runtime:  $O(|E| \cdot \log(|E|))$ 
5 //Requires UnionFind-Datastructure!!!
6 pair<graph,int> buildMST(int N, graph& g) {
7     UnionFind uf(N);
8     graph mst; int mst_cost = 0; int M = g.size();
9     sort(g.begin(),g.end());
10    for(int i = 0; i < M; i++) {
11        int u = g[i].second.first, v = g[i].second.second;
12        if(uf.findSet(u) != uf.findSet(v)) {
13            mst.push_back(g[i]); mst_cost += g[i].first;
14            uf.unionSets(u,v);
15        }
16    }
17    return make_pair(mst,mst_cost);
18 }
```

### 2.2 Kürzeste Wege

#### 2.2.1 Algorithmus von DIJKSTRA

Kürzeste Pfade in Graphen ohne negative Kanten.

```

1 // Laufzeit:  $O((|E|+|V|) \cdot \log |V|)$ 
2 void dijkstra(int start) {
3     priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii> > pq;
4     vector<int> dist, parent;
5     dist.assign(NUM_VERTICES, INF);
6     parent.assign(NUM_VERTICES, -1);
7
8     dist[start] = 0;
9     pq.push(ii(0, start));
10
11    while (!pq.empty()) {
12        ii front = pq.top(); pq.pop();
13        int curNode = front.second, curDist = front.first;
14
15        if (curDist > dist[curNode]) continue;
16
17        for (int i = 0; i < (int)adjlist[curNode].size(); i++) {
18            int nextNode = adjlist[curNode][i].first, nextDist = curDist + adjlist[curNode][i].second;
19
20            if (nextDist < dist[nextNode]) {
21                dist[nextNode] = nextDist; parent[nextNode] = curNode;
22                pq.push(ii(nextDist, nextNode));
23            }
24        }
25    }
```

26 }

### 2.2.2 BELLMANN-FORD-Algorithmus

Kürzestes Pfade in Graphen mit negativen Kanten. Erkennt negative Zyklen.

```

1 // Laufzeit:  $O(|V|*|E|)$ 
2 struct edge {
3     int from; int to; int cost;
4     edge () {};
5     edge (int from, int to, int cost) : from(from), to(to), cost(cost) {};
6 };
7
8 vector<edge> edges; // Kanten einfügen!
9 vector<int> dist, parent;
10
11 void bellmannFord() {
12     dist.assign(NUM_VERTICES, INF); dist[0] = 0;
13     parent.assign(NUM_VERTICES, -1);
14     for (int i = 0; i < NUM_VERTICES - 1; i++) {
15         for (int j = 0; j < (int)edges.size(); j++) {
16             if (dist[edges[j].from] + edges[j].cost < dist[edges[j].to]) {
17                 dist[edges[j].to] = dist[edges[j].from] + edges[j].cost;
18                 parent[edges[j].to] = edges[j].from;
19             }
20         }
21     }
22
23     // "dist" und "parent" sind korrekte kürzeste Pfade.
24     // Folgende Zeilen prüfen nur negative Kreise.
25     for (int j = 0; j < (int)edges.size(); j++) {
26         if (dist[edges[j].from] + edges[j].cost < dist[edges[j].to]) {
27             // Negativer Kreis gefunden.
28         }
29     }
30 }

```

### 2.2.3 FLOYD-WARSHALL-Algorithmus

```

1 // Laufzeit:  $O(|V|^3)$ 
2 // Initialisiere mat: mat[i][i] = 0, mat[i][j] = INF falls i & j nicht adjazent, Länge sonst.
3 void floydWarshall() {
4     for (k = 0; k < MAX_V; k++) {
5         for (i = 0; i < MAX_V; i++) {
6             for (j = 0; j < MAX_V; j++) {
7                 if (mat[i][k] != INF && mat[k][j] != INF && mat[i][k] + mat[k][j] < mat[i][j]) {
8                     mat[i][j] = mat[i][k] + mat[k][j];
9                 }
10            }
11        }
12    }
13 }

```

- Evtl. überschreibt die Eingabe die Nullen auf der Hauptdiagonalen. Nur negative Werte sollten die Nullen überschreiben.
- Von parallelen Kanten sollte nur die günstigste gespeichert werden.
- Knoten  $i$  liegt genau dann auf einem negativen Kreis, wenn  $\text{dist}[i][i] < 0$  ist.
- Ein  $u$ - $v$ -Pfad existiert nicht, wenn  $\text{dist}[u][v] == \text{INF}$ .
- Gibt es einen Knoten  $c$ , sodass  $\text{dist}[u][c] != \text{INF} \ \&\& \ \text{dist}[c][v] != \text{INF} \ \&\& \ \text{dist}[c][c] < 0$ , wird der  $u$ - $v$ -Pfad beliebig kurz.

## 2.3 Strongly Connected Components (TARJANS-Algorithmus)

```

1 // Laufzeit:  $O(|V|+|E|)$ 
2 int counter, sccCounter;
3 vector<bool> visited, inStack;
4 vector< vector<int> > adjlist;
5 vector<int> d, low, sccs;
6 stack<int> s;
7
8 void visit(int v) {
9     visited[v] = true;
10    d[v] = counter; low[v] = counter; counter++;
11    inStack[v] = true; s.push(v);
12
13    for (int i = 0; i < (int)adjlist[v].size(); i++) {
14        int u = adjlist[v][i];
15        if (!visited[u]) {
16            visit(u);
17            low[v] = min(low[v], low[u]);
18        } else if (inStack[u]) {
19            low[v] = min(low[v], low[u]);
20        }
21    }
22
23    if (d[v] == low[v]) {
24        int u;
25        do {
26            u = s.top(); s.pop(); inStack[u] = false;
27            sccs[u] = sccCounter;
28        } while(u != v);
29        sccCounter++;
30    }
31 }
32
33 void scc() {
34     // Initialisiere adjlist!
35     visited.clear(); visited.assign(NUM_VERTICES, false);
36     d.clear(); d.resize(NUM_VERTICES);
37     low.clear(); low.resize(NUM_VERTICES);
38     inStack.clear(); inStack.assign(NUM_VERTICES, false);
39     sccs.clear(); sccs.resize(NUM_VERTICES);
40
41     counter = 0;
42     sccCounter = 0;
43     for (i = 0; i < NUM_VERTICES; i++) {
44         if (!visited[i]) {
45             visit(i);
46         }
47     }
48     // sccCounter ist Anzahl der starkem Zusammenhangskomponenten.
49     // sccs enthält den Index der SCC für jeden Knoten.
50 }

```

## 2.4 Artikulationspunkte und Brücken

```

1 vector< vector<int> > adjlist;
2 vector<int> low;
3 vector<int> d;
4 vector<bool> isArtPoint;
5 vector< vector<int> > bridges; //nur fuer Bruecken
6 int counter = 0;
7
8 void visit(int v, int parent) {
9     d[v] = low[v] = ++counter;
10    int numVisits = 0, maxlow = 0;
11
12    for (vector<int>::iterator vit = adjlist[v].begin(); vit != adjlist[v].end(); vit++) {
13        if (d[*vit] == 0) {
14            numVisits++;
15            visit(*vit, v);

```

```

16     if (low[*vit] > maxlow) {
17         maxlow = low[*vit];
18     }
19
20     if (low[*vit] > d[v]) { //nur fuer Bruecken, evtl. parent betrachten!
21         bridges[v].push_back(*vit);
22         bridges[*vit].push_back(v);
23     }
24
25     low[v] = min(low[v], low[*vit]);
26 } else {
27     if (d[*vit] < low[v]) {
28         low[v] = d[*vit];
29     }
30 }
31 }
32
33 if (parent == -1) {
34     if (numVisits > 1) isArtPoint[v] = true;
35 } else {
36     if (maxlow >= d[v]) isArtPoint[v] = true;
37 }
38 }
39
40 void findArticulationPoints() {
41     low.clear(); low.resize(adjlist.size());
42     d.clear(); d.assign(adjlist.size(), 0);
43     isArtPoint.clear(); isArtPoint.assign(adjlist.size(), false);
44     bridges.clear(); isBridge.resize(adjlist.size()); //nur fuer Bruecken
45     for (int v = 0; v < (int)adjlist.size(); v++) {
46         if (d[v] == 0) visit(v, -1);
47     }
48 }

```

## 2.5 Eulertouren

- Zyklus existiert, wenn jeder Knoten geraden Grad hat (ungerichtet), bzw. bei jedem Knoten Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen (gerichtet).
- Pfad existiert, wenn alle bis auf (maximal) zwei Knoten geraden Grad haben (ungerichtet), bzw. bei allen Knoten bis auf zwei Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen, wobei einer eine Ausgangskante mehr hat (Startknoten) und einer eine Eingangskante mehr hat (Endknoten).
- **Je nach Aufgabenstellung überprüfen, wie isolierte Punkte interpretiert werden sollen.**
- Der Code unten läuft in Linearzeit. Wenn das nicht notwendig ist (oder bestimmte Sortierungen verlangt werden), gehts mit einem set einfacher.

```

1 VISIT(v):
2     forall e=(v,w) in E
3         delete e from E
4     VISIT(w)
5     print e

```

Abbildung 1: Idee für Eulerzyklen

```

1 // Laufzeit: O(|V|+|E|)
2 vector< vector<int> > adjlist;
3 vector< vector<int> > otherIdx;
4 vector<int> cycle;
5 vector<int> validIdx;
6
7 void swapEdges(int n, int a, int b) { // Vertauscht Kanten mit Indizes a und b von Knoten n.
8     int neighA = adjlist[n][a];
9     int neighB = adjlist[n][b];
10    int idxNeighA = otherIdx[n][a];
11    int idxNeighB = otherIdx[n][b];
12    swap(adjlist[n][a], adjlist[n][b]);

```

```

13 swap(otherIdx[n][a], otherIdx[n][b]);
14 otherIdx[neighA][idxNeighA] = b;
15 otherIdx[neighB][idxNeighB] = a;
16 }
17
18 void removeEdge(int n, int i) { // Entfernt Kante i von Knoten n (und die zugehörige Rückwärtskante).
19     int other = adjlist[n][i];
20     if (other == n) { //Schlingen.
21         validIdx[n]++;
22         return;
23     }
24     int otherIndex = otherIdx[n][i];
25     validIdx[n]++;
26     if (otherIndex != validIdx[other]) {
27         swapEdges(other, otherIndex, validIdx[other]);
28     }
29     validIdx[other]++;
30 }
31
32 // Findet Eulerzyklus an Knoten n startend.
33 // Teste vorher, dass Graph zusammenhängend ist! Was ist mit isolierten Knoten?
34 // Teste vorher, ob Eulerzyklus überhaupt existiert!
35 void euler(int n) {
36     while (validIdx[n] < (int)adjlist[n].size()) {
37         int nn = adjlist[n][validIdx[n]];
38         removeEdge(n, validIdx[n]);
39         euler(nn);
40     }
41     cycle.push_back(n); // Zyklus am Ende in cycle (umgekehrte Reihenfolge).
42 }

```

**Achtung:**

- Die Ausgabe erfolgt in falscher Reihenfolge.
- Algorithmus schlägt nicht fehl, falls kein Eulerzyklus existiert. Die Existenz muss separat geprüft werden.

**2.6 Lowest Common Ancestor**

```

1 //RMQ muss hinzugefuegt werden!
2 vector<int> visited(2*MAX_N), first(MAX_N, 2*MAX_N), depth(2*MAX_N);
3 vector<vector<int>> graph(MAX_N);
4
5 //Runtime: O(n)
6 void initLCA(int gi, int d, int &c) {
7     visited[c] = gi, depth[c] = d, first[gi] = min(c, first[gi]), c++;
8     for(int gn : graph[gi]) {
9         initLCA(gn, d+1, c);
10         visited[c] = gi, depth[c] = d, c++;
11     }
12 }
13 //[[a, b]
14 //Runtime: O(1)
15 int getLCA(int a, int b) {
16     return visited[queryRMQ(min(first[a], first[b]), max(first[a], first[b]))];
17 }
18 //=> int c = 0; initLCA(0,0,c); initRMQ(); done! [rmq on depth]

```

**2.7 Max-Flow****2.7.1 Capacity Scaling**

Gut bei dünn besetzten Graphen.

```

1 // Ford Fulkerson mit Capacity Scaling.
2 // Laufzeit: O(|E|^2*log(C))
3 struct MaxFlow { // Muss mit new erstellt werden!
4     static const int MAX_N = 500; // #Knoten, kein Einfluss auf die Laufzeit.

```



```

5  struct edge { int dest, rev; ll capacity, flow; };
6  vector<edge> adjlist[MAX_N];
7  int visited[MAX_N] = {0}, target, dfsCounter = 0;
8  ll capacity;
9
10 bool dfs(int x) {
11     if (x == target) return 1;
12     if (visited[x] == dfsCounter) return 0;
13     visited[x] = dfsCounter;
14     for (edge &e : adjlist[x]) {
15         if (e.capacity >= capacity && dfs(e.dest)) {
16             e.capacity -= capacity; adjlist[e.dest][e.rev].capacity += capacity;
17             e.flow += capacity; adjlist[e.dest][e.rev].flow -= capacity;
18             return 1;
19         }
20     }
21     return 0;
22 }
23
24 void addEdge(int u, int v, ll c) {
25     adjlist[u].push_back(edge {v, (int)adjlist[v].size(), c, 0});
26     adjlist[v].push_back(edge {u, (int)adjlist[u].size() - 1, 0, 0});
27 }
28
29 ll maxFlow(int s, int t) {
30     capacity = 1L << 62;
31     target = t;
32     ll flow = 0L;
33     while (capacity) {
34         while (dfsCounter++, dfs(s)) {
35             flow += capacity;
36         }
37         capacity /= 2;
38     }
39     return flow;
40 }
41 };

```

### 2.7.2 Push Relabel

Gut bei sehr dicht besetzten Graphen.

```

1  // Laufzeit:  $O(V^3)$ 
2  struct PushRelabel {
3      ll capacities[MAX_V][MAX_V], flow[MAX_V][MAX_V], excess[MAX_V];
4      int height[MAX_V], list[MAX_V - 2], seen[MAX_V], n;
5
6      PushRelabel(int n) {
7          this->n = n;
8          memset(capacities, 0L, sizeof(capacities)); memset(flow, 0L, sizeof(flow));
9          memset(excess, 0L, sizeof(excess)); memset(height, 0, sizeof(height));
10         memset(list, 0, sizeof(list)); memset(seen, 0, sizeof(seen));
11     }
12
13     inline void addEdge(int u, int v, ll c) { capacities[u][v] += c; }
14
15     void push(int u, int v) {
16         ll send = min(excess[u], capacities[u][v] - flow[u][v]);
17         flow[u][v] += send; flow[v][u] -= send;
18         excess[u] -= send; excess[v] += send;
19     }
20
21     void relabel(int u) {
22         int minHeight = INT_MAX / 2;
23         for (int v = 0; v < n; v++) {
24             if (capacities[u][v] - flow[u][v] > 0) {
25                 minHeight = min(minHeight, height[v]);
26                 height[u] = minHeight + 1;
27             }
28         }
29     }
30 };

```

```

29 void discharge(int u) {
30     while (excess[u] > 0) {
31         if (seen[u] < n) {
32             int v = seen[u];
33             if (capacities[u][v] - flow[u][v] > 0 && height[u] > height[v]) push(u, v);
34             else seen[u]++;
35         } else {
36             relabel(u);
37             seen[u] = 0;
38         }
39     }
40
41 void moveToFront(int u) {
42     int temp = list[u];
43     for (int i = u; i > 0; i--)
44         list[i] = list[i - 1];
45     list[0] = temp;
46 }
47
48 ll maxFlow(int source, int target) {
49     for (int i = 0, p = 0; i < n; i++) if (i != source && i != target) list[p++] = i;
50
51     height[source] = n;
52     excess[source] = LLONG_MAX / 2;
53     for (int i = 0; i < n; i++) push(source, i);
54
55     int p = 0;
56     while (p < n - 2) {
57         int u = list[p], oldHeight = height[u];
58         discharge(u);
59         if (height[u] > oldHeight) {
60             moveToFront(p);
61             p = 0;
62         } else p++;
63     }
64
65     ll maxflow = 0L;
66     for (int i = 0; i < n; i++) maxflow += flow[source][i];
67     return maxflow;
68 }

```

### 2.7.3 Anwendungen

- **Maximum Edge Disjoint Paths**

Finde die maximale Anzahl Pfade von  $s$  nach  $t$ , die keine Kante teilen.

1. Setze  $s$  als Quelle,  $t$  als Senke und die Kapazität jeder Kante auf 1.
2. Der maximale Fluss entspricht der unterschiedlichen Pfade ohne gemeinsame Kanten.

- **Maximum Independent Paths**

Finde die maximale Anzahl Pfade von  $s$  nach  $t$ , die keinen Knoten teilen.

1. Setze  $s$  als Quelle,  $t$  als Senke und die Kapazität jeder Kante *und jedes Knotens* auf 1.
2. Der maximale Fluss entspricht der unterschiedlichen Pfade ohne gemeinsame Knoten.

- **Min-Cut**

Der maximale Fluss ist gleich dem minimalen Schnitt. Bei Quelle  $s$  und Senke  $t$ , partitioniere in  $S$  und  $T$ . Zu  $S$  gehören alle Knoten, die im Residualgraphen von  $s$  aus erreichbar sind (Rückwärtskanten beachten).

## 2.8 Min-Cost-Max-Flow

```

1 typedef long long ll;
2 static const ll flowlimit = 1LL << 60; // Should be bigger than the max flow.
3 struct MinCostFlow { // Should be initialized with new.
4     static const int maxn = 400; // Should be bigger than the #vertices.
5     static const int maxm = 5000; // #edges.
6     struct edge { int node; int next; ll flow; ll value; } edges[maxm << 1];
7     int graph[maxn], queue[maxn], pre[maxn], con[maxn], n, m, source, target, top;
8     bool inqueue[maxn];

```

```

9  ll maxflow, mincost, dis[maxn];
10
11  MinCostFlow() { memset(graph, -1, sizeof(graph)); top = 0; }
12
13  inline int inverse(int x) { return 1 + ((x >> 1) << 2) - x; }
14
15  // Directed edge from u to v, capacity c, weight w.
16  inline int addedge(int u, int v, int c, int w) {
17      edges[top].value = w; edges[top].flow = c; edges[top].node = v;
18      edges[top].next = graph[u]; graph[u] = top++;
19      edges[top].value = -w; edges[top].flow = 0; edges[top].node = u;
20      edges[top].next = graph[v]; graph[v] = top++;
21      return top - 2;
22  }
23
24  bool SPFA() {
25      int point, node, now, head = 0, tail = 1;
26      memset(pre, -1, sizeof(pre));
27      memset(inqueue, 0, sizeof(inqueue));
28      memset(dis, 0x7F, sizeof(dis));
29      dis[source] = 0; queue[0] = source;
30      pre[source] = source; inqueue[source] = true;
31
32      while (head != tail) {
33          now = queue[head++];
34          point = graph[now];
35          inqueue[now] = false;
36          head %= maxn;
37
38          while (point != -1) {
39              node = edges[point].node;
40              if (edges[point].flow > 0 && dis[node] > dis[now] + edges[point].value) {
41                  dis[node] = dis[now] + edges[point].value;
42                  pre[node] = now; con[node] = point;
43                  if (!inqueue[node]) {
44                      inqueue[node] = true; queue[tail++] = node;
45                      tail %= maxn;
46                  }
47              }
48              point = edges[point].next;
49          }
50      }
51      return pre[target] != -1;
52  }
53
54  void extend() {
55      ll w = flowlimit;
56      for (int u = target; pre[u] != u; u = pre[u]) {
57          w = min(w, edges[con[u]].flow);
58      }
59      maxflow += w;
60      mincost += dis[target] * w;
61      for (int u = target; pre[u] != u; u = pre[u]) {
62          edges[con[u]].flow -= w;
63          edges[inverse(con[u])].flow += w;
64      }
65  }
66
67  void mincostflow() {
68      maxflow = 0;
69      mincost = 0;
70      while (SPFA()) {
71          extend();
72      }
73  }
74  };

```

## 2.9 Maximal Cardinality Bipartite Matching

```

1 // Laufzeit:  $O(n*(|V|+|E|))$ 
2 vector< vector<int> > adjlist; // Gerichtete Kanten, von links nach rechts.
3 vector<int> pairs; // Zu jedem Knoten der gematchte Knoten rechts, oder -1.
4 vector<bool> visited;
5
6 bool dfs(int i) {
7     if (visited[i]) return false;
8     visited[i] = true;
9     for (vector<int>::iterator vit = adjlist[i].begin(); vit != adjlist[i].end(); vit++) {
10         if (pairs[*vit] < 0 || dfs(pairs[*vit])) {
11             pairs[*vit] = i; pairs[i] = *vit; return true;
12         }
13     }
14     return false;
15 }
16
17 // n = #Knoten links (0..n-1), m = #Knoten rechts
18 int kuhn(int n, int m) {
19     pairs.assign(n + m, -1);
20     int ans = 0;
21     for (int i = 0; i < n; i++) {
22         visited.assign(n + m, false);
23         ans += dfs(i);
24     }
25     return ans; // Größe des Matchings.
26 }

```

## 2.10 TSP

```

1 // Laufzeit:  $O(n^2 \cdot n)$ 
2 // nodes[0] ist Start- und Endknoten.
3 vector<vector<int>>> dist;
4 vector<int> TSP() {
5     int n = dist.size(), m = 1 << n;
6     vector<vector<ii>>> dp(n, vector<ii>(m, ii(MAX_N, -1)));
7
8     for(int c = 0; c < n; c++) dp[c][m-1].first = dist[c][0], dp[c][m-1].second = 0;
9
10    for(int v = m - 2; v >= 0; v--) {
11        for(int c = n - 1; c >= 0; c--) {
12            for(int g = 0; g < n; g++) {
13                if(g != c && (((1 << g) & v) == 0)) {
14                    if((dp[g][(v | (1 << g))].first + dist[c][g]) < dp[c][v].first) {
15                        dp[c][v].first = dp[g][(v | (1 << g))].first + dist[c][g];
16                        dp[c][v].second = g;
17                    }
18                }
19            }
20        }
21    }
22
23    vector<int> res; res.push_back(0); int v = 0;
24    while(res.back() != 0 || res.size() == 1) {
25        res.push_back(dp[res.back()][(v | (1 << res.back()))].second);
26    }
27
28    return res;
29 }

```

## 2.11 Bitonic TSP

```

1 // Laufzeit:  $O(|V|^2)$ 
2 vector< vector<double> > dp; // Initialisiere mit -1
3 vector< vector<double> > dist; // Initialisiere mit Entfernungen zwischen Punkten.
4 vector<int> lr, rl; // Links-nach-rechts und rechts-nach-links Pfade.
5 int n; // #Knoten

```

```

6
7 // get(0, 0) gibt die Länge der kürzesten bitonischen Route.
8 double get(int p1, int p2) {
9     int v = max(p1, p2) + 1;
10    if (v == n - 1) return dist[p1][v] + dist[v][p2];
11    if (dp[p1][p2] > -0.5) return dp[p1][p2];
12    double tryLR = dist[p1][v] + get(v, p2), tryRl = dist[v][p2] + get(p1, v);
13    if (tryLR < tryRl) lr.push_back(v); // Baut die Pfade auf. Fügt v zu rl hinzu, falls beide gleich teuer.
14    else rl.push_back(v); // Ändert das, falls nötig.
15    return min(tryLR, tryRl);
16 }

```

## 3 Geometrie

### 3.1 Closest Pair

```

1 double squaredDist(point a, point b) {
2     return (a.first-b.first) * (a.first-b.first) + (a.second-b.second) * (a.second-b.second);
3 }
4
5 bool compY(point a, point b) {
6     if (a.second == b.second) return a.first < b.first;
7     return a.second < b.second;
8 }
9
10 double shortestDist(vector<point> &points) {
11     //check that points.size() > 1 and that ALL POINTS ARE DIFFERENT
12     set<point, bool(*) (point, point)> status(compY);
13     sort(points.begin(), points.end());
14     double opt = 1e30, sqrtOpt = 1e15;
15     auto left = points.begin(), right = points.begin();
16     status.insert(*right); right++;
17
18     while (right != points.end()) {
19         if (fabs(left->first - right->first) >= sqrtOpt) {
20             status.erase(*(left++));
21         } else {
22             auto lower = status.lower_bound(point(-1e20, right->second - sqrtOpt));
23             auto upper = status.upper_bound(point(-1e20, right->second + sqrtOpt));
24             while (lower != upper) {
25                 double cand = squaredDist(*right, *lower);
26                 if (cand < opt) {
27                     opt = cand;
28                     sqrtOpt = sqrt(opt);
29                 }
30                 ++lower;
31             }
32             status.insert(*(right++));
33         }
34     }
35     return sqrtOpt;
36 }

```

### 3.2 Geraden

```

1 struct pt { //complex<double> does not work here, because we need to set pt.x and pt.y
2     double x, y;
3     pt() {}
4     pt(double x, double y) : x(x), y(y) {}
5 };
6
7 struct line {
8     double a, b, c; //a*x+b*y+c, b=0 <=> vertical line, b=1 <=> otherwise
9 };
10

```

```

11 line pointsToLine(pt p1, pt p2) {
12     line l;
13     if (fabs(p1.x - p2.x) < EPSILON) {
14         l.a = 1; l.b = 0.0; l.c = -p1.x;
15     } else {
16         l.a = -(double)(p1.y - p2.y) / (p1.x - p2.x);
17         l.b = 1.0;
18         l.c = -(double)(l.a * p1.x) - p1.y;
19     }
20     return l;
21 }
22
23 bool areParallel(line l1, line l2) {
24     return (fabs(l1.a - l2.a) < EPSILON) && (fabs(l1.b - l2.b) < EPSILON);
25 }
26
27 bool areSame(line l1, line l2) {
28     return areParallel(l1, l2) && (fabs(l1.c - l2.c) < EPSILON);
29 }
30
31 bool areIntersect(line l1, line l2, pt &p) {
32     if (areParallel(l1, l2)) return false;
33     p.x = (l2.b * l1.c - l1.b * l2.c) / (l2.a * l1.b - l1.a * l2.b);
34     if (fabs(l1.b) > EPSILON) p.y = -(l1.a * p.x + l1.c);
35     else p.y = -(l2.a * p.x + l2.c);
36     return true;
37 }

```

### 3.3 Konvexe Hülle

```

1 struct point {
2     double x, y;
3     point(){} point(double x, double y) : x(x), y(y) {}
4     bool operator <(const point &p) const {
5         return x < p.x || (x == p.x && y < p.y);
6     }
7 };
8
9 // 2D cross product.
10 // Return a positive value, if OAB makes a counter-clockwise turn,
11 // negative for clockwise turn, and zero if the points are collinear.
12 double cross(const point &O, const point &A, const point &B){
13     double d = (A.x - O.x) * (B.y - O.y) - (A.y - O.y) * (B.x - O.x);
14     if (fabs(d) < 1e-9) return 0.0;
15     return d;
16 }
17
18 // Returns a list of points on the convex hull in counter-clockwise order.
19 // Colinear points are not in the convex hull, if you want colinear points in the hull remove "=" in the CCW-
    Test
20 // Note: the last point in the returned list is the same as the first one.
21 vector<point> convexHull(vector<point> P){
22     int n = P.size(), k = 0;
23     vector<point> H(2*n);
24
25     // Sort points lexicographically
26     sort(P.begin(), P.end());
27
28     // Build lower hull
29     for (int i = 0; i < n; i++) {
30         while (k >= 2 && cross(H[k-2], H[k-1], P[i]) <= 0.0) k--;
31         H[k++] = P[i];
32     }
33
34     // Build upper hull
35     for (int i = n-2, t = k+1; i >= 0; i--) {
36         while (k >= t && cross(H[k-2], H[k-1], P[i]) <= 0.0) k--;
37         H[k++] = P[i];
38     }

```

```

39
40 H.resize(k);
41 return H;
42 }

```

### 3.4 Formeln - std::complex

```

1 //komplexe Zahlen als Darstellung fuer Punkte
2 typedef pt complex<double>;
3 //Winkel zwischen Punkt und x-Achse in [0, 2 * PI), Winkel zwischen a und b
4 double angle = arg (a), angle_a_b = arg (a - b);
5 //Punkt rotiert um Winkel theta
6 pt a_rotated = a * exp (pt (0, theta));
7 //Mittelpunkt des Dreiecks abc
8 pt centroid = (a + b + c) / 3;
9 //Skalarprodukt
10 double dot(pt a, pt b) {
11     return real(conj(a) * b);
12 }
13 //Kreuzprodukt, 0, falls kollinear
14 double cross(pt a, pt b) {
15     return imag(conj(a) * b);
16 }
17 //wenn Eckpunkte bekannt
18 double areaOfTriangle(pt a, pt b, pt c) {
19     return abs(cross(b - a, c - a)) / 2.0;
20 }
21 //wenn Seitenlaengen bekannt
22 double areaOfTriangle(double a, double b, double c) {
23     double s = (a + b + c) / 2;
24     return sqrt(s * (s-a) * (s-b) * (s-c));
25 }
26 // Sind die Dreiecke a1, b1, c1, and a2, b2, c2 aehnlich?
27 // Erste Zeile testet Aehnlichkeit mit gleicher Orientierung,
28 // zweite Zeile testet Aehnlichkeit mit unterschiedlicher Orientierung
29 bool similar (pt a1, pt b1, pt c1, pt a2, pt b2, pt c2) {
30     return (
31         (b2 - a2) * (c1 - a1) == (b1 - a1) * (c2 - a2) ||
32         (b2 - a2) * (conj (c1) - conj (a1)) == (conj (b1) - conj (a1)) * (c2 - a2)
33     );
34 }
35 //Linksknick von a->b nach a->c
36 double ccw(pt a, pt b, pt c) {
37     return cross(b - a, c - a); //<0 => falls Rechtsknick, 0 => kollinear, >0 => Linksknick
38 }
39 //Streckenschnitt, Strecken a-b und c-d
40 bool lineSegmentIntersection(pt a, pt b, pt c, pt d) {
41     if (ccw(a, b, c) == 0 && ccw(a, b, d) == 0) { //kollinear
42         double dist = abs(a - b);
43         return (abs(a - c) <= dist && abs(b - c) <= dist) || (abs(a - d) <= dist && abs(b - d) <= dist);
44     }
45     return ccw(a, b, c) * ccw(a, b, d) <= 0 && ccw(c, d, a) * ccw(c, d, b) <= 0;
46 }
47 //Entfernung von p zu a-b
48 double distToLine(pt a, pt b, pt p) {
49     return abs(cross(p - a, b - a)) / abs(b - a);
50 }
51 //liegt p auf a-b
52 bool pointOnLine(pt a, pt b, pt p) {
53     return abs(distToLine(a, b, p)) < EPSILON;
54 }
55 //testet, ob d in der gleichen Ebene liegt wie a, b, und c
56 bool isCoplanar(pt a, pt b, pt c, pt d) {
57     return (b - a) * (c - a) * (d - a) == 0;
58 }
59 //berechnet den Flaecheninhalt eines Polygons (nicht selbstschneidend)
60 double areaOfPolygon(vector<pt> &polygon) { //jeder Eckpunkt nur einmal im Vektor
61     double res = 0; int n = polygon.size();
62     for (int i = 0; i < (int)polygon.size(); i++)

```

```

63     res += real(polygon[i]) * imag(polygon[(i + 1) % n]) - real(polygon[(i + 1) % n]) * imag(polygon[i]);
64     return 0.5 * abs(res);
65 }
66 //testet, ob sich zwei Rechtecke (p1, p2) und (p3, p4) schneiden (jeweils gegenueberliegende Ecken)
67 bool rectIntersection(pt p1, pt p2, pt p3, pt p4) {
68     double minx12 = min(real(p1), real(p2)), maxx12 = max(real(p1), real(p2));
69     double minx34 = min(real(p3), real(p4)), maxx34 = max(real(p3), real(p4));
70     double miny12 = min(imag(p1), imag(p2)), maxy12 = max(imag(p1), imag(p2));
71     double miny34 = min(imag(p3), imag(p4)), maxy34 = max(imag(p3), imag(p4));
72     return (maxx12 >= minx34) && (maxx34 >= minx12) && (maxy12 >= miny34) && (maxy34 >= miny12);
73 }
74 //testet, ob ein Punkt im Polygon liegt (beliebige Polygone)
75 bool pointInPolygon(pt p, vector<pt> &polygon) { //jeder Eckpunkt nur einmal im Vektor
76     pt rayEnd = p + pt(1, 1000000);
77     int counter = 0, n = polygon.size();
78     for (int i = 0; i < n; i++) {
79         pt start = polygon[i], end = polygon[(i + 1) % n];
80         if (lineSegmentIntersection(p, rayEnd, start, end)) counter++;
81     }
82     return counter & 1;
83 }

```

## 4 Mathe

### 4.1 ggT, kgV, erweiterter euklidischer Algorithmus

```

1 ll gcd(ll a, ll b) {
2     return b == 0 ? a : gcd(b, a % b);
3 }
4
5 ll lcm(ll a, ll b) {
6     return a * (b / gcd(a, b)); //Klammern gegen Overflow
7 }
8
9 //Accepted in Aufgabe mit Forderung: |X|+|Y| minimal (primaer) und X<=Y (sekundaer)
10 //hab aber keinen Beweis dafuer :)
11 ll x, y, d; //a * x + b * y = d = ggT(a,b)
12 void extendedEuclid(ll a, ll b) {
13     if (!b) {
14         x = 1; y = 0; d = a; return;
15     }
16     extendedEuclid(b, a % b);
17     ll x1 = y; ll y1 = x - (a / b) * y;
18     x = x1; y = y1;
19 }

```

#### 4.1.1 Multiplikatives Inverses von $x$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sei  $0 \leq x < n$ . Definiere  $d := \gcd(x, n)$ .

Falls  $d = 1$ :

- Erweiterter euklidischer Algorithmus liefert  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $\alpha x + \beta n = 1$
- Nach Kongruenz gilt  $\alpha x + \beta n \equiv \alpha x \equiv 1 \pmod{n}$
- $x^{-1} := \alpha \pmod{n}$

Falls  $d \neq 1$ : es existiert kein  $x^{-1}$

```

1 ll multInv(ll n, ll p) { //berechnet das multiplikative Inverse von n in F_p
2     extendedEuclid(n, p); //implementierung von oben
3     x += ((x / p) + 1) * p;
4     return x % p;
5 }

```



## 4.2 Primzahlsieb von Eratosthenes

```

1 vector<int> primes;
2 void primeSieve(ll n) { //berechnet die Primzahlen kleiner n
3     vector<int> isPrime(n, true);
4     for(ll i = 2; i < n; i+=2) {
5         if(isPrime[i]) {
6             primes.push_back(i);
7             if(i*i <= n) {
8                 for(ll j = i; i*j < n; j+=2) isPrime[i*j] = false;
9             }
10        }
11        if(i == 2) i++;
12    }
13 }

```

### 4.2.1 Faktorisierung

```

1 const ll PRIME_SIZE = 100000000;
2 vector<int> primes; //call primeSieve(PRIME_SIZE); before
3
4 //Factorize the number n
5 vector<int> factorize(ll n) {
6     vector<int> factor;
7     ll num = n;
8     int pos = 0;
9     while(num != 1) {
10        if(num % primes[pos] == 0) {
11            num /= primes[pos];
12            factor.push_back(primes[pos]);
13        }
14        else pos++;
15        if(primes[pos]*primes[pos] > num) break;
16    }
17    if(num != 1) factor.push_back(num);
18    return factor;
19 }

```

### 4.2.2 Mod-Exponent über $\mathbb{F}_p$

```

1 //0<=a,b<=n and n<=MAX(ll)/2
2 ll mult_mod(ll a, ll b, ll n) {
3     if(a == 0 || b == 0) return 0;
4     if(b == 1) return a % n;
5
6     if(b % 2 == 1) return (a + mult_mod(a, b-1, n)) % n;
7     else return mult_mod((a + a) % n, b / 2, n);
8 }
9
10 //0<=a,b<=n and n<=MAX(ll)/2
11 ll pow_mod(ll a, ll b, ll n) {
12     if(b == 0) return 1;
13     if(b == 1) return a % n;
14
15     if(b % 2 == 1) return mult_mod(pow_mod(a, b-1, n), a, n);
16     else return pow_mod(mult_mod(a, a, n), b / 2, n);
17 }

```

## 4.3 LGS über $\mathbb{F}_p$

```

1 void normalLine(ll n, ll line, ll p) { //normalisiert Zeile line
2     ll factor = multInv(mat[line][line], p); //Implementierung von oben
3     for (ll i = 0; i <= n; i++) {
4         mat[line][i] *= factor;

```

```

5     mat[line][i] %= p;
6 }
7 }
8
9 void takeAll(ll n, ll line, ll p) { //zieht Vielfaches von line von allen anderen Zeilen ab
10    for (ll i = 0; i < n; i++) {
11        if (i == line) continue;
12        ll diff = mat[i][line]; //abziehen
13        for (ll j = 0; j <= n; j++) {
14            mat[i][j] -= (diff * mat[line][j]) % p;
15            while (mat[i][j] < 0) {
16                mat[i][j] += p;
17            }
18        }
19    }
20 }
21
22 void gauss(ll n, ll p) { //n x n+1-Matrix, Koerper F_p
23    for (ll line = 0; line < n; line++) {
24        normalLine(n, line, p);
25        takeAll(n, line, p);
26    }
27 }

```

#### 4.4 Binomialkoeffizienten

```

1 ll calc_binom(ll N, ll K) {
2     ll r = 1, d;
3     if (K > N) return 0;
4     for (d = 1; d <= K; d++) {
5         r *= N--;
6         r /= d;
7     }
8     return r;
9 }

```

#### 4.5 Satz von SPRAGUE-GRUNDY

Weise jedem Zustand  $X$  wie folgt eine GRUNDY-Zahl  $g(X)$  zu:

$$g(X) := \min\{\mathbb{Z}_0^+ \setminus \{g(Y) \mid Y \text{ von } X \text{ aus direkt erreichbar}\}\}$$

$X$  ist genau dann gewonnen, wenn  $g(X) > 0$  ist.

Wenn man  $k$  Spiele in den Zuständen  $X_1, \dots, X_k$  hat, dann ist die GRUNDY-Zahl des Gesamtzustandes  $g(X_1) \oplus \dots \oplus g(X_k)$ .

```

1 #Most important function!!!!11elf
2 bool WinNimm(vector<int> game) {
3     int result = 0;
4     for(int s: game) result ^= s;
5     return s > 0;
6 }

```

#### 4.6 Maximales Teilfeld

```

1 //N := length of field
2 int maxStart = 1, maxLen = 0, curStart = 1, len = 0;
3 double maxValue = 0, sum = 0;
4 for (int pos = 0; pos < N; pos++) {
5     sum += values[pos];
6     len++;
7     if (sum > maxValue) { // neues Maximum
8         maxValue = sum; maxStart = curStart; maxLen = len;
9     }

```

```

10  if (sum < 0) { // alles zuruecksetzen
11      curStart = pos +2; len = 0; sum = 0;
12  }
13  }
14  //maxSum := maximaler Wert, maxStart := Startposition, maxLen := Laenge der Sequenz

```

Obiger Code findet kein maximales Teilfeld, das über das Ende hinausgeht. Dazu:

1. finde maximales Teilfeld, das nicht übers Ende geht
2. berechne minimales Teilfeld, das nicht über den Rand geht (analog)
3. nimm Maximum aus gefundenem Maximalem und Allem\Minimalem

## 4.7 Kombinatorik

### 4.7.1 Berühmte Zahlen

FIBONACCI-Zahlen	$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \quad f(n+2) = f(n+1) + f(n)$	Bem. 1, 2
CATALAN-Zahlen	$C_0 = 1 \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{2(2n-1)}{n+1} \cdot C_{n-1}$	Bem. 3, 4
EULER-Zahlen (I)	$\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\rangle = 1 \quad \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = (k+1) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle + (n-k) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle$	Bem. 5
EULER-Zahlen (II)	$\left\langle\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle = 1 \quad \left\langle\left\langle \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\rangle\right\rangle = 0 \quad \left\langle\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle\right\rangle = (k+1) \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle\right\rangle + (2n-k-1) \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle$	Bem. 6
STIRLING-Zahlen (I)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$	Bem. 7
STIRLING-Zahlen (II)	$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1 \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$	Bem. 8
Integer-Partitions	$f(1,1) = 1 \quad f(n,k) = 0 \text{ für } k > n \quad f(n,k) = f(n-k,k) + f(n,k-1)$	Bem. 9

**Bemerkung 1**  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$

**Bemerkung 2 (ZECKENDORFS Theorem)** Jede positive natürliche Zahl kann eindeutig als Summe einer oder mehrerer verschiedener FIBONACCI-Zahlen geschrieben werden, sodass keine zwei aufeinanderfolgenden FIBONACCI-Zahlen in der Summe vorkommen.

Lösung: Greedy, nimm immer die größte FIBONACCI-Zahl, die noch hineinpasst.

- Bemerkung 3**
- Die erste und dritte angegebene Formel sind relativ sicher gegen Overflows.
  - Die erste Formel kann auch zur Berechnung der CATALAN-Zahlen bezüglich eines Moduls genutzt werden.

**Bemerkung 4** Die CATALAN-Zahlen geben an:  $C_n =$

- Anzahl der Binärbäume mit  $n$  Knoten
- Anzahl der validen Klammerausdrücke mit  $n$  Klammerpaaren
- Anzahl der korrekten Klammerungen von  $n+1$  Faktoren
- Anzahl der Möglichkeiten ein konvexes Polygon mit  $n+2$  Ecken in Dreiecke zu zerlegen.
- Anzahl der monotonen Pfade in einem  $n \times n$ -Gitter, die nicht die Diagonale kreuzen. (zwischen gegenüberliegenden Ecken)

**Bemerkung 5 (EULER-Zahlen 1. Ordnung)** Die Anzahl der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  mit genau  $k$  Anstiegen.

Begründung: Für die  $n$ -te Zahl gibt es  $n$  mögliche Positionen zum Einfügen. Dabei wird entweder ein Anstieg in zwei gesplitted oder ein Anstieg um  $n$  ergänzt.

**Bemerkung 6 (EULER-Zahlen 2. Ordnung)** Die Anzahl der Permutationen von  $\{1, 1, \dots, n, n\}$  mit genau  $k$  Anstiegen.

**Bemerkung 7 (STIRLING-Zahlen 1. Ordnung)** Die Anzahl der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  mit genau  $k$  Zyklen.

Begründung: Es gibt zwei Möglichkeiten für die  $n$ -te Zahl. Entweder sie bildet einen eigenen Zyklus, oder sie kann an jeder Position in jedem Zyklus einsortiert werden.

**Bemerkung 8 (STIRLING-Zahlen 2. Ordnung)** Die Anzahl der Möglichkeiten  $n$  Elemente in  $k$  nichtleere Teilmengen zu zerlegen.

Begründung: Es gibt  $k$  Möglichkeiten die  $n$  in eine  $n-1$ -Partition einzuordnen. Dazu kommt der Fall, dass die  $n$  in ihrer eigenen Teilmenge (alleine) steht.

**Bemerkung 9** Anzahl der Teilmengen von  $\mathbb{N}$ , die sich zu  $n$  aufaddieren mit maximalem Element  $\leq k$ .

### 4.7.2 Verschiedenes

Hanoi Towers (min steps)	$T_n = 2^n - 1$
#regions by $n$ lines	$n(n+1)/2 + 1$
#bounded regions by $n$ lines	$(n^2 - 3n + 2)/2$
#labeled rooted trees	$n^{n-1}$
#labeled unrooted trees	$n^{n-2}$

## 5 Strings

### 5.1 KNUTH-MORRIS-PRATT-Algorithmus

```

1 //Preprocessing Substring sub for KMP-Search
2 vector<int> kmp_preprocessing(string& sub) {
3     vector<int> b(sub.size() + 1);
4     b[0] = -1;
5     int i = 0, j = -1;
6     while(i < sub.size()) {
7         while(j >= 0 && sub[i] != sub[j])
8             j = b[j];
9         i++; j++;
10        b[i] = j;
11    }
12    return b;
13 }
14
15 //Searching after Substring sub in s
16 vector<int> kmp_search(string& s, string& sub) {
17     vector<int> pre = kmp_preprocessing(sub);
18     vector<int> result;
19     int i = 0, j = -1;
20     while(i < s.size()) {
21         while(j >= 0 && s[i] != sub[j])
22             j = pre[j];
23         i++; j++;
24         if(j == sub.size()) {
25             result.push_back(i-j);
26             j = pre[j];
27         }
28     }
29     return result;
30 }

```

### 5.2 LEVENSHTTEIN-Distanz

```

1 int levenshtein(string& s1, string& s2) {
2     int len1 = s1.size(), len2 = s2.size();
3     vector<int> col(len2 + 1), prevCol(len2 + 1);
4     for (int i = 0; i < len2 + 1; i++) prevCol[i] = i;
5     for (int i = 0; i < len1; i++) {
6         col[0] = i + 1;
7         for (int j = 0; j < len2; j++)
8             col[j+1] = min(min(prevCol[j+1] + 1, col[j] + 1), prevCol[j] + (s1[i]==s2[j] ? 0 : 1));
9         col.swap(prevCol);
10    }
11    return prevCol[len2];
12 }

```

### 5.3 Trie

```

1 //nur fuer Kleinbuchstaben!
2 struct node {
3     node *(e)[26];

```

```

4   int c = 0; //anzahl der woerter die an dem node enden.
5   node() { for(int i = 0; i < 26; i++) e[i] = NULL; }
6 };
7
8 void insert(node *root, string *txt, int s) {
9     if(s >= txt->length()) root->c++;
10    else {
11        int idx = (int)((*txt).at(s) - 'a');
12        if(root->e[idx] == NULL) {
13            root->e[idx] = new node();
14        }
15        insert(root->e[idx], txt, s+1);
16    }
17 }
18
19 int contains(node *root, string *txt, int s) {
20     if(s >= txt->length()) return root->c;
21     int idx = (int)((*txt).at(s) - 'a');
22     if(root->e[idx] != NULL) {
23         return contains(root->e[idx], txt, s+1);
24     } else return 0;
25 }

```

## 5.4 Suffix-Array

```

1 //longest common substring in one string (overlapping not excluded)
2 //contains suffix array:-----
3 int cmp(string &s, vector<vector<int>> &v, int i, int vi, int u, int l) {
4     int vi2 = (vi + 1) % 2, u2 = u + i / 2, l2 = l + i / 2;
5     if(i == 1) return s[u] - s[l];
6     else if (v[vi2][u] != v[vi2][l]) return (v[vi2][u] - v[vi2][l]);
7     else { //beide groesser trifft nicht mehr ein, da ansonsten vorher schon unterschied in Laenge
8         if(u2 >= s.length()) return -1;
9         else if(l2 >= s.length()) return 1;
10        else return v[vi2][u2] - v[vi2][l2];
11    }
12 }
13
14 string lcsb(string s) {
15     if(s.length() == 0) return "";
16     vector<int> a(s.length());
17     vector<vector<int>> v(2, vector<int>(s.length(), 0));
18     int vi = 0;
19     for(int k = 0; k < a.size(); k++) a[k] = k;
20     for(int i = 1; i <= s.length(); i *= 2, vi = (vi + 1) % 2) {
21         sort(a.begin(), a.end(), [&] (const int &u, const int &l) {
22             return cmp(s, v, i, vi, u, l) < 0;
23         });
24         v[vi][a[0]] = 0;
25         for(int z = 1; z < a.size(); z++) v[vi][a[z]] = v[vi][a[z-1]] + (cmp(s, v, i, vi, a[z], a[z-1]) == 0 ? 0 :
26             1);
27     }
28 //-----
29 int r = 0, m=0, c=0;
30 for(int i = 0; i < a.size() - 1; i++) {
31     c = 0;
32     while(a[i]+c < s.length() && a[i+1]+c < s.length() && s[a[i]+c] == s[a[i+1]+c]) c++;
33     if(c > m) r=i, m=c;
34 }
35 return m == 0 ? "" : s.substr(a[r], m);
36 }

```

## 5.5 Longest Common Substring

```

1 //longest common substring.
2 struct lcse {

```

```

3   int i = 0, s = 0;
4   };
5   string lcp(string s[2]) {
6       if(s[0].length() == 0 || s[1].length() == 0) return "";
7       vector<lcse> a(s[0].length()+s[1].length());
8       for(int k = 0; k < a.size(); k++) a[k].i=(k < s[0].length() ? k : k - s[0].length()), a[k].s = (k < s[0].
          length() ? 0 : 1);
9       sort(a.begin(), a.end(), [&] (const lcse &u, const lcse &l) {
10          int ui = u.i, li = l.i;
11          while(ui < s[u.s].length() && li < s[l.s].length()) {
12              if(s[u.s][ui] < s[l.s][li]) return true;
13              else if(s[u.s][ui] > s[l.s][li]) return false;
14              ui++; li++;
15          }
16          return !(ui < s[u.s].length());
17      });
18      int r = 0, m=0, c=0;
19      for(int i = 0; i < a.size() - 1; i++) {
20          if(a[i].s == a[i+1].s) continue;
21          c = 0;
22          while(a[i].i+c < s[a[i].s].length() && a[i+1].i+c < s[a[i+1].s].length() && s[a[i].s][a[i].i+c] == s[a[i
              +1].s][a[i+1].i+c]) c++;
23          if(c > m) r=i, m=c;
24      }
25      return m == 0 ? "" : s[a[r].s].substr(a[r].i, m);
26  }

```

## 5.6 Longest Common Subsequence

```

1   string lcscs(string &a, string &b) {
2       int m[a.length() + 1][b.length() + 1], x=0, y=0;
3       memset(m, 0, sizeof(m));
4       for(int y = a.length() - 1; y >= 0; y--) {
5           for(int x = b.length() - 1; x >= 0; x--) {
6               if(a[y] == b[x]) m[y][x] = 1 + m[y+1][x+1];
7               else m[y][x] = max(m[y+1][x], m[y][x+1]);
8           }
9       } //for length only: return m[0][0];
10      string res;
11      while(x < b.length() && y < a.length()) {
12          if(a[y] == b[x]) res += a[y++], x++;
13          else if(m[y][x+1] > m[y+1][x+1]) x++;
14          else y++;
15      }
16      return res;
17  }

```

## 6 Java

### 6.1 Introduction

- Compilen: `javac main.java`
- Ausführen: `java main < sample.in`
- Eingabe:

```

1   Scanner in = new Scanner(System.in); //java.util.Scanner
2   String line = in.nextLine(); //reads the next line of the input
3   int num = in.nextInt(); //reads the next token of the input as an int
4   double num2 = in.nextDouble(); //reads the next token of the input as a double

```

- Ausgabe:

```

1   //Ausgabe in StringBuilder schreiben und am Ende alles auf einmal ausgeben -> viel schneller
2   StringBuilder sb = new StringBuilder(); //java.lang.StringBuilder
3   sb.append("Hallo Welt");
4   System.out.print(sb.toString());

```

## 6.2 BigInteger

Hier ein kleiner Überblick über die Methoden der Klasse BigInteger:

```

1 //Returns this +,*,/,- val
2 BigInteger add(BigInteger val), multiply(BigInteger val), divide(BigInteger val), subtract(BigInteger val)
3
4 //Returns this^e
5 BigInteger pow(BigInteger e)
6
7 //Bit-Operations
8 BigInteger and(BigInteger val), or(BigInteger val), xor(BigInteger val), not(), shiftLeft(int n), shiftRight(
   int n)
9
10 //Returns the greatest common divisor of abs(this) and abs(val)
11 BigInteger gcd(BigInteger val)
12
13 //Returns this mod m, this^-1 mod m, this^e mod m
14 BigInteger mod(BigInteger m), modInverse(BigInteger m), modPow(BigInteger e, BigInteger m)
15
16 //Returns the next number that is greater than this and that is probably a prime.
17 BigInteger nextProbablePrime()
18
19 //Converting BigInteger. Attention: If the BigInteger is too big the lowest bits were chosen which fits into
   the converted data-type.
20 int intValue(), long longValue(), float floatValue(), double doubleValue()

```

## 7 Sonstiges

### 7.1 2-SAT

1. Bedingungen in 2-CNF formulieren.
2. Implikationsgraph bauen,  $(a \vee b)$  wird zu  $\neg a \Rightarrow b$  und  $\neg b \Rightarrow a$ .
3. Finde die starken Zusammenhangskomponenten.
4. Genau dann lösbar, wenn keine Variable mit ihrer Negation in einer SCC liegt.

### 7.2 Sortieren in Linearzeit

Wenn die Eingabe aus einem kleinen Intervall  $[0, n)$  stammt ist Bucketsort schneller.

#### 7.2.1 Bucketsort

```

1 vector<int> res;
2 void bucketSort(vector<int> &a) { //stores result in global vector res
3     int c[BUCKETS] = {0};
4     for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) c[a[i]]++;
5     int C = 0;
6     for (int i = 0; i < BUCKETS; i++) {
7         int tmp = C;
8         C += c[i];
9         c[i] = tmp;
10    }
11    res.resize(a.size());
12    for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) {
13        res[c[a[i]]] = a[i];
14        c[a[i]]++;
15    }
16 }

```

#### 7.2.2 LSD-Radixsort

```

1 //Comparable with sort from <algorithms> in a range from 0 to 5000, for values greater than 5000 use sort
2 const int p[10] = {1,10,100,1000,10000,100000,1000000,10000000,100000000,1000000000};
3
4 int getLongestNumber(vector<int> &a) {
5     int res = 0;
6     for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) res = max(res, (int)ceil(log10(a[i]) + 1));
7     return res;
8 }
9
10 int getIthDigit(int digit, int i) {
11     return (digit / p[i]) % 10;
12 }
13
14 void radixSort(vector<int> &a) {
15     int digits = getLongestNumber(a);
16     for (int d = 0; d < digits; d++) {
17         vector<int> bucket[10];
18         for(int i = 0; i < (int)a.size(); i++)
19             bucket[getIthDigit(a[i],d)].push_back(a[i]);
20         a.clear();
21         for(int i = 0; i < 10; i++)
22             copy(bucket[i].begin(), bucket[i].end(), back_inserter(a));
23     }
24 }

```

### 7.3 Bit Operations

```

1 //lsb: 0-th bit, msb: n-th bit
2 //get j-th bit
3 (a & (1 << j)) != 0
4 //set j-th bit
5 a |= (1 << j)
6 //clear j-th bit
7 a &= ~(1 << j)
8 //toggle j-th bit
9 a ^= (1 << j)
10 //get value of least significant bit set
11 (a & -a)
12 //turn on all bits
13 a = -1
14 //turn on first n bits (be aware of overflows)
15 a = (1 << n) - 1

```

### 7.4 Josephus-Problem

$n$  Personen im Kreis, jeder  $k$ -te wird erschossen.

**Spezialfall  $k = 2$ :** Betrachte Binärdarstellung von  $n$ . Für  $n = 1b_1b_2b_3..b_n$  ist  $b_1b_2b_3..b_n1$  die Position des letzten Überlebenden. (Rotiere  $n$  um eine Stelle nach links)

```

1 int rotateLeft(int n) { //returns the number of the last survivor (1 based)
2     for (int i = 31; i >= 0; i--)
3         if (n & (1 << i)) {
4             n &= ~(1 << i);
5             break;
6         }
7     n <<= 1; n++; return n;
8 }

```

**Allgemein:** Sei  $F(n, k)$  die Position des letzten Überlebenden. Nummeriere die Personen mit  $0, 1, \dots, n-1$ . Nach Erschießen der  $k$ -ten Person, hat der Kreis noch Größe  $n - 1$  und die Position des Überlebenden ist jetzt  $F(n - 1, k)$ . Also:  $F(n, k) = (F(n - 1, k) + k) \% n$ . Basisfall:  $F(1, k) = 0$ .

```

1 int josephus(int n, int k) { //returns the number of the last survivor (0 based)
2     if (n == 1) return 0;
3     return (josephus(n - 1, k) + k) % n;
4 }

```



Beachte bei der Ausgabe, dass die Personen im ersten Fall von  $1, \dots, n$  nummeriert sind, im zweiten Fall von  $0, \dots, n-1$ !

## 7.5 Gemischtes

- JOHNSONS *Reweighting Algorithmus*: Füge neue Quelle  $s$  hinzu, mit Kanten mit Gewicht 0 zu allen Knoten. Nutze BELLMANN-FORD zum Bestimmen der Entfernungen  $d[i]$  von  $s$  zu allen anderen Knoten. Stoppe, wenn es negative Zyklen gibt. Sonst ändere die Gewichte von allen Kanten  $(u, v)$  im ursprünglichen Graphen zu  $d[u] + w[u, v] - d[v]$ . Dann sind alle Kantengewichte nichtnegativ, DIJKSTRA kann angewendet werden.
- Für ein System von Differenzbeschränkungen: Ändere alle Bedingungen in die Form  $a - b \leq c$ . Für jede Bedingung füge eine Kante  $(b, a)$  mit Gewicht  $c$  ein. Füge Quelle  $s$  hinzu, mit Kanten zu allen Knoten mit Gewicht 0. Nutze BELLMANN-FORD, um die kürzesten Pfade von  $s$  aus zu finden.  $d[v]$  ist mögliche Lösung für  $v$ .
- Min-Weight-Vertex-Cover im bipartiten Graph: Partitioniere in  $A$ ,  $B$  und füge Kanten  $s \rightarrow A$  mit Gewicht  $w(A)$  und Kanten  $B \rightarrow t$  mit Gewicht  $w(B)$  hinzu. Füge Kanten mit Kapazität  $\infty$  von  $A$  nach  $B$  hinzu, wo im originalen Graphen Kanten waren. Max-Flow ist die Lösung.  
Im Residualgraphen:
  - Das Vertex-Cover sind die Knoten inzident zu den Brücken. *oder*
  - Die Knoten in  $A$ , die *nicht* von  $s$  erreichbar sind und die Knoten in  $B$ , die von  $t$  erreichbar sind.
- Allgemeiner Graph: Das Komplement eines Vertex-Cover ist ein Independent Set.  $\Rightarrow$  Max Weight Independent Set ist Komplement von Min Weight Vertex Cover.
- Bipartiter Graph: Min Vertex Cover (kleinste Menge Kanten, die alle Knoten berühren) = Max Matching.
- Bipartites Matching mit Gewichten auf linken Knoten. Minimiere Matchinggewicht. Lösung: Sortiere Knoten links aufsteigend nach Gewicht, danach nutze normalen Algorithmus (KUHN, Seite 11)
- Tobin, cool down!

## 8 Convenience-Methoden

### 8.1 Zeileneingabe

```

1 vector<string> split(string &s, string delim) { //zerlegt s anhand aller Zeichen in delim
2   vector<string> result; char *token;
3   token = strtok((char*)s.c_str(), (char*)delim.c_str());
4   while (token != NULL) {
5     result.push_back(string(token));
6     token = strtok(NULL, (char*)delim.c_str());
7   }
8   return result;
9 }

```

### 8.2 Template

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 void solve() {}
6
7 int main() {
8   solve();
9   return 0;
10 }

```

### 8.3 Deutsches Tatstaturlayout

1 setxkbmap de