Team Contest Reference

ChaosKITs
Karlsruhe Institute of Technology

5. Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Datenstrukturen

1.1 Union-Find

```
// Laufzeit: O(n*alpha(n))
// "height" ist obere Schranke für die Höhe der Bäume. Sobald Pfadkompression
// angewendet wurde, ist die genaue Höhe nicht mehr effizient berechenbar.
vector<int> parent // Initialisiere mit Index im Array.
vector<int> height; // Initialisiere mit 0.

int findSet(int n) { // Pfadkompression
  if (parent[n] != n) parent[n] = findSet(parent[n]);
  return parent[n];
}

void linkSets(int a, int b) { // Union by rank.
  if (height[a] < height[b]) parent[a] = b;
  else if (height[b] < height[a]) parent[b] = a;
  else {
    parent[a] = b;
    height[b]++;
  }
}

void unionSets(int a, int b) { // Diese Funktion aufrufen.
  if (findSet(a) != findSet(b)) linkSets(findSet(a), findSet(b));
}
```

1.2 Segmentbaum

```
// Laufzeit: init: O(n), query: O(log n), update: O(log n)
// Berechnet das Maximum im Array.
int a[MAX_N], m[4 * MAX_N];

int query(int x, int y, int k = 0, int X = 0, int Y = MAX_N - 1) {
  if (x <= X && Y <= y) return m[k];
  if (y < X || Y < x) return -1000000000; // Ein "neutrales" Element.
  int M = (X + Y) / 2;
  return max(query(x, y, 2 * k + 1, X, M), query(x, y, 2 * k + 2, M + 1, Y));
}

void update(int i, int v, int k = 0, int X = 0, int Y = MAX_N - 1) {
  if (i < X || Y < i) return;
  if (X == Y) { m[k] = v; a[i] = v; return; }
  int M = (X + Y) / 2;
  update(i, v, 2 * k + 1, X, M);
  update(i, v, 2 * k + 2, M + 1, Y);
  m[k] = max(m[2 * k + 1], m[2 * k + 2]);
}

// Einmal vor allen anderen Operationen aufrufen.
void init(int k = 0, int X = 0, int Y = MAX_N - 1) {
  if (X == Y) { m[k] = a[X]; return; }
  int M = (X + Y) / 2;
  init(2 * k + 1, X, M);
  init(2 * k + 2, M + 1, Y);
  m[k] = max(m[2 * k + 1], m[2 * k + 2]);
}
```

Mit `update()` können ganze Intervalle geändert werden. Dazu: Offset in den inneren Knoten des Baums speichern.

1.3 Fenwick Tree

```
vector<int> FT; // Fenwick-Tree
int n;

// Addiert val zum Element an Index i. O(log(n)).
void updateFT(int i, int val) {
  i++; while(i <= n) { FT[i] += val; i += (i & (-i)); }
```

```
}

// Baut Baum auf. O(n*log(n)).
void buildFenwickTree(vector<int>& a) {
  n = a.size();
  FT.assign(n+1,0);
  for(int i = 0; i < n; i++)  updateFT(i,a[i]);
}

// Präfix-Summe über das Intervall [0..i]. O(log(n)).
int prefix_sum(int i) {
  int sum = 0; i++;
  while(i > 0) { sum += FT[i]; i -= (i & (-i)); }
  return sum;
}
```

1.4 Range Minimum Query

```
vector<int> data(RMQ_SIZE);
vector<vector<int>> rmq(floor(log2(RMQ_SIZE)) + 1, vector<int>(RMQ_SIZE));

// Baut Struktur auf. O(n*log(n))
void initRMQ() {
  for(int i = 0, s = 1, ss = 1; s <= RMQ_SIZE; ss=s, s*=2, i++) {
    for(int l = 0; l + s <= RMQ_SIZE; l++) {
      if(i == 0) rmq[0][l] = l;
      else {
        int r = l + ss;
        rmq[i][l] = (data[rmq[i-1][l]] <= data[rmq[i-1][r]] ? rmq[i-1][l] : rmq[i-1][r]);
}}}}

// Gibt den Index des Minimums im Intervall [l,r) zurück. O(1).
int queryRMQ(int l, int r) {
  if(l >= r) return l;
  int s = floor(log2(r-l)); r = r - (1 << s);
  return (data[rmq[s][l]] <= data[rmq[s][r]] ? rmq[s][l] : rmq[s][r]);
}
```

1.5 STL-Tree

```
#include <bits/stdc++.h>
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
using namespace std; using namespace __gnu_pbds;
typedef tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag, tree_order_statistics_node_update> Tree;
int main() {
  Tree X;
  for (int i = 1; i <= 16; i <<= 1) X.insert(i); // {1, 2, 4, 8, 16}
  cout << *X.find_by_order(3) << endl; // => 8
  cout << X.order_of_key(10) << endl; // => 4 = Nachfolger von 10 = minimales i, sodass X[i] >= 10
  return 0;
}
```

2 Graphen

2.1 Minimale Spannbäume

Schnitteigenschaft Für jeden Schnitt C im Graphen gilt: Gibt es eine Kante e, die echt leichter ist als alle anderen Schnittkanten, so gehört diese zu allen minimalen Spannbäumen. ($\Rightarrow$ Die leichteste Kante in einem Schnitt kann in einem minimalen Spannbaum verwendet werden.)

Kreiseigenschaft Für jeden Kreis K im Graphen gilt: Die schwerste Kante auf dem Kreis ist nicht Teil des minimalen Spannbaums.

2.1.1 Kruskal

```
//Takes a Graph g (EdgeList!!!) with N nodes and computes the MST and Cost of it. Runtime: O(|E|*log(|E|))
//Requires UnionFind-Datastructure!!!
pair<graph,int> buildMST(int N, graph& g) {
  UnionFind uf(N);
  graph mst; int mst_cost = 0; int M = g.size();
  sort(g.begin(),g.end());
  for(int i = 0; i < M; i++) {
    int u = g[i].second.first, v = g[i].second.second;
    if(uf.findSet(u) != uf.findSet(v)) {
      mst.push_back(g[i]); mst_cost += g[i].first;
      uf.unionSets(u,v);
    }
  }
  return make_pair(mst,mst_cost);
}
```

2.2 Kürzeste Wege

2.2.1 Algorithmus von Dijkstra

Kürzeste Pfade in Graphen ohne negative Kanten.

```
// Laufzeit: O((|E|+|V|)*log |V|)
void dijkstra(int start) {
  priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii> > pq;
  vector<int> dist(NUM_VERTICES, INF), parent(NUM_VERTICES, -1);

  dist[start] = 0;
  pq.push(ii(0, start));

  while (!pq.empty()) {
    ii front = pq.top(); pq.pop();
    int curNode = front.second, curDist = front.first;

    if (curDist > dist[curNode]) continue;

    for (auto n : adjlist[curNode]) {
      int nextNode = n.first, nextDist = curDist + n.second;
      if (nextDist < dist[nextNode]) {
        dist[nextNode] = nextDist; parent[nextNode] = curNode;
        pq.push(ii(nextDist, nextNode));
      }
    }
  }
}
```

2.2.2 Bellmann-Ford-Algorithmus

Kürzestes Pfade in Graphen mit negativen Kanten. Erkennt negative Zyklen.

```
// Laufzeit: O(|V|*|E|)
struct edge {
  int from; int to; int cost;
  edge () {};
  edge (int from, int to, int cost) : from(from), to(to), cost(cost) {};
};

vector<edge> edges; // Kanten einfügen!
vector<int> dist, parent;

void bellmannFord() {
  dist.assign(NUM_VERTICES, INF); dist[0] = 0;
  parent.assign(NUM_VERTICES, -1);
  for (int i = 0; i < NUM_VERTICES - 1; i++) {
    for (int j = 0; j < (int)edges.size(); j++) {
      if (dist[edges[j].from] + edges[j].cost < dist[edges[j].to]) {
        dist[edges[j].to] = dist[edges[j].from] + edges[j].cost;
        parent[edges[j].to] = edges[j].from;
      }
```

```
    }
  }

  // "dist" und "parent" sind korrekte kürzeste Pfade.
  // Folgende Zeilen prüfen nur negative Kreise.
  for (int j = 0; j < (int)edges.size(); j++) {
    if (dist[edges[j].from] + edges[j].cost < dist[edges[j].to]) {
      // Negativer Kreis gefunden.
    }
  }
}
```

2.2.3 Floyd-Warshall-Algorithmus

```
// Laufzeit: O(|V|^3)
// Initialisiere mat: mat[i][i] = 0, mat[i][j] = INF falls i & j nicht adjazent, Länge sonst.
void floydWarshall() {
  for (k = 0; k < MAX_V; k++) {
    for (i = 0; i < MAX_V; i++) {
      for (j = 0; j < MAX_V; j++) {
        if (mat[i][k] != INF && mat[k][j] != INF && mat[i][k] + mat[k][j] < mat[i][j]) {
          mat[i][j] = mat[i][k] + mat[k][j];
        }
      }
    }
  }
}
```

- Evtl. überschreibt die Eingabe die Nullen auf der Hauptdiagonalen. Nur negative Werte sollten die Nullen überschreiben.
- Von parallelen Kanten sollte nur die günstigste gespeichert werden.
- Knoten `i` liegt genau dann auf einem negativen Kreis, wenn `dist[i][i] < 0` ist.
- Ein u-v-Pfad existiert nicht, wenn `dist[u][v] == INF`.
- Gibt es einen Knoten `c`, sodass `dist[u][c] != INF && dist[c][v] != INF && dist[c][c] < 0`, wird der u-v-Pfad beliebig kurz.

2.3 Strongly Connected Components (Tarjans-Algorithmus)

```
// Laufzeit: O(|V|+|E|)
int counter, sccCounter;
vector<bool> visited, inStack;
vector< vector<int> > adjlist;
vector<int> d, low, sccs;
stack<int> s;

void visit(int v) {
  visited[v] = true;
  d[v] = counter; low[v] = counter; counter++;
  inStack[v] = true; s.push(v);

  for (int i = 0; i < (int)adjlist[v].size(); i++) {
    int u = adjlist[v][i];
    if (!visited[u]) {
      visit(u);
      low[v] = min(low[v], low[u]);
    } else if (inStack[u]) {
      low[v] = min(low[v], low[u]);
    }
  }

  if (d[v] == low[v]) {
    int u;
    do {
      u = s.top(); s.pop(); inStack[u] = false;
      sccs[u] = sccCounter;
    } while(u != v);
    sccCounter++;
  }
}

void scc() {
```

```
  // Initialisiere adjlist!
  visited.clear(); visited.assign(NUM_VERTICES, false);
  d.clear(); d.resize(NUM_VERTICES);
  low.clear(); low.resize(NUM_VERTICES);
  inStack.clear(); inStack.assign(NUM_VERTICES, false);
  sccs.clear(); sccs.resize(NUM_VERTICES);

  counter = 0;
  sccCounter = 0;
  for (i = 0; i < NUM_VERTICES; i++) {
    if (!visited[i]) {
      visit(i);
    }
  }
  // sccCounter ist Anzahl der starkem Zusammenhangskomponenten.
  // sccs enthält den Index der SCC für jeden Knoten.
}
```

2.4 Artikulationspunkte und Brücken

```
vector< vector<int> > adjlist;
vector<int> low;
vector<int> d;
vector<bool> isArtPoint;
vector< vector<int> > bridges; //nur fuer Bruecken
int counter = 0;

void visit(int v, int parent) {
  d[v] = low[v] = ++counter;
  int numVisits = 0, maxlow = 0;

  for (vector<int>::iterator vit = adjlist[v].begin(); vit != adjlist[v].end(); vit++) {
    if (d[*vit] == 0) {
      numVisits++;
      visit(*vit, v);
      if (low[*vit] > maxlow) {
        maxlow = low[*vit];
      }

      if (low[*vit] > d[v]) { //nur fuer Bruecken, evtl. parent betrachten!
        bridges[v].push_back(*vit);
        bridges[*vit].push_back(v);
      }

      low[v] = min(low[v], low[*vit]);
    } else {
      if (d[*vit] < low[v]) {
        low[v] = d[*vit];
      }
    }
  }

  if (parent == -1) {
    if (numVisits > 1) isArtPoint[v] = true;
  } else {
    if (maxlow >= d[v]) isArtPoint[v] = true;
  }
}

void findArticulationPoints() {
  low.clear(); low.resize(adjlist.size());
  d.clear(); d.assign(adjlist.size(), 0);
  isArtPoint.clear(); isArtPoint.assign(adjlist.size(), false);
  bridges.clear(); isBridge.resize(adjlist.size()); //nur fuer Bruecken
  for (int v = 0; v < (int)adjlist.size(); v++) {
    if (d[v] == 0) visit(v, -1);
  }
}
```

2.5 Eulertouren

- Zyklus existiert, wenn jeder Knoten geraden Grad hat (ungerichtet), bzw. bei jedem Knoten Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen (gerichtet).
- Pfad existiert, wenn alle bis auf (maximal) zwei Knoten geraden Grad haben (ungerichtet), bzw. bei allen Knoten bis auf zwei Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen, wobei einer eine Ausgangskante mehr hat (Startknoten) und einer eine Eingangskante mehr hat (Endknoten).
- **Je nach Aufgabenstellung überprüfen, wie isolierte Punkte interpretiert werden sollen.**
- Der Code unten läuft in Linearzeit. Wenn das nicht notwenidg ist (oder bestimmte Sortierungen verlangt werden), gehts mit einem `set` einfacher.

```
VISIT(v):
  forall e=(v,w) in E
  delete e from E
  VISIT(w)
  print e
```

```
// Laufzeit: O(|V|+|E|)
vector< vector<int> > adjlist;
vector< vector<int> > otherIdx;
vector<int> cycle;
vector<int> validIdx;

void swapEdges(int n, int a, int b) { // Vertauscht Kanten mit Indizes a und b von Knoten n.
  int neighA = adjlist[n][a];
  int neighB = adjlist[n][b];
  int idxNeighA = otherIdx[n][a];
  int idxNeighB = otherIdx[n][b];
  swap(adjlist[n][a], adjlist[n][b]);
  swap(otherIdx[n][a], otherIdx[n][b]);
  otherIdx[neighA][idxNeighA] = b;
  otherIdx[neighB][idxNeighB] = a;
}

void removeEdge(int n, int i) { // Entfernt Kante i von Knoten n (und die zugehörige Rückwärtskante).
  int other = adjlist[n][i];
  if (other == n) { //Schlingen.
    validIdx[n]++;
    return;
  }
  int otherIndex = otherIdx[n][i];
  validIdx[n]++;
  if (otherIndex != validIdx[other]) {
    swapEdges(other, otherIndex, validIdx[other]);
  }
  validIdx[other]++;
}

// Findet Eulerzyklus an Knoten n startend.
// Teste vorher, dass Graph zusammenhängend ist! Was ist mit isolierten Knoten?
// Teste vorher, ob Eulerzyklus überhaupt existiert!
void euler(int n) {
  while (validIdx[n] < (int)adjlist[n].size()) {
    int nn = adjlist[n][validIdx[n]];
    removeEdge(n, validIdx[n]);
    euler(nn);
  }
  cycle.push_back(n); // Zyklus am Ende in cycle (umgekehrte Reihenfolge).
}
```

- Die Ausgabe erfolgt in falscher Reihenfolge.
- Algorithmus schlägt nicht fehl, falls kein Eulerzyklus existiert. Die Existenz muss separat geprüft werden.

2.6 Lowest Common Ancestor

```
//RMQ muss hinzugefuegt werden!
vector<int> visited(2*MAX_N), first(MAX_N, 2*MAX_N), depth(2*MAX_N);
vector<vector<int>> graph(MAX_N);

//Runtime: O(n)
```

```
void initLCA(int gi, int d, int &c) {
  visited[c] = gi, depth[c] = d, first[gi] = min(c, first[gi]), c++;
  for(int gn : graph[gi]) {
    initLCA(gn, d+1, c);
    visited[c] = gi, depth[c] = d, c++;
  }
}
//[a, b]
//Runtime: O(1)
int getLCA(int a, int b) {
  return visited[queryRMQ(min(first[a], first[b]), max(first[a], first[b]))];
}
//=> int c = 0; initLCA(0,0,c); initRMQ(); done! [rmq on depth]
```

2.7 Max-Flow

2.7.1 Capacity Scaling

Gut bei dünn besetzten Graphen.

```
// Ford Fulkerson mit Capacity Scaling.
// Laufzeit: O(|E|^2*log(C))
struct MaxFlow { // Muss mit new erstellt werden!
  static const int MAX_N = 500; // #Knoten, kein Einfluss auf die Laufzeit.
  struct edge { int dest, rev; ll capacity, flow; };
  vector<edge> adjlist[MAX_N];
  int visited[MAX_N] = {0}, target, dfsCounter = 0;
  ll capacity;

  bool dfs(int x) {
    if (x == target) return 1;
    if (visited[x] == dfsCounter) return 0;
    visited[x] = dfsCounter;
    for (edge &e : adjlist[x]) {
      if (e.capacity >= capacity && dfs(e.dest)) {
        e.capacity -= capacity; adjlist[e.dest][e.rev].capacity += capacity;
        e.flow += capacity; adjlist[e.dest][e.rev].flow -= capacity;
        return 1;
      }
    }
    return 0;
  }

  void addEdge(int u, int v, ll c) {
    adjlist[u].push_back(edge {v, (int)adjlist[v].size(), c, 0});
    adjlist[v].push_back(edge {u, (int)adjlist[u].size() - 1, 0, 0});
  }

  ll maxFlow(int s, int t) {
    capacity = 1L << 62;
    target = t;
    ll flow = 0L;
    while (capacity) {
      while (dfsCounter++, dfs(s)) {
        flow += capacity;
      }
      capacity /= 2;
    }
    return flow;
  }
};
```

2.7.2 Push Relabel

Gut bei sehr dicht besetzten Graphen.

```
// Laufzeit: O(|V|^3)
struct PushRelabel {
  ll capacities[MAX_V][MAX_V], flow[MAX_V][MAX_V], excess[MAX_V];
  int height[MAX_V], list[MAX_V - 2], seen[MAX_V], n;

```

```
  PushRelabel(int n) {
    this->n = n;
    memset(capacities, 0L, sizeof(capacities)); memset(flow, 0L, sizeof(flow));
    memset(excess, 0L, sizeof(excess)); memset(height, 0, sizeof(height));
    memset(list, 0, sizeof(list));  memset(seen, 0, sizeof(seen));
  }

  inline void addEdge(int u, int v, ll c) { capacities[u][v] += c; }

  void push(int u, int v) {
    ll send = min(excess[u], capacities[u][v] - flow[u][v]);
    flow[u][v] += send; flow[v][u] -= send;
    excess[u] -= send; excess[v] += send;
  }

  void relabel(int u) {
    int minHeight = INT_MAX / 2;
    for (int v = 0; v < n; v++) {
      if (capacities[u][v] - flow[u][v] > 0) {
        minHeight = min(minHeight, height[v]);
        height[u] = minHeight + 1;
  }}}

  void discharge(int u) {
    while (excess[u] > 0) {
      if (seen[u] < n) {
        int v = seen[u];
        if (capacities[u][v] - flow[u][v] > 0 && height[u] > height[v]) push(u, v);
        else seen[u]++;
      } else {
        relabel(u);
        seen[u] = 0;
  }}}

  void moveToFront(int u) {
    int temp = list[u];
    for (int i = u; i > 0; i--)
      list[i] = list[i - 1];
    list[0] = temp;
  }

  ll maxFlow(int source, int target) {
    for (int i = 0, p = 0; i < n; i++) if (i != source && i != target) list[p++] = i;

    height[source] = n;
    excess[source] = LLONG_MAX / 2;
    for (int i = 0; i < n; i++) push(source, i);

    int p = 0;
    while (p < n - 2) {
      int u = list[p], oldHeight = height[u];
      discharge(u);
      if (height[u] > oldHeight) {
        moveToFront(p);
        p = 0;
      } else p++;
    }

    ll maxflow = 0L;
    for (int i = 0; i < n; i++) maxflow += flow[source][i];
    return maxflow;
  }
};
```

2.7.3 Anwendungen

- **Maximum Edge Disjoint Paths**
  Finde die maximale Anzahl Pfade von s nach t, die keine Kante teilen.
  1. Setze s als Quelle, t als Senke und die Kapazität jeder Kante auf 1.
  2. Der maximale Fluss entspricht der unterschiedlichen Pfade ohne gemeinsame Kanten.
- **Maximum Independent Paths**

Finde die maximale Anzahl Pfade von s nach t, die keinen Knoten teilen.

1. Setze s als Quelle, t als Senke und die Kapazität jeder Kante *und jedes Knotens* auf 1.
2. Der maximale Fluss entspricht der unterschiedlichen Pfade ohne gemeinsame Knoten.

- **Min-Cut**
  Der maximale Fluss ist gleich dem minimalen Schnitt. Bei Quelle s und Senke t, partitioniere in S und T. Zu S gehören alle Knoten, die im Residualgraphen von s aus erreichbar sind (Rückwärtskanten beachten).

2.8 Min-Cost-Max-Flow

```
typedef long long ll;
static const ll flowlimit = 1LL << 60; // Should be bigger than the max flow.
struct MinCostFlow { // Should be initialized with new.
  static const int maxn = 400; // Should be bigger than the #vertices.
  static const int maxm = 5000; //#edges.
  struct edge { int node; int next; ll flow; ll value; } edges[maxm << 1];
  int graph[maxn], queue[maxn], pre[maxn], con[maxn], n, m, source, target, top;
  bool inqueue[maxn];
  ll maxflow, mincost, dis[maxn];

  MinCostFlow() { memset(graph, -1, sizeof(graph)); top = 0; }

  inline int inverse(int x) { return 1 + ((x >> 1) << 2) - x; }

  // Directed edge from u to v, capacity c, weight w.
  inline int addedge(int u, int v, int c, int w) {
    edges[top].value = w; edges[top].flow = c; edges[top].node = v;
    edges[top].next = graph[u]; graph[u] = top++;
    edges[top].value = -w; edges[top].flow = 0; edges[top].node = u;
    edges[top].next = graph[v]; graph[v] = top++;
    return top - 2;
  }

  bool SPFA() {
    int point, node, now, head = 0, tail = 1;
    memset(pre, -1, sizeof(pre));
    memset(inqueue, 0, sizeof(inqueue));
    memset(dis, 0x7F, sizeof(dis));
    dis[source] = 0; queue[0] = source;
    pre[source] = source; inqueue[source] = true;

    while (head != tail) {
      now = queue[head++];
      point = graph[now];
      inqueue[now] = false;
      head %= maxn;

      while (point != -1) {
        node = edges[point].node;
        if (edges[point].flow > 0 && dis[node] > dis[now] + edges[point].value) {
          dis[node] = dis[now] + edges[point].value;
          pre[node] = now; con[node] = point;
          if (!inqueue[node]) {
            inqueue[node] = true; queue[tail++] = node;
            tail %= maxn;
          }
        }
        point = edges[point].next;
      }
    }
    return pre[target] != -1;
  }

  void extend() {
    ll w = flowlimit;
    for (int u = target; pre[u] != u; u = pre[u]) {
      w = min(w, edges[con[u]].flow);
    }
    maxflow += w;
    mincost += dis[target] * w;
    for (int u = target; pre[u] != u; u = pre[u]) {
      edges[con[u]].flow -= w;
```

```
      edges[inverse(con[u])].flow += w;
    }
  }

  void mincostflow() {
    maxflow = 0;
    mincost = 0;
    while (SPFA()) {
      extend();
    }
  }
};
```

2.9 Maximal Cardinatlity Bipartite Matching

```
// Laufzeit: O(n*(|V|+|E|))
vector< vector<int> > adjlist; // Gerichtete Kanten, von links nach rechts.
vector<int> pairs; // Zu jedem Knoten der gematchte Knoten rechts, oder -1.
vector<bool> visited;

bool dfs(int v) {
  if (visited[v]) return false;
  visited[v] = true;
  for (auto w : adjlist[v]) if (pairs[w] < 0 || dfs(pairs[w])) {
    pairs[w] = v; pairs[v] = w; return true;
  }
  return false;
}

// n = #Knoten links (0..n-1), m = #Knoten rechts
int kuhn(int n, int m) {
  pairs.assign(n + m, -1);
  int ans = 0;
  // Greedy Matching. Optionale Beschleunigung.
  for (int i = 0; i < n; i++) for (auto w : adjlist[i]) if (pairs[w] == -1) {
    pairs[i] = w; pairs[w] = i; ans++; break;
  }
  for (int i = 0; i < n; i++) if (pairs[i] == -1) {
    visited.assign(n + m, false);
    ans += dfs(i);
  }
  return ans; // Größe des Matchings.
}
```

2.10 TSP

```
// Laufzeit: O(n^2*2^n)
vector<vector<int>> dist; // Entfernung zwischen je zwei Punkten.
vector<int> TSP() {
  int n = dist.size(), m = 1 << n;
  vector<vector<ii>> dp(n, vector<ii>(m, ii(INF, -1)));

  for(int c = 0; c < n; c++) dp[c][m-1].first = dist[c][0], dp[c][m-1].second = 0;

  for(int v = m - 2; v >= 0; v--) {
    for(int c = n - 1; c >= 0; c--) {
      for(int g = 0; g < n; g++) {
        if(g != c && !((1 << g) & v)) {
          if((dp[g][(v | (1 << g))].first + dist[c][g]) < dp[c][v].first) {
            dp[c][v].first = dp[g][(v | (1 << g))].first + dist[c][g];
            dp[c][v].second = g;
  }}}}}

  vector<int> res; res.push_back(0); int v = 0;
  while(res.back() != 0 || res.size() == 1) {
    res.push_back(dp[res.back()][(v |= (1 << res.back()))].second);
  }
  return res; // Enthält Knoten 0 zweimal. An erster und letzter Position.
}
```

2.11 Bitonic TSP

```
// Laufzeit: O(|V|^2)
vector< vector<double> > dp; // Initialisiere mit -1
vector< vector<double> > dist; // Initialisiere mit Entfernungen zwischen Punkten.
vector<int> lr, rl; // Links-nach-rechts und rechts-nach-links Pfade.
int n; // #Knoten

// get(0, 0) gibt die Länge der kürzesten bitonischen Route.
double get(int p1, int p2) {
  int v = max(p1, p2) + 1;
  if (v == n - 1) return dist[p1][v] + dist[v][p2];
  if (dp[p1][p2] > -0.5) return dp[p1][p2];
  double tryLR = dist[p1][v] + get(v, p2), tryRl = dist[v][p2] + get(p1, v);
  if (tryLR < tryRL) lr.push_back(v); // Baut die Pfade auf. Fügt v zu rl hinzu, falls beide gleich teuer.
  else rl.push_back(v); // Änder das, falls nötig.
  return min(tryLR, tryRL);
}
```

3 Geometrie

3.1 Closest Pair

```
double squaredDist(point a, point b) {
  return (a.first-b.first) * (a.first-b.first) + (a.second-b.second) * (a.second-b.second);
}

bool compY(point a, point b) {
  if (a.second == b.second) return a.first < b.first;
  return a.second < b.second;
}

double shortestDist(vector<point> &points) {
  //check that points.size() > 1 and that ALL POINTS ARE DIFFERENT
  set<point, bool(*)(point, point)> status(compY);
  sort(points.begin(), points.end());
  double opt = 1e30, sqrtOpt = 1e15;
  auto left = points.begin(), right = points.begin();
  status.insert(*right); right++;

  while (right != points.end()) {
    if (fabs(left->first - right->first) >= sqrtOpt) {
      status.erase(*(left++));
    } else {
      auto lower = status.lower_bound(point(-1e20, right->second - sqrtOpt));
      auto upper = status.upper_bound(point(-1e20, right->second + sqrtOpt));
      while (lower != upper) {
        double cand = squaredDist(*right, *lower);
        if (cand < opt) {
          opt = cand;
          sqrtOpt = sqrt(opt);
        }
        ++lower;
      }
      status.insert(*(right++));
    }
  }
  return sqrtOpt;
}
```

3.2 Geraden

```
struct pt { //complex<double> does not work here, becuase we need to set pt.x and pt.y
  double x, y;
  pt() {};
  pt(double x, double y) : x(x), y(y) {};
};

```

```
struct line {
  double a, b, c; //a*x+b*y+c, b=0 <=> vertical line, b=1 <=> otherwise
};

line pointsToLine(pt p1, pt p2) {
  line l;
  if (fabs(p1.x - p2.x) < EPSILON) {
    l.a = 1; l.b = 0.0; l.c = -p1.x;
  } else {
    l.a = -(double)(p1.y - p2.y) / (p1.x - p2.x);
    l.b = 1.0;
    l.c = -(double)(l.a * p1.x) - p1.y;
  }
  return l;
}

bool areParallel(line l1, line l2) {
  return (fabs(l1.a - l2.a) < EPSILON) && (fabs(l1.b - l2.b) < EPSILON);
}

bool areSame(line l1, line l2) {
  return areParallel(l1, l2) && (fabs(l1.c - l2.c) < EPSILON);
}

bool areIntersect(line l1, line l2, pt &p) {
  if (areParallel(l1, l2)) return false;
  p.x = (l2.b * l1.c - l1.b * l2.c) / (l2.a * l1.b - l1.a * l2.b);
  if (fabs(l1.b) > EPSILON) p.y = -(l1.a * p.x + l1.c);
  else p.y = -(l2.a * p.x + l2.c);
  return true;
}
```

3.3 Konvexe Hülle

```
// Laufzeit: O(n*log(n))
typedef pair<ll, ll> pt;

// >0 => PAB dreht gegen den Uhrzeigersinn.
// <0 => PAB dreht im Uhrzeigersinn.
// =0 => PAB sind kollinear.
ll cross(const pt p, const pt a, const pt b) {
  return (a.first - p.first) * (b.second - p.second) -
      (a.second - p.second) * (b.first - p.first);
}

// Punkte auf der konvexen Hülle, gegen den Uhrzeigersinn sortiert.
// Kollineare Punkte sind nicht enthalten. Entferne "=" im CCW-Test um sie aufzunehmen.
// Achtung: Der erste und letzte Punkt im Ergebnis sind gleich.
// Achtung: Alle Punkte müssen verschieden sein.
vector<pt> convexHull(vector<pt> p){
  int n = p.size(), k = 0;
  vector<pt> h(2 * n);
  sort(p.begin(), p.end());
  // Untere Hülle.
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    while (k >= 2 && cross(h[k - 2], h[k - 1], p[i]) <= 0.0) k--;
    h[k++] = p[i];
  }
  // Obere Hülle.
  for (int i = n - 2, t = k + 1; i >= 0; i--) {
    while (k >= t && cross(h[k - 2], h[k - 1], p[i]) <= 0.0) k--;
    h[k++] = p[i];
  }
  h.resize(k);
  return h;
}
```

3.4 Formeln - `std::complex`

```
// Komplexe Zahlen als Darstellung für Punkte.
// Wenn immer möglich complex<int> verwenden. Achtung: Funktionen wie abs() geben dann int zurück.
typedef pt complex<double>;

// Winkel zwischen Punkt und x-Achse in [0, 2 * PI), Winkel zwischen a und b.
double angle = arg (a), angle_a_b = arg (a - b);

// Punkt rotiert um Winkel theta.
pt a_rotated = a * exp (pt (0, theta));

// Mittelpunkt des Dreiecks abc.
pt centroid = (a + b + c) / 3.0;

// Skalarprodukt.
double dot(pt a, pt b) {
  return real(conj(a) * b);
}

// Kreuzprodukt, 0, falls kollinear.
double cross(pt a, pt b) {
  return imag(conj(a) * b);
}

// Flächeninhalt eines Dreicks bei bekannten Eckpunkten.
double areaOfTriangle(pt a, pt b, pt c) {
  return abs(cross(b - a, c - a)) / 2.0;
}

// Flächeninhalt eines Dreiecks bei bekannten Seitenlängen.
double areaOfTriangle(double a, double b, double c) {
  double s = (a + b + c) / 2;
  return sqrt(s * (s-a) * (s-b) * (s-c));
}

// Sind die Dreiecke a1, b1, c1, and a2, b2, c2 ähnlich?
// Erste Zeile testet Ähnlichkeit mit gleicher Orientierung,
// zweite Zeile testet Ähnlichkeit mit unterschiedlicher Orientierung
bool similar (pt a1, pt b1, pt c1, pt a2, pt b2, pt c2) {
  return (
    (b2 - a2) * (c1 - a1) == (b1 - a1) * (c2 - a2) ||
    (b2 - a2) * (conj (c1) - conj (a1)) == (conj (b1) - conj (a1)) * (c2 - a2)
  );
}

// -1 => gegen den Uhrzeigersinn, 0 => kolliniear, 1 => im Uhrzeigersinn.
// Einschränken der Rückgabe auf [-1,1] ist sicherer gegen Overflows.
double orientation(pt a, pt b, pt c) {
  double orien = cross(b - a, c - a);
  if (abs(orien) < EPSILON) return 0; // Might need large EPSILON: ~1e-6
  return orien < 0 ? -1 : 1;
}

// Test auf Streckenschnitt zwischen a-b und c-d.
bool lineSegmentIntersection(pt a, pt b, pt c, pt d) {
  if (orientation(a, b, c) == 0 && orientation(a, b, d) == 0) { // Falls kollinear.
    double dist = abs(a - b);
    return (abs(a - c) <= dist && abs(b - c) <= dist) || (abs(a - d) <= dist && abs(b - d) <= dist);
  }
  return orientation(a, b, c) * orientation(a, b, d) <= 0 && orientation(c, d, a) * orientation(c, d, b) <= 0;
}

// Berechnet die Schnittpunkte der Strecken a-b und c-d.
// Enthält entweder keinen Punkt, den einzigen Schnittpunkt oder die Endpunkte der Schnittstrecke.
// Achtung: operator<, min, max müssen selbst geschrieben werden!
vector<pt> lineSegmentIntersection(pt a, pt b, pt c, pt d) {
  vector<pt> result;
  if (orientation(a, b, c) == 0 && orientation(a, b, d) == 0 &&
      orientation(c, d, a) == 0 && orientation(c, d, b) == 0) {
    pt minAB = min(a, b), maxAB = max(a, b), minCD = min(c, d), maxCD = max(c, d);
    if (minAB < minCD && maxAB < minCD) return result;
    if (minCD < minAB && maxCD < minAB) return result;
    pt start = max(minAB, minCD), end = min(maxAB, maxCD);
    result.push_back(start);
```

```
    if (start != end) result.push_back(end);
    return result;
  }
  double x1 = real(b) - real(a), y1 = imag(b) - imag(a);
  double x2 = real(d) - real(c), y2 = imag(d) - imag(c);
  double u1 = (-y1 * (real(a) - real(c)) + x1 * (imag(a) - imag(c))) / (-x2 * y1 + x1 * y2);
  double u2 = (x2 * (imag(a) - imag(c)) - y2 * (real(a) - real(c))) / (-x2 * y1 + x1 * y2);
  if (u1 >= 0 && u1 <= 1 && u2 >= 0 && u2 <= 1) {
    double x = real(a) + u2 * x1, y = imag(a) + u2 * y1;
    result.push_back(pt(x, y));
  }
  return result;
}

// Entfernung von Punkt p zur Gearden durch a-b.
double distToLine(pt a, pt b, pt p) {
  return abs(cross(p - a, b - a)) / abs(b - a);
}

// Liegt p auf der Geraden a-b?
bool pointOnLine(pt a, pt b, pt p) {
  return orientation(a, b, c) == 0;
}

// Liegt p auf der Strecke a-b?
bool pointOnLineSegment(pt a, pt b, pt p) {
  if (orientation(a, b, p) != 0) return false;
  return real(p) >= min(real(a), real(b)) && real(p) <= max(real(a), real(b)) &&
      imag(p) >= min(imag(a), imag(b)) && imag(p) <= max(imag(a), imag(b));
}

// Entfernung von Punkt p zur Strecke a-b.
double distToSegment(pt a, pt b, pt p) {
  if (a == b) return abs(p - a);
    double segLength = abs(a - b);
    double u = ((real(p) - real(a)) * (real(b) - real(a)) +
        (imag(p) - imag(a)) * (imag(b) - imag(a))) /
        (segLength * segLength);
    pt projection(real(a) + u * (real(b) - real(a)), imag(a) + u * (imag(b) - imag(a)));
    double projectionDist = abs(p - projection);
    if (!pointOnLineSegment(a, b, projection)) projectionDist = 1e30;
    return min(projectionDist, min(abs(p - a), abs(p - b)));
}

// Kürzeste Entfernung zwischen den Strecken a-b und c-d.
double distBetweenSegments(pt a, pt b, pt c, pt d) {
  if (lineSegmentIntersection(a, b, c, d)) return 0.0;
  double result = distToSegment(a, b, c);
  result = min(result, distToSegment(a, b, d));
  result = min(result, distToSegment(c, d, a));
  return min(result, distToSegment(c, d, b));
}

// Liegt d in der gleichen Ebene wie a, b, und c?
bool isCoplanar(pt a, pt b, pt c, pt d) {
  return abs((b - a) * (c - a) * (d - a)) < EPSILON;
}

// Berechnet den Flächeninhalt eines Polygons (nicht selbstschneidend).
double areaOfPolygon(vector<pt> &polygon) { // Jeder Eckpunkt nur einmal im Vektor.
  double res = 0; int n = polygon.size();
  for (int i = 0; i < n; i++)
    res += real(polygon[i]) * imag(polygon[(i + 1) % n]) - real(polygon[(i + 1) % n]) * imag(polygon[i]);
  return 0.5 * res; // Positiv, wenn Punkte gegen den Uhrzeigersinn gegeben sind. Sonst negativ.
}

// Testet, ob sich zwei Rechtecke (p1, p2) und (p3, p4) schneiden (jeweils gegenüberliegende Ecken).
bool rectIntersection(pt p1, pt p2, pt p3, pt p4) {
  double minx12 = min(real(p1), real(p2)), maxx12 = max(real(p1), real(p2));
  double minx34 = min(real(p3), real(p4)), maxx34 = max(real(p3), real(p4));
  double miny12 = min(imag(p1), imag(p2)), maxy12 = max(imag(p1), imag(p2));
  double miny34 = min(imag(p3), imag(p4)), maxy34 = max(imag(p3), imag(p4));
  return (maxx12 >= minx34) && (maxx34 >= minx12) && (maxy12 >= miny34) && (maxy34 >= miny12);
}
```

```cpp

// Testet, ob ein Punkt im Polygon liegt (beliebige Polygone).
bool pointInPolygon(pt p, vector<pt> &polygon) { // Jeder Eckpunkt nur einmal im Vektor.
  pt rayEnd = p + pt(1, 1000000);
  int counter = 0, n = polygon.size();
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    pt start = polygon[i], end = polygon[(i + 1) % n];
    if (lineSegmentIntersection(p, rayEnd, start, end)) counter++;
  }
  return counter & 1;
}
```

4 Mathe

4.1 ggT, kgV, erweiterter euklidischer Algorithmus

```cpp
// Laufzeiten: O(log(a) + log(b))
ll gcd(ll a, ll b) {
  return b == 0 ? a : gcd (b, a % b);
}

ll lcm(ll a, ll b) {
  return a * (b / gcd(a, b)); // Klammern gegen Overflow.
}
```

```cpp
// Accepted in Aufgabe mit Forderung: |X|+|Y| minimal (primaer) und X<=Y (sekundaer).
// Hab aber keinen Beweis dafuer :)
ll x, y, d; // a * x + b * y = d = ggT(a,b)
void extendedEuclid(ll a, ll b) {
  if (!b) {
    x = 1; y = 0; d = a; return;
  }
  extendedEuclid(b, a % b);
  ll x1 = y; ll y1 = x - (a / b) * y;
  x = x1; y = y1;
}
```

4.1.1 Multiplikatives Inverses von x in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sei $0 \leq x < n$. Definiere $d := \gcd(x, n)$.

Falls $d = 1$:

- Erweiterter euklidischer Algorithmus liefert α und β mit $\alpha x + \beta n = 1$.
- Nach Kongruenz gilt $\alpha x + \beta n \equiv \alpha x \equiv 1 \mod n$.
- $x^{-1} :\equiv \alpha \mod n$

Falls $d \neq 1$: Es existiert kein x^{-1}.

```cpp
// Laufzeit: O(log (n) + log(p))
ll multInv(ll n, ll p) { // Berechnet das multiplikative Inverse von n in F_p.
  extendedEuclid(n, p); // Implementierung von oben.
  x += ((x / p) + 1) * p;
  return x % p;
}
```

4.2 Mod-Exponent über $\mathbb{F}_p$

```cpp
// Laufzeit: O(log(b))
ll mult_mod(ll a, ll b, ll n) {
  if(a == 0 || b == 0) return 0;
  if(b == 1) return a % n;

  if(b % 2 == 1) return (a + mult_mod(a, b-1, n)) % n;
  else return mult_mod((a + a) % n, b / 2, n);
}

// Laufzeit: O(log(b))
```

```
ll pow_mod(ll a, ll b, ll n) {
  if(b == 0) return 1;
  if(b == 1) return a % n;

  if(b % 2 == 1) return mult_mod(pow_mod(a, b-1, n), a, n);
  else return pow_mod(mult_mod(a, a, n), b / 2, n);
}
```

4.3 LGS über $\mathbb{F}_p$

```
// Laufzeit: O(n^3)
void normalLine(ll n, ll line, ll p) { // Normalisiert Zeile line.
  ll factor = multInv(mat[line][line], p); // Implementierung von oben.
  for (ll i = 0; i <= n; i++) {
    mat[line][i] *= factor;
    mat[line][i] %= p;
  }
}

void takeAll(ll n, ll line, ll p) { // Zieht Vielfaches von line von allen anderen Zeilen ab.
  for (ll i = 0; i < n; i++) {
    if (i == line) continue;
    ll diff = mat[i][line];
    for (ll j = 0; j <= n; j++) {
      mat[i][j] -= (diff * mat[line][j]) % p;
      while (mat[i][j] < 0) {
        mat[i][j] += p;
      }
    }
  }
}

void gauss(ll n, ll p) { // nx(n+1)-Matrix, Koerper F_p.
  for (ll line = 0; line < n; line++) {
    normalLine(n, line, p);
    takeAll(n, line, p);
  }
}
```

4.4 Chinesischer Restsatz

- Extrem anfällig gegen Overflows. Evtl. häufig 128-Bit Integer verwenden.
- Direkte Formel für zwei Kongruenzen $x \equiv a \mod n$, $x \equiv b \mod m$:

$$x \equiv a - y * n * \frac{a-b}{d} \mod \frac{mn}{d} \qquad \text{mit} \qquad d := ggT(n,m) = yn + zm$$

  Formel kann auch für nicht teilerfremde Moduli verwendet werden.
- Sind die Moduli nicht teilerfremd, existiert genau dann eine Lösung, wenn $a_i \equiv a_j \mod \gcd(m_i, m_j)$. In diesem Fall sind keine Faktoren auf der linken Seite erlaubt.

```
// Laufzeit: O(n * log(n)), n := Anzahl der Kongruenzen
// Nur für teilerfremde Moduli.
// Berechnet das kleinste, nicht negative x, das die Kongruenzen simultan löst.
// Alle Lösungen sind kongruent zum kgV der Moduli (Produkt, falls alle teilerfremd sind).
struct ChineseRemainder {
  typedef __int128 lll;
  vector<lll> lhs, rhs, module, inv;
  lll M; // Produkt über die Moduli. Kann leicht überlaufen.

  ll g(vector<lll> &vec) {
    lll res = 0;
    for (int i = 0; i < (int)vec.size(); i++) {
      res += (vec[i] * inv[i]) % M;
      res %= M;
    }
    return res;
  }

```

```
  // Fügt Kongruenz l * x = r (mod m) hinzu.
  void addEquation(ll l, ll r, ll m) {
    lhs.push_back(l);
    rhs.push_back(r);
    module.push_back(m);
  }

  // Löst das System.
  ll solve() {
    M = accumulate(module.begin(), module.end(), lll(1), multiplies<lll>());
    inv.resize(lhs.size());
    for (int i = 0; i < (int)lhs.size(); i++) {
      lll x = (M / module[i]) % module[i];
      inv[i] = (multInvers(x, module[i]) * (M / module[i]));
    }
    return (multInvers(g(lhs), M) * g(rhs)) % M;
  }
};
```

4.5 Primzahlsieb von Eratosthenes

```
// Laufzeit: O(n * log log n)
#define N 100000001 // Bis 10^8 in unter 64MB Speicher.
bitset<N / 2> isPrime;

inline bool check(int x) { // Diese Methode zum Lookup verwenden.
  if (x < 2) return false;
  else if (x == 2) return true;
  else if (!(x & 1)) return false;
  else return !isPrime[x / 2];
}

inline int primeSieve(int n) { // Gibt die Anzahl der Primzahlen <= n zurück.
  int counter = 1;
  for (int i = 3; i <= min(N, n); i += 2) {
    if (!isPrime[i / 2]) {
      for (int j = 3 * i; j <= min(N, n); j+= 2 * i) isPrime[j / 2] = 1;
      counter++;
    }
  }
  return counter;
}
```

4.6 Miller-Rabin-Primzahltest

```
// Theoretisch: n < 318,665,857,834,031,151,167,461 (> 10^23)
// Praktisch: n <= 10^18 (long long)
// Laufzeit: O(log n)
bool isPrime(ll n) {
  if(n == 2) return true;
  if(n < 2 || n % 2 == 0) return false;
  ll d=n-1,j=0;
  while(d % 2 == 0) d >>= 1, j++;
  for(int a = 2; a <= min((ll)37, n-1); a++) {
    ll v = pow_mod(a, d, n);
    if(v == 1 || v == n-1) continue;
    for(int i = 1;  i <= j; i++) {
      v = mult_mod(v, v, n);
      if(v == n-1 || v <= 1) break;
    }
    if(v != n-1) return false;
  }
  return true;
}
```

4.7 Binomialkoeffizienten

Vorberechnen, wenn häufig benötigt.

```
// Laufzeit: O(k)
ll calc_binom(ll n, ll k) {
   ll r = 1, d;
   if (k > n) return 0;
   for (d = 1; d <= k; d++) {
      r *= n--;
      r /= d;
   }
   return r;
}
```

4.8 Maximales Teilfeld

```
// N := Länge des Feldes.
// Laufzeit: O(N)
int maxStart = 1, maxLen = 0, curStart = 1, len = 0;
double maxValue = 0, sum = 0;
for (int pos = 0; pos < N; pos++) {
  sum += values[pos];
  len++;
  if (sum > maxValue) { // Neues Maximum.
    maxValue = sum; maxStart = curStart; maxLen = len;
  }
  if (sum < 0) { // Alles zurücksetzen.
    curStart = pos +2; len = 0; sum = 0;
  }
}
// maxSum := maximaler Wert, maxStart := Startposition, maxLen := Länge der Sequenz
```

Obiger Code findet kein maximales Teilfeld, das über das Ende hinausgeht. Dazu:

1. Finde maximales Teilfeld, das nicht übers Ende geht.
2. Berechne minimales Teilfeld, das nicht über den Rand geht (analog).
3. Nimm Maximum aus gefundenem Maximalen und Allem ohne dem Minimalen.

4.9 Polynome & FFT

Multipliziert Polynome A und B.

- $\deg(A * B) = \deg(A) + \deg(B)$
- Vektoren `a` und `b` müssen mindestens Größe $\deg(A * B) + 1$ haben. Größe muss eine Zweierpotenz sein.
- Für ganzzahlige Koeffizienten: `(int)round(real(a[i]))`

```
// Laufzeit: O(n log(n)).
typedef complex<double> cplx; // Eigene Implementierung ist noch deutlich schneller.
vector<cplx> fft(const vector<cplx> &a, bool inverse = 0) { // a.size() muss eine Zweierpotenz sein!
  int logn = 1, n = a.size();
  vector<cplx> A(n);
  while ((1 << logn) < n) logn++;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int j = 0;
    for (int k = 0; k < logn; k++) j = (j << 1) | ((i >> k) & 1);
    A[j] = a[i];
  }
  for (int s = 2; s <= n; s <<= 1) {
    double angle = 2 * PI / s * (inverse ? -1 : 1);
    cplx ws(cos(angle), sin(angle));
    for (int j = 0; j < n; j+= s) {
      cplx w = 1;
      for (int k = 0; k < s / 2; k++) {
        cplx u = A[j + k], t = A[j + s / 2 + k];
        A[j + k] = u + w * t;
        A[j + s / 2 + k] = u - w * t;
        if (inverse) A[j + k] /= 2, A[j + s / 2 + k] /= 2;
        w *= ws;
      }
    }
  }
  return A;
}

```

```
// Polynome: a[0] = a_0, a[1] = a_1, ... und b[0] = b_0, b[1] = b_1, ...
// Integer-Koeffizienten: Runde beim Auslesen der Koeffizienten: (int)round(a[i].real())
vector<cplx> a = {0,0,0,0,1,2,3,4}, b = {0,0,0,0,2,3,0,1};
a = fft(a); b = fft(b);
for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) a[i] *= b[i];
a = fft(a,1); // a = a * b
```

4.10 Kombinatorik

4.10.1 Berühmte Zahlen

Fibonacci-Zahlen	$f(0) = 0 \qquad f(1) = 1 \qquad f(n+2) = f(n+1) + f(n)$	Bem. 1, 2
Catalan-Zahlen	$C_0 = 1 \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2(2n-1)}{n+1} \cdot C_{n-1}$	Bem. 3, 4
Euler-Zahlen (I)	$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = \left\langle {n \atop n-1} \right\rangle = 1 \qquad \left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$	Bem. 5
Euler-Zahlen (II)	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle = 1 \qquad \left\langle\!\left\langle {n \atop n} \right\rangle\!\right\rangle = 0 \qquad \left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle = (k+1)\left\langle\!\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle\!\right\rangle + (2n-k-1)\left\langle\!\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle\!\right\rangle$	Bem. 6
Stirling-Zahlen (I)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$	Bem. 7
Stirling-Zahlen (II)	$\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1 \qquad \left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$	Bem. 8
Integer-Partitions	$f(1,1) = 1 \qquad f(n,k) = 0$ für $k > n \qquad f(n,k) = f(n-k,k) + f(n,k-1)$	Bem. 9

Bemerkung 1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$

Bemerkung 2 (Zeckendorfs Theorem) *Jede positive natürliche Zahl kann eindeutig als Summe einer oder mehrerer verschiedener* Fibonacci*-Zahlen geschrieben werden, sodass keine zwei aufeinanderfolgenden* Fibonacci*-Zahlen in der Summe vorkommen.*

Lösung: *Greedy, nimm immer die größte* Fibonacci*-Zahl, die noch hineinpasst.*

Bemerkung 3
- *Die erste und dritte angegebene Formel sind relativ sicher gegen Overflows.*
- *Die erste Formel kann auch zur Berechnung der* Catalan*-Zahlen bezüglich eines Moduls genutzt werden.*

Bemerkung 4 *Die* Catalan*-Zahlen geben an:* $C_n =$
- *Anzahl der Binärbäume mit n nicht unterscheidbaren Knoten.*
- *Anzahl der validen Klammerausdrücke mit n Klammerpaaren.*
- *Anzahl der korrekten Klammerungen von $n+1$ Faktoren.*
- *Anzahl der Möglichkeiten ein konvexes Polygon mit $n+2$ Ecken in Dreiecke zu zerlegen.*
- *Anzahl der monotonen Pfade (zwischen gegenüberliegenden Ecken) in einem $n \times n$-Gitter, die nicht die Diagonale kreuzen.*

Bemerkung 5 (Euler-Zahlen 1. Ordnung) *Die Anzahl der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ mit genau k Anstiegen.*

Begründung: Für die n-te Zahl gibt es n mögliche Positionen zum Einfügen. Dabei wird entweder ein Ansteig in zwei gesplitted oder ein Anstieg um n ergänzt.

Bemerkung 6 (Euler-Zahlen 2. Ordnung) *Die Anzahl der Permutationen von $\{1, 1, \ldots, n, n\}$ mit genau k Anstiegen.*

Bemerkung 7 (Stirling-Zahlen 1. Ordnung) *Die Anzahl der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ mit genau k Zyklen.*

Begründung: Es gibt zwei Möglichkeiten für die n-te Zahl. Entweder sie bildet einen eigene Zyklus, oder sie kann an jeder Position in jedem Zyklus einsortiert werden.

Bemerkung 8 (Stirling-Zahlen 2. Ordnung) *Die Anzahl der Möglichkeiten n Elemente in k nichtleere Teilmengen zu zerlegen.*

Begründung: Es gibt k Möglichkeiten die n in eine $n-1$-Partition einzuordnen. Dazu kommt der Fall, dass die n in ihrer eigenen Teilmenge (alleine) steht.

Bemerkung 9 *Anzahl der Teilmengen von $\mathbb{N}$, die sich zu n aufaddieren mit maximalem Elment $\leq k$.*

4.10.2 Verschiedenes

Türme von Hanoi, minimale Schirttzahl:	$T_n = 2^n - 1$
#Regionen zwischen n Gearden	$n(n+1)/2 + 1$
#Abgeschlossene Regionen zwischen n Geraden	$\left(n^2 - 3n + 2\right)/2$
#Markierte, gewurzelte Bäume	n^{n-1}
#Markierte, nicht gewurzelte Bäume	n^{n-2}

4.11 Satz von Sprague-Grundy

Weise jedem Zustand X wie folgt eine Grundy-Zahl $g(X)$ zu:

$$g(X) := \min\left\{\mathbb{Z}_0^+ \setminus \{g(Y) \mid Y \text{ von } X \text{ aus direkt erreichbar}\}\right\}$$

X ist genau dann gewonnen, wenn $g(X) > 0$ ist.

Wenn man k Spiele in den Zuständen $X_1, \ldots, X_k$ hat, dann ist die Grundy-Zahl des Gesamtzustandes $g(X_1) \oplus \ldots \oplus g(X_k)$.

```
// Laufzeit: O(#game)
bool WinNimm(vector<int> game) {
  int result = 0;
  for(int s: game) result ^= s;
  return s > 0;
}
```

4.12 3D-Kugeln

```
// Great Cirlce Distance mit Längen- und Breitengrad.
double gcDist(double pLat, double pLon, double qLat, double qLon, double radius) {
  pLat *= PI / 180; pLon *= PI / 180; qLat *= PI / 180; qLon *= PI / 180;
  return radius * acos(cos(pLat) * cos(pLon) * cos(qLat) * cos(qLon) +
                       cos(pLat) * sin(pLon) * cos(qLat) * sin(qLon) +
                       sin(pLat) * sin(qLat));
}

// Great Cirlce Distance mit kartesischen Koordinaten.
double gcDist(point p, point q) {
  return acos(p.x * q.x + p.y * q.y + p.z * q.z);
}

// 3D Punkt in kartesischen Koordinaten.
struct point{
  double x, y, z;
  point() {}
  point(double x, double y, double z) : x(x), y(y), z(z) {}
  point(double lat, double lon) {
    lat *= PI / 180.0; lon *= PI / 180.0;
    x = cos(lat) * sin(lon); y = cos(lat) * cos(lon); z = sin(lat);
  }
};
```

4.13 Big Integers

```
// Bislang keine Division. Multiplikation nach Schulmethode.
#define PLUS  0
#define MINUS 1
#define BASE  1000000000

struct bigint {
  int sign;
  vector<ll> digits;

  // Initialisiert mit 0.
  bigint(void) {
    sign = PLUS;
  }

  // Initialisiert mit kleinem Wert.
  bigint(ll value) {
    if (value == 0) sign = PLUS;
    else {
      sign = value >= 0 ? PLUS : MINUS;
      value = abs(value);
      while (value) {
        digits.push_back(value % BASE);
        value /= BASE;
```

```
      }
    }
  }

  // Initialisiert mit C-String. Kann nicht mit Vorzeichen umgehen.
  bigint(char *str, int length) {
    int base = 1;
    ll digit = 0;
    for (int i = length - 1; i >= 0; i--) {
      digit += base * (str[i] - '0');
      if (base * 10 == BASE) {
        digits.push_back(digit);
        digit = 0;
        base = 1;
      } else base *= 10;
    }
    if (digit != 0) digits.push_back(digit);
    sign = PLUS;
  }

  // Löscht führende Nullen und macht -0 zu 0.
  void trim() {
    while (digits.size() > 0 && digits[digits.size() - 1] == 0) digits.pop_back();
    if (digits.size() == 0 && sign == MINUS) sign = PLUS;
  }

  // Gibt die Zahl aus.
  void print() {
    if (digits.size() == 0) {
      printf("0");
      return;
    }
    if (sign == MINUS) printf("-");
    printf("%lld", digits[digits.size() - 1]);
    for (int i = digits.size() - 2; i >= 0; i--) {
      printf("%09lld", digits[i]);
    }
  }
};

// Kleiner-oder-gleich-Vergleich.
bool operator<=(bigint &a, bigint &b) {
  if (a.digits.size() == b.digits.size()) {
    int idx = a.digits.size() - 1;
    while (idx >= 0) {
      if (a.digits[idx] < b.digits[idx]) return true;
      else if (a.digits[idx] > b.digits[idx]) return false;
      idx--;
    }
    return true;
  }
  return a.digits.size() < b.digits.size();
}

// Kleiner-Vergeleich.
bool operator<(bigint &a, bigint &b) {
  if (a.digits.size() == b.digits.size()) {
    int idx = a.digits.size() - 1;
    while (idx >= 0) {
      if (a.digits[idx] < b.digits[idx]) return true;
      else if (a.digits[idx] > b.digits[idx]) return false;
      idx--;
    }
    return false;
  }
  return a.digits.size() < b.digits.size();
}

void sub(bigint *a, bigint *b, bigint *c);

// a+b=c. a, b, c dürfen gleich sein.
void add(bigint *a, bigint *b, bigint *c) {
  if (a->sign == b->sign) c->sign = a->sign;
  else {
```

```
    if (a->sign == MINUS) {
      a->sign ^= 1;
      sub(b, a, c);
      a->sign ^= 1;
    } else {
      b->sign ^= 1;
      sub(a, b, c);
      b->sign ^= 1;
    }
    return;
  }

  c->digits.resize(max(a->digits.size(), b->digits.size()));
  ll carry = 0;
  int i = 0;
  for (; i < (int)min(a->digits.size(), b->digits.size()); i++) {
    ll sum = carry + a->digits[i] + b->digits[i];
    c->digits[i] = sum % BASE;
    carry = sum / BASE;
  }
  if (i < (int)a->digits.size()) {
    for (; i< (int)a->digits.size(); i++) {
      ll sum = carry + a->digits[i];
      c->digits[i] = sum % BASE;
      carry = sum / BASE;
    }
  } else {
    for (; i< (int)b->digits.size(); i++) {
      ll sum = carry + b->digits[i];
      c->digits[i] = sum % BASE;
      carry = sum / BASE;
    }
  }
  if (carry) {
    c->digits.push_back(carry);
  }
}

// a-b=c. c darf a oder b sein. a und b müssen verschieden sein.
void sub(bigint *a, bigint *b, bigint *c) {
  if (a->sign == MINUS || b->sign == MINUS) {
    b->sign ^= 1;
    add(a, b, c);
    b->sign ^= 1;
    return;
  }

  if (a < b) {
    sub(b, a, c);
    c->sign = MINUS;
    c->trim();
    return;
  }

  c->digits.resize(a->digits.size());
  ll borrow = 0;
  int i = 0;
  for (; i < (int)b->digits.size(); i++) {
    ll diff = a->digits[i] - borrow - b->digits[i];
    if (a->digits[i] > 0) borrow = 0;
    if (diff < 0) {
      diff += BASE;
      borrow = 1;
    }
    c->digits[i] = diff % BASE;
  }
  for (; i < (int)a->digits.size(); i++) {
    ll diff = a->digits[i] - borrow;
    if (a->digits[i] > 0) borrow = 0;
    if (diff < 0) {
      diff += BASE;
      borrow = 1;
    }
    c->digits[i] = diff % BASE;
```

```
  }
  c->trim();
}

// Ziffernmultiplikation a*b=c. b und c dürfen gleich sein. a muss kleiner BASE sein.
void digitMul(ll a, bigint *b, bigint *c) {
  if (a == 0) {
    c->digits.clear();
    c->sign = PLUS;
    return;
  }
  c->digits.resize(b->digits.size());
  ll carry = 0;
  for (int i = 0; i < (int)b->digits.size(); i++) {
    ll prod = carry + b->digits[i] * a;
    c->digits[i] = prod % BASE;
    carry = prod / BASE;
  }
  if (carry) c->digits.push_back(carry);
  c->sign = (a > 0) ? b->sign : 1 ^ b->sign;
  c->trim();
}

// Zifferndivision b/a=c. b und c dürfen gleich sein. a muss kleiner BASE sein.
void digitDiv(ll a, bigint *b, bigint *c) {
  c->digits.resize(b->digits.size());
  ll carry = 0;
  for (int i = (int)b->digits.size() - 1; i>= 0; i--) {
    ll quot = (carry * BASE + b->digits[i]) / a;
    carry = carry * BASE + b->digits[i] - quot * a;
    c->digits[i] = quot;
  }
  c->sign = b->sign ^ (a < 0);
  c->trim();
}

// a*b=c. c darf weder a noch b sein. a und b dürfen gleich sein.
void mult(bigint *a, bigint *b, bigint *c) {
  bigint row = *a;
  bigint tmp;
  c->digits.clear();
  for (int i = 0; i < (int)b->digits.size(); i++) {
    digitMul(b->digits[i], &row, &tmp);
    add(&tmp, c, c);
    row.digits.insert(row.digits.begin(), 0);
  }
  c->sign = a->sign != b->sign;
  c->trim();
}

// Berechnet eine kleine Zehnerpotenz.
inline ll pow10(int n) {
  ll res = 1;
  for (int i = 0; i < n; i++) res *= 10;
  return res;
}

// Berechnet eine große Zehnerpotenz.
void power10(ll e, bigint *out) {
  out->digits.assign(e / 9 + 1, 0);
  if (e % 9) out->digits[out->digits.size() - 1] = pow10(e % 9);
  else out->digits[out->digits.size() - 1] = 1;
}

// Nimmt eine Zahl module einer Zehnerpotenz 10^e.
void mod10(int e, bigint *a) {
  int idx = e / 9;
  if ((int)a->digits.size() < idx + 1) return;
  if (e % 9) {
    a->digits.resize(idx + 1);
    a->digits[idx] %= pow10(e % 9);
  } else {
    a->digits.resize(idx);
  }
```

```
  a->trim();
}
```

5 Strings

5.1 Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus

```
// Laufzeit: O(n + m), n = #Text, m = #Pattern
vector<int> kmp_preprocessing(string &sub) {
  vector<int> b(sub.length() + 1);
  b[0] = -1;
  int i = 0, j = -1;
  while (i < (int)sub.length()) {
    while (j >= 0 && sub[i] != sub[j]) j = b[j];
    i++; j++;
    b[i] = j;
  }
  return b;
}

vector<int> kmp_search(string &s, string &sub) {
  vector<int> pre = kmp_preprocessing(sub);
  vector<int> result;
  int i = 0, j = 0;
  while (i < (int)s.length()) {
    while (j >= 0 && s[i] != sub[j]) j = pre[j];
    i++; j++;
    if (j == (int)sub.length()) {
      result.push_back(i - j);
      j = pre[j];
    }
  }
  return result;
}
```

5.2 Aho-Corasick-Automat

```
// Laufzeit: O(n + m + z), n = Suchstringlänge, m = Summe der Patternlängen, z = #Matches
// Findet mehrere Patterns gleichzeitig in einem String.
// 1) Wurzel erstellen: vertex *automaton = new vertex();
// 2) Mit addString(automaton, s, idx); Patterns hinzufügen.
// 3) finishAutomaton(automaton) aufrufen.
// 4) Mit automaton = go(automaton, c) in nächsten Zustand wechseln. DANACH: Wenn patterns-Vektor nicht leer
//    ist: Hier enden alle enthaltenen Patterns.
// ACHTUNG: Die Zahlenwerte der auftretenden Buchstaben müssen zusammenhängend sein und bei 0 beginnen!
struct vertex {
  vertex *next[ALPHABET_SIZE], *failure;
  char character;
  vector<int> patterns; // Indizes der Patterns, die hier enden.
  vertex() { for (int i = 0; i < ALPHABET_SIZE; i++) next[i] = NULL; }
};

void addString(vertex *v, string &pattern, int patternIdx) {
  for (int i = 0; i < (int)pattern.length(); i++) {
    if (!v->next[(int)pattern[i]]) {
      vertex *w = new vertex();
      w->character = pattern[i];
      v->next[(int)pattern[i]] = w;
    }
    v = v->next[(int)pattern[i]];
  }
  v->patterns.push_back(patternIdx);
}

void finishAutomaton(vertex *v) {
  for (int i = 0; i < ALPHABET_SIZE; i++)
    if (!v->next[i]) v->next[i] = v;

```

```
  queue<vertex*> q;
  for (int i = 0; i < ALPHABET_SIZE; i++) {
    if (v->next[i] != v) {
      v->next[i]->failure = v;
      q.push(v->next[i]);
  }}
  while (!q.empty()) {
    vertex *r = q.front(); q.pop();
    for (int i = 0; i < ALPHABET_SIZE; i++) {
      if (r->next[i]) {
        q.push(r->next[i]);
        vertex *f = r->failure;
        while (!f->next[i]) f = f->failure;
        r->next[i]->failure = f->next[i];
        for (int j = 0; j < (int)f->next[i]->patterns.size(); j++) {
          r->next[i]->patterns.push_back(f->next[i]->patterns[j]);
}}}}}

vertex* go(vertex *v, char c) {
  if (v->next[(int)c]) return v->next[(int)c];
  else return go(v->failure, c);
}
```

5.3 Levenshtein-Distanz

```
// Laufzeit: O(nm), Speicher: O(m), n = #s1, m = #s2
int levenshtein(string& s1, string& s2) {
  int len1 = s1.size(), len2 = s2.size();
  vector<int> col(len2 + 1), prevCol(len2 + 1);
  for (int i = 0; i < len2 + 1; i++) prevCol[i] = i;
  for (int i = 0; i < len1; i++) {
    col[0] = i + 1;
    for (int j = 0; j < len2; j++)
      col[j+1] = min(min(prevCol[j+1] + 1, col[j] + 1), prevCol[j] + (s1[i]==s2[j] ? 0 : 1));
    col.swap(prevCol);
  }
  return prevCol[len2];
}
```

5.4 Trie

```
// Implementierung für Kleinbuchstaben.
struct node {
  node *(e)[26];
  int c = 0; // Anzahl der Wörter, die an diesem node enden.
  node() { for(int i = 0; i < 26; i++) e[i] = NULL; }
};

void insert(node *root, string &txt, int s) { // Laufzeit: O(|txt|)
  if(s == (int)txt.size()) root->c++;
  else {
    int idx = (int)(txt[s] - 'a');
    if(root->e[idx] == NULL) root->e[idx] = new node();
    insert(root->e[idx], txt, s+1);
  }
}

int contains(node *root, string &txt, int s) { // Laufzeit: O(|txt|)
  if(s == txt.size()) return root->c;
  int idx = (int)(txt[s] - 'a');
  if(root->e[idx] != NULL) return contains(root->e[idx], txt, s + 1);
  else return 0;
}
```

5.5 Suffix-Array

```
//longest common substring in one string (overlapping not excluded)
//contains suffix array:--------------------------------------------------------------
int cmp(string &s,vector<vector<int>> &v, int i, int vi, int u, int l) {
  int vi2 = (vi + 1) % 2, u2 = u + i / 2, l2 = l + i / 2;
  if(i == 1) return s[u] - s[l];
  else if (v[vi2][u] != v[vi2][l]) return (v[vi2][u] - v[vi2][l]);
  else { //beide groesser tifft nicht mehr ein, da ansonsten vorher schon unterschied in Laenge
    if(u2 >= s.length()) return -1;
    else if(l2 >= s.length()) return 1;
    else return v[vi2][u2] - v[vi2][l2];
  }
}

string lcsub(string s) {
  if(s.length() == 0) return "";
  vector<int> a(s.length());
  vector<vector<int>> v(2, vector<int>(s.length(), 0));
  int vi = 0;
  for(int k = 0; k < a.size(); k++) a[k] = k;
  for(int i = 1; i <= s.length(); i *= 2, vi = (vi + 1) % 2) {
    sort(a.begin(), a.end(), [&] (const int &u, const int &l) {
      return cmp(s, v, i, vi, u, l) < 0;
    });
    v[vi][a[0]] = 0;
    for(int z = 1; z < a.size(); z++) v[vi][a[z]] = v[vi][a[z-1]] + (cmp(s, v, i, vi, a[z], a[z-1]) == 0 ? 0 : 1);
  }
//-------------------------------------------------------------------------------------
  int r = 0, m=0, c=0;
  for(int i = 0; i < a.size() - 1; i++) {
    c = 0;
    while(a[i]+c < s.length() && a[i+1]+c < s.length() && s[a[i]+c] == s[a[i+1]+c]) c++;
    if(c > m) r=i, m=c;
  }
  return m == 0 ? "" : s.substr(a[r], m);
}
```

5.6 Longest Common Substring

```
//longest common substring.
struct lcse {
  int i = 0, s = 0;
};
string lcp(string s[2]) {
  if(s[0].length() == 0 || s[1].length() == 0) return "";
  vector<lcse> a(s[0].length()+s[1].length());
  for(int k = 0; k < a.size(); k++) a[k].i=(k < s[0].length() ? k : k - s[0].length()), a[k].s = (k < s[0].length()
      ? 0 : 1);
  sort(a.begin(), a.end(), [&] (const lcse &u, const lcse &l) {
    int ui = u.i, li = l.i;
    while(ui < s[u.s].length() && li < s[l.s].length()) {
      if(s[u.s][ui] < s[l.s][li]) return true;
      else if(s[u.s][ui] > s[l.s][li]) return false;
      ui++; li++;
    }
    return !(ui < s[u.s].length());
  });
  int r = 0, m=0, c=0;
  for(int i = 0; i < a.size() - 1; i++) {
    if(a[i].s == a[i+1].s) continue;
    c = 0;
    while(a[i].i+c < s[a[i].s].length() && a[i+1].i+c < s[a[i+1].s].length() && s[a[i].s][a[i].i+c] == s[a[i+1].s][a
        [i+1].i+c]) c++;
    if(c > m) r=i, m=c;
  }
  return m == 0 ? "" : s[a[r].s].substr(a[r].i, m);
}
```

5.7 Longest Common Subsequence

```
string lcss(string &a, string &b) {
  int m[a.length() + 1][b.length() + 1], x=0, y=0;
  memset(m, 0, sizeof(m));
  for(int y = a.length() - 1; y >= 0; y--) {
    for(int x = b.length() - 1; x >= 0; x--) {
      if(a[y] == b[x]) m[y][x] = 1 + m[y+1][x+1];
      else m[y][x] = max(m[y+1][x], m[y][x+1]);
    }
  } //for length only: return m[0][0];
  string res;
  while(x < b.length() && y < a.length()) {
    if(a[y] == b[x]) res += a[y++], x++;
    else if(m[y][x+1] > m[y+1][x+1]) x++;
    else y++;
  }
  return res;
}
```

6 Java

6.1 Introduction

- Compilen: `javac main.java`
- Ausführen: `java main < sample.in`
- Eingabe: `Scanner` ist sehr langsam. Bei großen Eingaben muss ein Buffered Reader verwendet werden.

```
Scanner in = new Scanner(System.in); // java.util.Scanner
String line = in.nextLine(); // Liest die nächste Zeile.
int num = in.nextInt(); // Liest das nächste Token als int.
double num2 = in.nextDouble(); // Liest das nächste Token als double.
```

- Ausgabe:

```
// Ausgabe in StringBuilder schreiben und am Ende alles auf einmal ausgeben. -> Viel schneller.
StringBuilder sb = new StringBuilder(); // java.lang.StringBuilder
sb.append("Hallo Welt");
System.out.print(sb.toString());
```

6.2 BigInteger

```
// Berechnet this +,*,/,- val.
BigInteger add(BigInteger val), multiply(BigInteger val), divide(BigInteger val), substract(BigInteger val)

// Berechnet this^e.
BigInteger pow(BigInteger e)

// Bit-Operationen.
BigInteger and(BigInteger val), or(BigInteger val), xor(BigInteger val), not(), shiftLeft(int n), shiftRight(int n)

// Berechnet den ggT von abs(this) und abs(val).
BigInteger gcd(BigInteger val)

// Berechnet this mod m, this^-1 mod m, this^e mod m.
BigInteger mod(BigInteger m), modInverse(BigInteger m), modPow(BigInteger e, BigInteger m)

// Berechnet die nächste Zahl, die größer und wahrscheinlich prim ist.
BigInteger  nextProbablePrime()

// Berechnet int/long/float/double-Wert. Ist die Zahl zu großen werden die niedrigsten Bits konvertiert.
int intValue(), long longValue(), float floatValue(), double doubleValue()
```

7 Sonstiges

7.1 2-SAT

1. Bedingungen in 2-CNF formulieren.

2. Implikationsgraph bauen, $(a \lor b)$ wird zu $\neg a \Rightarrow b$ und $\neg b \Rightarrow a$.
3. Finde die starken Zusammenhangskomponenten.
4. Genau dann lösbar, wenn keine Variable mit ihrer Negation in einer SCC liegt.

7.2 Zeileneingabe

```
vector<string> split(string &s, string delim) { // Zerlegt s anhand aller Zeichen in delim.
  vector<string> result; char *token;
  token = strtok((char*)s.c_str(), (char*)delim.c_str());
  while (token != NULL) {
    result.push_back(string(token));
    token = strtok(NULL, (char*)delim.c_str());
  }
  return result;
}
```

7.3 Bit Operations

```
// Bit an Position j auslesen.
(a & (1 << j)) != 0
// Bit an Position j setzen.
a |= (1 << j)
// Bit an Position j löschen.
a &= ~(1 << j)
// Bit an Position j umkehren.
a ^= (1 << j)
// Wert des niedrigsten gesetzten Bits.
(a & -a)
// Setzt alle Bits auf 1.
a = -1
// Setzt die ersten n Bits auf 1. Achtung: Overflows.
a = (1 << n) - 1
```

7.4 Josephus-Problem

n Personen im Kreis, jeder k-te wird erschossen.

Spezialfall $k = 2$: Betrachte Binärdarstellung von n. Für $n = 1b_1b_2b_3..b_n$ ist $b_1b_2b_3..b_n1$ die Position des letzten Überlebenden. (Rotiere n um eine Stelle nach links)

```
int rotateLeft(int n) { // Gibt Index des letzten Überlebenden zurück, 1-basiert.
  for (int i = 31; i >= 0; i--)
    if (n & (1 << i)) {
      n &= ~(1 << i);
      break;
    }
  n <<= 1; n++; return n;
}
```

Allgemein: Sei $F(n,k)$ die Position des letzten Überlebenden. Nummeriere die Personen mit $0, 1, \dots, n-1$. Nach Erschießen der k-ten Person, hat der Kreis noch Größe $n-1$ und die Position des Überlebenden ist jetzt $F(n-1,k)$. Also: $F(n,k) = (F(n-1,k)+k)\%n$. Basisfall: $F(1,k) = 0$.

```
int josephus(int n, int k) { // Gibt Index des letzten Überlebenden zurück, 0-basiert.
  if (n == 1) return 0;
  return (josephus(n - 1, k) + k) % n;
}
```

Beachte bei der Ausgabe, dass die Personen im ersten Fall von $1, \dots, n$ nummeriert sind, im zweiten Fall von $0, \dots, n-1$!

7.5 Gemischtes

- Johnsons *Reweighting Algorithmus:* Füge neue Quelle `s` hinzu, mit Kanten mit Gewicht 0 zu allen Knoten. Nutze Bellmann-Ford zum Betsimmen der Entfernungen `d[i]` von `s` zu allen anderen Knoten. Stoppe, wenn es negative Zyklen gibt. Sonst ändere die gewichte von allen Kanten `(u,v)` im ursprünglichen Graphen zu `d[u]+w[u,v]-d[v]`. Dann sind alle Kantengewichte nichtnegativ, Dijkstra kann angewendet werden.

- Für ein System von Differenzbeschränkungen: Ändere alle Bedingungen in die Form $a - b \leq c$. Für jede Bedingung füge eine Kante `(b,a)` mit Gweicht `c` ein. Füge Quelle `s` hinzu, mit Kanten zu allen Knoten mit Gewicht 0. Nutze Bellmann-Ford, um die kürzesten Pfade von `s` aus zu finden. `d[v]` ist mögliche Lösung für `v`.

- Min-Weight-Vertex-Cover im bipartiten Graph: Partitioniere in `A, B` und füge Kanten `s -> A` mit Gewicht `w(A)` und Kanten `B -> t` mit Gewicht `w(B)` hinzu. Füge Kanten mit Kapazität ∞ von `A` nach `B` hinzu, wo im originalen Graphen Kanten waren. Max-Flow ist die Lösung.
  Im Residualgraphen:
  - Das Vertex-Cover sind die Knoten inzident zu den Brücken. *oder*
  - Die Knoten in `A`, die *nicht* von `s` erreichber sind und die Knoten in `B`, die von `erreichber` sind.

- Allgemeiner Graph: Das Komplement eines Vertex-Cover ist ein Independent Set. $\Rightarrow$ Max Weight Independent Set ist Komplement von Min Weight Vertex Cover.

- Bipartiter Graph: Min Vertex Cover (kleinste Menge Kanten, die alle Knoten berühren) = Max Matching.

- Bipartites Matching mit Gewichten auf linken Knoten. Minimiere Matchinggewicht. Lösung: Sortiere Knoten links aufsteigend nach Gewicht, danach nutze normlen Algorithmus (Kuhn, Seite 11)

- **Tobi, cool down!**

7.6 Sonstiges

```
// Alles-Header.
#include <bits/stdc++.h>

// Setzt das deutsche Tastaturlayout.
setxkbmap de

// Schnelle Ein-/Ausgabe mit cin/cout.
ios::sync_with_stdio(false);

// Set mit eigener Sortierfunktion. Typ muss nicht explizit angegeben werden.
set<point2, decltype(comp)> set1(comp);

// PI
#define PI (2*acos(0))

// STL-Debugging, Compiler flags.
-D_GLIBCXX_DEBUG
#define _GLIBCXX_DEBUG

// 128-Bit Integer. Muss zum Einlesen/Ausgeben in einen int oder long long gecastet werden.
__int128
```