

Team Contest Reference

ChaosKITs
Karlsruhe Institute of Technology

25. November 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Datenstrukturen	2	4 Mathe	11
1.1 Union-Find	2	4.1 ggT, kgV, erweiterter euklidischer Algorithmus	11
1.2 Segmentbaum	2	4.1.1 Multiplikatives Inverses von x in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	12
1.3 Range Minimum Query	2	4.2 Primzahlsieb von Eratosthenes	12
1.4 STL-Tree	3	4.2.1 Faktorisierung	12
2 Graphen	3	4.2.2 Mod-Exponent über \mathbb{F}_p	13
2.1 Minimale Spannbäume	3	4.3 LGS über \mathbb{F}_p	13
2.2 Kürzeste Wege	3	4.4 Binomialkoeffizienten	13
2.2.1 Algorithmus von DIJKSTRA	3	4.5 Satz von SPRAGUE-GRUNDY	13
2.2.2 BELLMANN-FORD-Algorithmus	4	4.6 Maximales Teilfeld	14
2.2.3 FLOYD-WARSHALL-Algorithmus	4	4.7 Kombinatorik	14
2.3 Strongly Connected Components (TARJANS-Algorithmus)	4	4.7.1 Berühmte Zahlen	14
2.4 Artikulationspunkte und Brücken	5	4.7.2 Verschiedenes	15
2.5 Eulertouren	6	5 Strings	15
2.6 Lowest Common Ancestor	7	5.1 KNUTH-MORRIS-PRATT-Algorithmus	15
2.7 Max-Flow (EDMONDS-KARP-Algorithmus)	7	5.2 Trie	15
2.7.1 Maximum Edge Disjoint Paths	8	5.3 Suffix-Array	16
2.7.2 Maximum Independent Paths	8	5.4 Longest Common Substring	16
2.8 Maximal Cardinatlity Bipartite Mathcing	8	5.5 Longest Common Subsequence	17
3 Geometrie	8	6 Java	17
3.1 Closest Pair	8	6.1 Introduction	17
3.2 Geraden	9	6.2 BigInteger	17
3.3 Konvexe Hülle	9	7 Sonstiges	18
3.4 Formeln - std::complex	10	7.1 2-SAT	18
		7.2 Sortieren in Linearzeit	18
		7.2.1 Bucketsort	18
		7.2.2 LSD-Radixsort	18

1 Datenstrukturen

1.1 Union-Find

```

1 vector<int> parent, rank2; //manche Compiler verbieten Variable mit Namen rank
2
3 int findSet(int n) { //Pfadkompression
4     if (parent[n] != n) parent[n] = findSet(parent[n]);
5     return parent[n];
6 }
7
8 void linkSets(int a, int b) { //union by rank
9     if (rank2[a] < rank2[b]) parent[a] = b;
10    else if (rank2[b] < rank2[a]) parent[b] = a;
11    else {
12        parent[a] = b;
13        rank2[b]++;
14    }
15 }
16
17 void unionSets(int a, int b) {
18     if (findSet(a) != findSet(b)) linkSets(findSet(a), findSet(b));
19 }

```

1.2 Segmentbaum

```

1 int a[MAX_N], m[4 * MAX_N];
2
3 int query(int x, int y, int k = 0, int X = 0, int Y = MAX_N - 1) {
4     if (x <= X && Y <= y) return m[k];
5     if (y < X || Y < x) return -1000000000; //ein "neutrales" Element
6     int M = (X + Y) / 2;
7     return max(query(x, y, 2 * k + 1, X, M), query(x, y, 2 * k + 2, M + 1, Y));
8 }
9
10 void update(int i, int v, int k = 0, int X = 0, int Y = MAX_N - 1) {
11     if (i < X || Y < i) return;
12     if (X == Y) {
13         m[k] = v;
14         a[i] = v;
15         return;
16     }
17     int M = (X + Y) / 2;
18     update(i, v, 2 * k + 1, X, M);
19     update(i, v, 2 * k + 2, M + 1, Y);
20     m[k] = max(m[2 * k + 1], m[2 * k + 2]);
21 }
22
23 void init(int k = 0, int X = 0, int Y = MAX_N - 1) {
24     if (X == Y) {
25         m[k] = a[X];
26         return;
27     }
28     int M = (X + Y) / 2;
29     init(2 * k + 1, X, M);
30     init(2 * k + 2, M + 1, Y);
31     m[k] = max(m[2 * k + 1], m[2 * k + 2]);
32 }

```

1.3 Range Minimum Query

```

1 vector<int> data(RMQ_SIZE);
2 vector<vector<int>> rmq(floor(log2(RMQ_SIZE)) + 1, vector<int>(RMQ_SIZE));
3
4 void initRMQ() {

```

```

5   for(int i = 0, s = 1, ss = 1; s <= RMQ_SIZE; ss=s, s*=2, i++) {
6       for(int l = 0; l + s <= RMQ_SIZE; l++) {
7           if(i == 0) rmq[0][l] = 1;
8           else {
9               int r = l + ss;
10              rmq[i][l] = (data[rmq[i-1][l]] <= data[rmq[i-1][r]] ? rmq[i-1][l] : rmq[i-1][r]);
11          }
12      }
13  }
14 }
15 //returns index of minimum! [a, b)
16 int queryRMQ(int l, int r) {
17     if(l >= r) return l;
18     int s = floor(log2(r-l)); r = r - (1 << s);
19     return (data[rmq[s][l]] <= data[rmq[s][r]] ? rmq[s][l] : rmq[s][r]);
20 }

```

1.4 STL-Tree

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
3 #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
4 using namespace std; using namespace __gnu_pbds;
5 typedef tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag, tree_order_statistics_node_update> Tree;
6 int main() {
7     Tree X;
8     for (int i = 1; i <= 16; i <= 1) X.insert(i); // {1, 2, 4, 8, 16}
9     cout << *X.find_by_order(3) << endl; // => 8
10    cout << X.order_of_key(10) << endl; // => 4 = successor of 10 = min i such that X[i] >= 10
11    return 0;
12 }

```

2 Graphen

2.1 Minimale Spannbäume

Benutze Algorithmus von KRUSKAL oder Algorithmus von PRIM.

Schnitteigenschaft Für jeden Schnitt C im Graphen gilt: Gibt es eine Kante e , die echt leichter ist als alle anderen Schnittkanten, so gehört diese zu allen minimalen Spannbäumen. (\Rightarrow Die leichteste Kante in einem Schnitt kann in einem minimalen Spannbaum verwendet werden.)

Kreiseigenschaft Für jeden Kreis K im Graphen gilt: Die schwerste Kante auf dem Kreis ist nicht Teil des minimalen Spannbau.

2.2 Kürzeste Wege

2.2.1 Algorithmus von DIJKSTRA

Kürzeste Pfade in Graphen ohne negative Kanten.

```

1 priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii> > pq;
2 vector<int> dist;
3 dist.assign(NUM_VERTICES, INF);
4 dist[0] = 0;
5 pq.push(ii(0, 0));
6
7 while (!pq.empty()) {
8     ii front = pq.top(); pq.pop();
9     int curNode = front.second, curDist = front.first;
10
11     if (curDist > dist[curNode]) continue;
12
13     for (int i = 0; i < (int)adjlist[curNode].size(); i++) {
14         int nextNode = adjlist[curNode][i].first, nextDist = curDist + adjlist[curNode][i].second;
15     }

```

```

16         if (nextDist < dist[nextNode]) {
17             dist[nextNode] = nextDist; pq.push(ii(nextDist, nextNode));
18         }
19     }
20 }

```

2.2.2 BELLMANN-FORD-Algorithmus

Kürzestes Pfade in Graphen mit negativen Kanten. Erkennt negative Zyklen.

```

1 //n = number of vertices, edges is vector of edges
2 dist.assign(n, INF); dist[0] = 0;
3 parent.assign(n, -1);
4 for (i = 0; i < n - 1; i++) {
5     for (j = 0; j < (int)edges.size(); j++) {
6         if (dist[edges[j].from] + edges[j].cost < dist[edges[j].to]) {
7             dist[edges[j].to] = dist[edges[j].from] + edges[j].cost;
8             parent[edges[j].to] = edges[j].from;
9         }
10    }
11 }
12 //now dist and parent are correct shortest paths
13 //next lines check for negative cycles
14 for (j = 0; j < (int)edges.size(); j++) {
15     if (dist[edges[j].from] + edges[j].cost < dist[edges[j].to]) {
16         //NEGATIVE CYCLE found
17     }
18 }

```

2.2.3 FLOYD-WARSHALL-Algorithmus

Alle kürzesten Pfade im Graphen.

```

1 //initialize adjmat, adjmat[i][i] = 0, adjmat[i][j] = INF if no edge is between i and j, length otherwise
2 for (k = 0; k < MAX_V; k++) {
3     for (i = 0; i < MAX_V; i++) {
4         for (j = 0; j < MAX_V; j++) {
5             if (adjmat[i][k] + adjmat[k][j] < adjmat[i][j]) adjmat[i][j] = adjmat[i][k] + adjmat[k][j];
6         }
7     }
8 }

```

2.3 Strongly Connected Components (TARJANS-Algorithmus)

```

1 int counter, sccCounter, n; //n == number of vertices
2 vector<bool> visited, inStack;
3 vector< vector<int> > adjlist;
4 vector<int> d, low, sccs;
5 stack<int> s;
6
7 void visit(int v) {
8     visited[v] = true;
9     d[v] = counter;
10    low[v] = counter;
11    counter++;
12    inStack[v] = true;
13    s.push(v);
14
15    for (int i = 0; i < (int)adjlist[v].size(); i++) {
16        int u = adjlist[v][i];
17        if (!visited[u]) {
18            visit(u);
19            low[v] = min(low[v], low[u]);
20        } else if (inStack[u]) {
21            low[v] = min(low[v], low[u]);
22        }
23    }
24 }

```

```

23     }
24
25     if (d[v] == low[v]) {
26         int u;
27         do {
28             u = s.top();
29             s.pop();
30             inStack[u] = false;
31             sccs[u] = sccCounter;
32         } while(u != v);
33         sccCounter++;
34     }
35 }
36
37 void scc() {
38     //read adjlist
39
40     visited.clear(); visited.assign(n, false);
41     d.clear(); d.resize(n);
42     low.clear(); low.resize(n);
43     inStack.clear(); inStack.assign(n, false);
44     sccs.clear(); sccs.resize(n);
45
46     counter = 0;
47     sccCounter = 0;
48     for (i = 0; i < n; i++) {
49         if (!visited[i]) {
50             visit(i);
51         }
52     }
53     //sccs has the component for each vertex
54 }

```

2.4 Artikulationspunkte und Brücken

```

1  vector< vector<int> > adjlist;
2  vector<int> low;
3  vector<int> d;
4  vector<bool> isArtPoint;
5  vector< vector<int> > bridges; //nur fuer Bruecken
6  int counter = 0;
7
8  void visit(int v, int parent) {
9      d[v] = low[v] = ++counter;
10     int numVisits = 0, maxlow = 0;
11
12     for (vector<int>::iterator vit = adjlist[v].begin(); vit != adjlist[v].end(); vit++) {
13         if (d[*vit] == 0) {
14             numVisits++;
15             visit(*vit, v);
16             if (low[*vit] > maxlow) {
17                 maxlow = low[*vit];
18             }
19
20             if (low[*vit] > d[v]) { //nur fuer Bruecken
21                 bridges[v].push_back(*vit); bridges[*vit].push_back(v);
22             }
23
24             low[v] = min(low[v], low[*vit]);
25         } else {
26             if (d[*vit] < low[v]) {
27                 low[v] = d[*vit];
28             }
29         }
30     }
31
32     if (parent == -1) {
33         if (numVisits > 1) isArtPoint[v] = true;
34     } else {

```

```

35     if (maxlow >= d[v]) isArtPoint[v] = true;
36 }
37 }
38
39 void findArticulationPoints() {
40     low.clear(); low.resize(adjlist.size());
41     d.clear(); d.assign(adjlist.size(), 0);
42     isArtPoint.clear(); isArtPoint.assign(adjlist.size(), false);
43     bridges.clear(); isBridge.resize(adjlist.size()); //nur fuer Bruecken
44     for (int v = 0; v < (int)adjlist.size(); v++) {
45         if (d[v] == 0) visit(v, -1);
46     }
47 }

```

2.5 Eulertouren

- Zyklus existiert, wenn jeder Knoten geraden Grad hat (ungerichtet), bzw. bei jedem Knoten Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen (gerichtet).
- Pfad existiert, wenn alle bis auf (maximal) zwei Knoten geraden Grad haben (ungerichtet), bzw. bei allen Knoten bis auf zwei Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen, wobei einer eine Ausgangskante mehr hat (Startknoten) und einer eine Eingangskante mehr hat (Endknoten).
- **Je nach Aufgabenstellung überprüfen, wie isolierte Punkte interpretiert werden sollen.**
- Der Code unten läuft in Linearzeit. Wenn das nicht notwendig ist (oder bestimmte Sortierungen verlangt werden), gehts mit einem set einfacher.

```

1 VISIT(v):
2     forall e=(v,w) in E
3         delete e from E
4     VISIT(w)
5     print e

```

Abbildung 1: Idee für Eulerzyklen

```

1 vector< vector<int> > adjlist;
2 vector< vector<int> > otherIdx;
3 vector<int> cycle;
4 vector<int> validIdx;
5
6 void swapEdges(int n, int a, int b) { // Vertauscht Kanten mit Indizes a und b von Knoten n.
7     int neighA = adjlist[n][a];
8     int neighB = adjlist[n][b];
9     int idxNeighA = otherIdx[n][a];
10    int idxNeighB = otherIdx[n][b];
11    swap(adjlist[n][a], adjlist[n][b]);
12    swap(otherIdx[n][a], otherIdx[n][b]);
13    otherIdx[neighA][idxNeighA] = b;
14    otherIdx[neighB][idxNeighB] = a;
15 }
16
17 void removeEdge(int n, int i) { // Entfernt Kante i von Knoten n (und die zugehoerige Rueckwaerts-kante).
18     int other = adjlist[n][i];
19     if (other == n) { //Schlingen
20         validIdx[n]++;
21         return;
22     }
23     int otherIndex = otherIdx[n][i];
24     validIdx[n]++;
25     if (otherIndex != validIdx[other]) {
26         swapEdges(other, otherIndex, validIdx[other]);
27     }
28     validIdx[other]++;
29 }
30
31 //findet Eulerzyklus an Knoten n startend
32 //teste vorher, dass Graph zusammenhaengend ist! (isolierte Punkte sind ok)

```

```

33 //teste vorher, ob Eulerzyklus ueberhaupt existiert!
34 void euler(int n) {
35     while (validIdx[n] < (int)adjlist[n].size()) {
36         int nn = adjlist[n][validIdx[n]];
37         removeEdge(n, validIdx[n]);
38         euler(nn);
39     }
40     cycle.push_back(n); //Zyklus am Ende in cycle
41 }

```

2.6 Lowest Common Ancestor

```

1 //RMQ muss hinzugefuegt werden!
2 vector<int> visited(2*MAX_N), first(MAX_N, 2*MAX_N), depth(2*MAX_N);
3 vector<vector<int>> graph(MAX_N);
4
5 void initLCA(int gi, int d, int &c) {
6     visited[c] = gi, depth[c] = d, first[gi] = min(c, first[gi]), c++;
7     for(int gn : graph[gi]) {
8         initLCA(gn, d+1, c);
9         visited[c] = gi, depth[c] = d, c++;
10    }
11 }
12 //[a, b]
13 int getLCA(int a, int b) {
14     return visited[queryRMQ(min(first[a], first[b]), max(first[a], first[b]))];
15 }
16 //=> int c = 0; initLCA(0,0,c); initRMQ(); done!

```

2.7 Max-Flow (EDMONDS-KARP-Algorithmus)

```

1 int s, t, f; //source, target, single flow
2 int res[MAX_V][MAX_V]; //adj-matrix
3 vector< vector<int> > adjList;
4 int p[MAX_V]; //bfs spanning tree
5
6 void augment(int v, int minEdge) {
7     if (v == s) { f = minEdge; return; }
8     else if (p[v] != -1) {
9         augment(p[v], min(minEdge, res[p[v]][v]));
10        res[p[v]][v] -= f; res[v][p[v]] += f;
11    }
12 }
13 int maxFlow() { //first initialize res, adjList, s and t
14     int mf = 0;
15     while (true) {
16         f = 0;
17         bitset<MAX_V> vis; vis[s] = true;
18         queue<int> q; q.push(s);
19         memset(p, -1, sizeof(p));
20         while (!q.empty()) { //BFS
21             int u = q.front(); q.pop();
22             if (u == t) break;
23             for (int j = 0; j < (int)adjList[u].size(); j++) {
24                 int v = adjList[u][j];
25                 if (res[u][v] > 0 && !vis[v]) {
26                     vis[v] = true; q.push(v); p[v] = u;
27                 }
28             }
29             augment(t, INF); //add found path to max flow
30             if (f == 0) break;
31             mf += f;
32         }
33     }
34     return mf;
35 }

```

2.7.1 Maximum Edge Disjoint Paths

Finde die maximale Anzahl Pfade von s nach t , die keine Kante teilen.

1. Setze s als Quelle, t als Senke und die Kapazität jeder Kante auf 1.
2. Der maximale Fluss entspricht der unterschiedlichen Pfade ohne gemeinsame Kanten.

2.7.2 Maximum Independent Paths

Finde die maximale Anzahl Pfade von s nach t , die keinen Knoten teilen.

1. Setze s als Quelle, t als Senke und die Kapazität jeder Kante *und jedes Knotens* auf 1.
2. Der maximale Fluss entspricht der unterschiedlichen Pfade ohne gemeinsame Knoten.

2.8 Maximal Cardinality Bipartite Matching

```

1 vector< vector<int> > adjlist;
2 vector<int> pairs; //for every node, stores the matching node on the other side or -1
3 vector<bool> visited;
4
5 bool dfs(int i) {
6     if (visited[i]) return false;
7     visited[i] = true;
8     for (vector<int>::iterator vit = adjlist[i].begin(); vit != adjlist[i].end(); vit++) {
9         if (pairs[*vit] < 0 || dfs(pairs[*vit])) {
10             pairs[*vit] = i; pairs[i] = *vit; return true;
11         }
12     }
13     return false;
14 }
15
16 int kuhn(int n, int m) { // n = nodes on left side (numbered 0..n-1), m = nodes on the right side
17     pairs.assign(n + m, -1);
18     int ans = 0;
19     for (int i = 0; i < n; i++) {
20         visited.assign(n + m, false);
21         ans += dfs(i);
22     }
23     return ans; //size of the MCBM
24 }
```

3 Geometrie

3.1 Closest Pair

```

1 double squaredDist(point a, point b) {
2     return (a.first-b.first) * (a.first-b.first) + (a.second-b.second) * (a.second-b.second);
3 }
4
5 bool compY(point a, point b) {
6     if (a.second == b.second) return a.first < b.first;
7     return a.second < b.second;
8 }
9
10 double shortestDist(vector<point> &points) {
11     //check that points.size() > 1 and that ALL POINTS ARE DIFFERENT
12     set<point, bool(*)>(point, point)> status(compY);
13     sort(points.begin(), points.end());
14     double opt = 1e30, sqrtOpt = 1e15;
15     auto left = points.begin(), right = points.begin();
16     status.insert(*right); right++;
17
18     while (right != points.end()) {
19         if (fabs(left->first - right->first) >= sqrtOpt) {
20             status.erase(*(left++));
21         } else {
```



```

22         auto lower = status.lower_bound(point(-1e20, right->second - sqrtOpt));
23         auto upper = status.upper_bound(point(-1e20, right->second + sqrtOpt));
24         while (lower != upper) {
25             double cand = squaredDist(*right, *lower);
26             if (cand < opt) {
27                 opt = cand;
28                 sqrtOpt = sqrt(opt);
29             }
30             ++lower;
31         }
32         status.insert(*(right++));
33     }
34 }
35 return sqrtOpt;
36 }

```

3.2 Geraden

```

1 struct pt { //complex<double> does not work here, becuae we need to set pt.x and pt.y
2     double x, y;
3     pt() {}
4     pt(double x, double y) : x(x), y(y) {}
5 };
6
7 struct line {
8     double a, b, c; //a*x+b*y+c, b=0 ==> vertical line, b=1 ==> otherwise
9 };
10
11 line pointsToLine(pt p1, pt p2) {
12     line l;
13     if (fabs(p1.x - p2.x) < EPSILON) {
14         l.a = 1; l.b = 0.0; l.c = -p1.x;
15     } else {
16         l.a = -(double)(p1.y - p2.y) / (p1.x - p2.x);
17         l.b = 1.0;
18         l.c = -(double)(l.a * p1.x) - p1.y;
19     }
20     return l;
21 }
22
23 bool areParallel(line l1, line l2) {
24     return (fabs(l1.a - l2.a) < EPSILON) && (fabs(l1.b - l2.b) < EPSILON);
25 }
26
27 bool areSame(line l1, line l2) {
28     return areParallel(l1, l2) && (fabs(l1.c - l2.c) < EPSILON);
29 }
30
31 bool areIntersect(line l1, line l2, pt &p) {
32     if (areParallel(l1, l2)) return false;
33     p.x = (l2.b * l1.c - l1.b * l2.c) / (l2.a * l1.b - l1.a * l2.b);
34     if (fabs(l1.b) > EPSILON) p.y = -(l1.a * p.x + l1.c);
35     else p.y = -(l2.a * p.x + l2.c);
36     return true;
37 }

```

3.3 Konvexe Hülle

```

1 struct point {
2     double x, y;
3     point(){} point(double x, double y) : x(x), y(y) {}
4     bool operator <(const point &p) const {
5         return x < p.x || (x == p.x && y < p.y);
6     }
7 };
8

```

```

9 // 2D cross product.
10 // Return a positive value, if OAB makes a counter-clockwise turn,
11 // negative for clockwise turn, and zero if the points are collinear.
12 double cross(const point &O, const point &A, const point &B){
13     double d = (A.x - O.x) * (B.y - O.y) - (A.y - O.y) * (B.x - O.x);
14     if (fabs(d) < 1e-9) return 0.0;
15     return d;
16 }
17
18 // Returns a list of points on the convex hull in counter-clockwise order.
19 // Collinear points are not in the convex hull, if you want collinear points in the hull remove "=" in the CCW-
    Test
20 // Note: the last point in the returned list is the same as the first one.
21 vector<point> convexHull(vector<point> P){
22     int n = P.size(), k = 0;
23     vector<point> H(2*n);
24
25     // Sort points lexicographically
26     sort(P.begin(), P.end());
27
28     // Build lower hull
29     for (int i = 0; i < n; i++) {
30         while (k >= 2 && cross(H[k-2], H[k-1], P[i]) <= 0.0) k--;
31         H[k++] = P[i];
32     }
33
34     // Build upper hull
35     for (int i = n-2, t = k+1; i >= 0; i--) {
36         while (k >= t && cross(H[k-2], H[k-1], P[i]) <= 0.0) k--;
37         H[k++] = P[i];
38     }
39
40     H.resize(k);
41     return H;
42 }

```

3.4 Formeln - std::complex

```

1 //komplexe Zahlen als Darstellung fuer Punkte
2 typedef pt complex<double>;
3 //Winkel zwischen Punkt und x-Achse in [0, 2 * PI), Winkel zwischen a und b
4 double angle = arg (a), angle_a_b = arg (a - b);
5 //Punkt rotiert um Winkel theta
6 pt a_rotated = a * exp (pt (0, theta));
7 //Mittelpunkt des Dreiecks abc
8 pt centroid = (a + b + c) / 3;
9 //Skalarprodukt
10 double dot(pt a, pt b) {
11     return real(conj(a) * b);
12 }
13 //Kreuzprodukt, 0, falls kollinear
14 double cross(pt a, pt b) {
15     return imag(conj(a) * b);
16 }
17 //wenn Eckpunkte bekannt
18 double areaOfTriangle(pt a, pt b, pt c) {
19     return abs(cross(b - a, c - a)) / 2.0;
20 }
21 //wenn Seitenlaengen bekannt
22 double areaOfTriangle(double a, double b, double c) {
23     double s = (a + b + c) / 2;
24     return sqrt(s * (s-a) * (s-b) * (s-c));
25 }
26 // Sind die Dreiecke a1, b1, c1, and a2, b2, c2 aehnlich?
27 // Erste Zeile testet Aehnlichkeit mit gleicher Orientierung,
28 // zweite Zeile testet Aehnlichkeit mit unterschiedlicher Orientierung
29 bool similar (pt a1, pt b1, pt c1, pt a2, pt b2, pt c2) {
30     return (
31         (b2 - a2) * (c1 - a1) == (b1 - a1) * (c2 - a2) ||

```

```

32         (b2 - a2) * (conj (c1) - conj (a1)) == (conj (b1) - conj (a1)) * (c2 - a2)
33     );
34 }
35 //Linksknick von a->b nach a->c
36 double ccw(pt a, pt b, pt c) {
37     return cross(b - a, c - a); //<0 => falls Rechtsknick, 0 => kollinear, >0 => Linksknick
38 }
39 //Streckenschnitt, Strecken a-b und c-d
40 bool lineSegmentIntersection(pt a, pt b, pt c, pt d) {
41     if (ccw(a, b, c) == 0 && ccw(a, b, d) == 0) { //kollinear
42         double dist = abs(a - b);
43         return (abs(a - c) <= dist && abs(b - c) <= dist) || (abs(a - d) <= dist && abs(b - d) <= dist);
44     }
45     return ccw(a, b, c) * ccw(a, b, d) <= 0 && ccw(c, d, a) * ccw(c, d, b) <= 0;
46 }
47 //Entfernung von p zu a-b
48 double distToLine(pt a, pt b, pt p) {
49     return abs(cross(p - a, b - a)) / abs(b - a);
50 }
51 //liegt p auf a-b
52 bool pointOnLine(pt a, pt b, pt p) {
53     return abs(distToLine(a, b, p)) < EPSILON;
54 }
55 //testet, ob d in der gleichen Ebene liegt wie a, b, und c
56 bool isCoplanar(pt a, pt b, pt c, pt d) {
57     return (b - a) * (c - a) * (d - a) == 0;
58 }
59 //berechnet den Flaecheninhalt eines Polygons (nicht selbstschneidend)
60 double areaOfPolygon(vector<pt> &polygon) { //jeder Eckpunkt nur einmal im Vektor
61     double res = 0; int n = polygon.size();
62     for (int i = 0; i < (int)polygon.size(); i++)
63         res += real(polygon[i]) * imag(polygon[(i + 1) % n]) - real(polygon[(i + 1) % n]) * imag(polygon[i]);
64     return 0.5 * abs(res);
65 }
66 //testet, ob sich zwei Rechtecke (p1, p2) und (p3, p4) schneiden (jeweils gegenueberliegende Ecken)
67 bool rectIntersection(pt p1, pt p2, pt p3, pt p4) {
68     double minx12 = min(real(p1), real(p2)), maxx12 = max(real(p1), real(p2));
69     double minx34 = min(real(p3), real(p4)), maxx34 = max(real(p3), real(p4));
70     double miny12 = min(imag(p1), imag(p2)), maxy12 = max(imag(p1), imag(p2));
71     double miny34 = min(imag(p3), imag(p4)), maxy34 = max(imag(p3), imag(p4));
72     return (maxx12 >= minx34) && (maxx34 >= minx12) && (maxy12 >= miny34) && (maxy34 >= miny12);
73 }
74 //testet, ob ein Punkt im Polygon liegt (beliebige Polygone)
75 bool pointInPolygon(pt p, vector<pt> &polygon) { //jeder Eckpunkt nur einmal im Vektor
76     pt rayEnd = p + pt(1, 1000000);
77     int counter = 0, n = polygon.size();
78     for (int i = 0; i < n; i++) {
79         pt start = polygon[i], end = polygon[(i + 1) % n];
80         if (lineSegmentIntersection(p, rayEnd, start, end)) counter++;
81     }
82     return counter & 1;
83 }

```

4 Mathe

4.1 ggT, kgV, erweiterter euklidischer Algorithmus

```

1 ll gcd(ll a, ll b) {
2     return b == 0 ? a : gcd(b, a % b);
3 }
4
5 ll lcm(ll a, ll b) {
6     return a * (b / gcd(a, b)); //Klammern gegen Overflow
7 }

```

```

1 //Accepted in Aufgabe mit Forderung: |X|+|Y| minimal (primaer) und X<=Y (sekundaer)
2 //hab aber keinen Beweis dafuer :)

```

```

3 ll x, y, d; //a * x + b * y = d = ggT(a,b)
4 void extendedEuclid(ll a, ll b) {
5     if (!b) {
6         x = 1; y = 0; d = a; return;
7     }
8     extendedEuclid(b, a % b);
9     ll x1 = y; ll y1 = x - (a / b) * y;
10    x = x1; y = y1;
11 }

```

4.1.1 Multiplikatives Inverses von x in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sei $0 \leq x < n$. Definiere $d := \gcd(x, n)$.

Falls $d = 1$:

- Erweiterter euklidischer Algorithmus liefert α und β mit $\alpha x + \beta n = 1$
- Nach Kongruenz gilt $\alpha x + \beta n \equiv \alpha x \equiv 1 \pmod{n}$
- $x^{-1} \equiv \alpha \pmod{n}$

Falls $d \neq 1$: es existiert kein x^{-1}

```

1 ll multInv(ll n, ll p) { //berechnet das multiplikative Inverse von n in F_p
2     extendedEuclid(n, p); //implementierung von oben
3     x += ((x / p) + 1) * p;
4     return x % p;
5 }

```

4.2 Primzahlsieb von Eratosthenes

```

1 vector<int> primes;
2 void primeSieve(ll n) { //berechnet die Primzahlen kleiner n
3     vector<int> isPrime(n, true);
4     for(ll i = 2; i < n; i+=2) {
5         if(isPrime[i]) {
6             primes.push_back(i);
7             if(i*i <= n) {
8                 for(ll j = i; i*j < n; j+=2) isPrime[i*j] = false;
9             }
10            }
11        if(i == 2) i++;
12    }
13 }

```

4.2.1 Faktorisierung

```

1 const ll PRIME_SIZE = 100000000;
2 vector<int> primes; //call primeSieve(PRIME_SIZE); before
3
4 //Factorize the number n
5 vector<int> factorize(ll n) {
6     vector<int> factor;
7     ll num = n;
8     int pos = 0;
9     while(num != 1) {
10        if(num % primes[pos] == 0) {
11            num /= primes[pos];
12            factor.push_back(primes[pos]);
13        }
14        else pos++;
15        if(primes[pos]*primes[pos] > n) break;
16    }
17    if(num != 1) factor.push_back(num);
18    return factor;
19 }

```

4.2.2 Mod-Exponent über \mathbb{F}_p

```

1 ll modPow(ll b, ll e, ll p) {
2     if (e == 0) return 1;
3     if (e == 1) return b;
4     ll half = modPow(b, e / 2, p), res = (half * half) % p;
5     if (e & 1) res *= b; res %= p;
6     return res;
7 }

```

4.3 LGS über \mathbb{F}_p

```

1 void normalLine(ll n, ll line, ll p) { //normalisiert Zeile line
2     ll factor = multInv(mat[line][line], p); //Implementierung von oben
3     for (ll i = 0; i <= n; i++) {
4         mat[line][i] *= factor;
5         mat[line][i] %= p;
6     }
7 }
8
9 void takeAll(ll n, ll line, ll p) { //zieht Vielfaches von line von allen anderen Zeilen ab
10    for (ll i = 0; i < n; i++) {
11        if (i == line) continue;
12        ll diff = mat[i][line]; //abziehen
13        for (ll j = 0; j <= n; j++) {
14            mat[i][j] -= (diff * mat[line][j]) % p;
15            while (mat[i][j] < 0) {
16                mat[i][j] += p;
17            }
18        }
19    }
20 }
21
22 void gauss(ll n, ll p) { //n x n+1-Matrix, Koerper F_p
23     for (ll line = 0; line < n; line++) {
24         normalLine(n, line, p);
25         takeAll(n, line, p);
26     }
27 }

```

4.4 Binomialkoeffizienten

```

1 ll calc_binom(ll N, ll K) {
2     ll r = 1, d;
3     if (K > N) return 0;
4     for (d = 1; d <= K; d++) {
5         r *= N--;
6         r /= d;
7     }
8     return r;
9 }

```

4.5 Satz von SPRAGUE-GRUNDY

Weise jedem Zustand X wie folgt eine GRUNDY-Zahl $g(X)$ zu:

$$g(X) := \min\{\mathbb{Z}_0^+ \setminus \{g(Y) \mid Y \text{ von } X \text{ aus direkt erreichbar}\}\}$$

X ist genau dann gewonnen, wenn $g(X) > 0$ ist.

Wenn man k Spiele in den Zuständen X_1, \dots, X_k hat, dann ist die GRUNDY-Zahl des Gesamtzustandes $g(X_1) \oplus \dots \oplus g(X_k)$.

```

1 #Most important function!!
2 bool WinNimm(vector<int> game) {
3     int result = 0;
4     for(int s: game) result ^= s;
5     return s > 0;
6 }

```

4.6 Maximales Teilfeld

```

1 //N := length of field
2 int maxStart = 1, maxLen = 0, curStart = 1, len = 0;
3 double maxValue = 0, sum = 0;
4 for (int pos = 0; pos < N; pos++) {
5     sum += values[pos];
6     len++;
7     if (sum > maxValue) { // neues Maximum
8         maxValue = sum; maxStart = curStart; maxLen = len;
9     }
10    if (sum < 0) { // alles zuruecksetzen
11        curStart = pos + 2; len = 0; sum = 0;
12    }
13 }
14 //maxSum := maximaler Wert, maxStart := Startposition, maxLen := Laenge der Sequenz

```

Obiger Code findet kein maximales Teilfeld, das über das Ende hinausgeht. Dazu:

1. finde maximales Teilfeld, das nicht übers Ende geht
2. berechne minimales Teilfeld, das nicht über den Rand geht (analog)
3. nimm Maximum aus gefundenem Maximalem und Altem\Minimalem

4.7 Kombinatorik

4.7.1 Berühmte Zahlen

FIBONACCI-Zahlen	$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \quad f(n+2) = f(n+1) + f(n)$	Bem. 1, 2
CATALAN-Zahlen	$C_0 = 1 \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{2(2n-1)}{n+1} \cdot C_{n-1}$	Bem. 3, 4
EULER-Zahlen (I)	$\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\rangle = 1 \quad \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = (k+1) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle + (n-k) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle$	Bem. 5
EULER-Zahlen (II)	$\left\langle\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle = 1 \quad \left\langle\left\langle \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\rangle\right\rangle = 0 \quad \left\langle\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle\right\rangle = (k+1) \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle\right\rangle + (2n-k-1) \left\langle\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle\right\rangle$	Bem. 6
STIRLING-Zahlen (I)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$	Bem. ??

Bemerkung 1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$

Bemerkung 2 (ZECKENDORFS Theorem) Jede positive natürliche Zahl kann eindeutig als Summe einer oder mehrerer verschiedener FIBONACCI-Zahlen geschrieben werden, sodass keine zwei aufeinanderfolgenden FIBONACCI-Zahlen in der Summe vorkommen.

Lösung: Greedy, nimm immer die größte FIBONACCI-Zahl, die noch hineinpasst.

Bemerkung 3 • Die erste und dritte angegebene Formel sind relativ sicher gegen Overflows.
• Die erste Formel kann auch zur Berechnung der CATALAN-Zahlen bezüglich eines Moduls genutzt werden.

Bemerkung 4 Die CATALAN-Zahlen geben an: $C_n =$

- Anzahl der Binärbäume mit n Knoten
- Anzahl der validen Klammerausdrücke mit n Klammerpaaren
- Anzahl der korrekten Klammerungen von $n+1$ Faktoren
- Anzahl der Möglichkeiten ein konvexes Polygon mit $n+2$ Ecken in Dreiecke zu zerlegen.
- Anzahl der monotonen Pfade in einem $n \times n$ -Gitter, die nicht die Diagonale kreuzen. (zwischen gegenüberliegenden Ecken)

Bemerkung 5 (EULER-Zahlen 1. Ordnung) Die Anzahl der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ mit genau k Anstiegen.

Die Formel folgt aus folgender Überlegung: Für die n -te Zahl gibt es n mögliche Positionen zum Einfügen. Dabei wird entweder ein Anstieg in zwei gesplitted oder ein Anstieg um n ergänzt.

Bemerkung 6 (EULER-Zahlen 2. Ordnung) Die Anzahl der Permutationen von $\{1, 1, \dots, n, n\}$ mit genau k Anstiegen.

4.7.2 Verschiedenes

Hanoi Towers (min steps)	$T_n = 2^n - 1$
regions by n lines	$n(n+1)/2 + 1$
bounded regions by n lines	$(n^2 - 3n + 2)/2$
labeled rooted trees	n^{n-1}
labeled unrooted trees	n^{n-2}

5 Strings

5.1 KNUTH-MORRIS-PRATT-Algorithmus

```

1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3
4  using namespace std;
5
6  //Preprocessing Substring sub for KMP-Search
7  vector<int> kmp_preprocessing(string& sub) {
8      vector<int> b(sub.size() + 1);
9      b[0] = -1;
10     int i = 0, j = -1;
11     while(i < sub.size()) {
12         while(j >= 0 && sub[i] != sub[j])
13             j = b[j];
14         i++; j++;
15         b[i] = j;
16     }
17     return b;
18 }
19
20 //Searching after Substring sub in s
21 vector<int> kmp_search(string& s, string& sub) {
22     vector<int> pre = kmp_preprocessing(sub);
23     vector<int> result;
24     int i = 0, j = -1;
25     while(i < s.size()) {
26         while(j >= 0 && s[i] != sub[j])
27             j = pre[j];
28         i++; j++;
29         if(j == sub.size()) {
30             result.push_back(i-j);
31             j = pre[j];
32         }
33     }
34     return result;
35 }
```

5.2 Trie

```

1  //nur fuer Kleinbuchstaben!
2  struct node {
3      node *e[26];
4      int c = 0; //anzahl der woerter die an dem node enden.
5      node() { for(int i = 0; i < 26; i++) e[i] = NULL; }
6  };
7
8  void insert(node *root, string *txt, int s) {
```

```

9     if(s >= txt->length()) root->c++;
10    else {
11        int idx = (int)((*txt).at(s) - 'a');
12        if(root->e[idx] == NULL) {
13            root->e[idx] = new node();
14        }
15        insert(root->e[idx], txt, s+1);
16    }
17 }
18
19 int contains(node *root, string *txt, int s) {
20     if(s >= txt->length()) return root->c;
21     int idx = (int)((*txt).at(s) - 'a');
22     if(root->e[idx] != NULL) {
23         return contains(root->e[idx], txt, s+1);
24     } else return 0;
25 }

```

5.3 Suffix-Array

```

1 //longest common substring in one string (overlapping not excluded)
2 //contains suffix array:-----
3 int cmp(string &s,vector<vector<int>> &v, int i, int vi, int u, int l) {
4     int vi2 = (vi + 1) % 2, u2 = u + i / 2, l2 = l + i / 2;
5     if(i == 1) return s[u] - s[l];
6     else if (v[vi2][u] != v[vi2][l]) return (v[vi2][u] - v[vi2][l]);
7     else { //beide groesser trifft nicht mehr ein, da ansonsten vorher schon unterschied in Laenge
8         if(u2 >= s.length()) return -1;
9         else if(l2 >= s.length()) return 1;
10        else return v[vi2][u2] - v[vi2][l2];
11    }
12 }
13
14 string lcsb(string s) {
15     if(s.length() == 0) return "";
16     vector<int> a(s.length());
17     vector<vector<int>> v(2, vector<int>(s.length(), 0));
18     int vi = 0;
19     for(int k = 0; k < a.size(); k++) a[k] = k;
20     for(int i = 1; i <= s.length(); i *= 2, vi = (vi + 1) % 2) {
21         sort(a.begin(), a.end(), [&] (const int &u, const int &l) {
22             return cmp(s, v, i, vi, u, l) < 0;
23         });
24         v[vi][a[0]] = 0;
25         for(int z = 1; z < a.size(); z++) v[vi][a[z]] = v[vi][a[z-1]] + (cmp(s, v, i, vi, a[z], a[z-1]) == 0 ?
26             0 : 1);
27     }
28     //-----
29     int r = 0, m=0, c=0;
30     for(int i = 0; i < a.size() - 1; i++) {
31         c = 0;
32         while(a[i]+c < s.length() && a[i+1]+c < s.length() && s[a[i]+c] == s[a[i+1]+c]) c++;
33         if(c > m) r=i, m=c;
34     }
35     return m == 0 ? "" : s.substr(a[r], m);
36 }

```

5.4 Longest Common Substring

```

1 //longest common substring.
2 struct lcse {
3     int i = 0, s = 0;
4 };
5 string lcp(string s[2]) {
6     if(s[0].length() == 0 || s[1].length() == 0) return "";
7     vector<lcse> a(s[0].length()+s[1].length());

```



```

8   for(int k = 0; k < a.size(); k++) a[k].i=(k < s[0].length() ? k : k - s[0].length()), a[k].s = (k < s[0].
    length() ? 0 : 1);
9   sort(a.begin(), a.end(), [&] (const lcse &u, const lcse &l) {
10      int ui = u.i, li = l.i;
11      while(ui < s[u.s].length() && li < s[l.s].length()) {
12          if(s[u.s][ui] < s[l.s][li]) return true;
13          else if(s[u.s][ui] > s[l.s][li]) return false;
14          ui++; li++;
15      }
16      return !(ui < s[u.s].length());
17  });
18  int r = 0, m=0, c=0;
19  for(int i = 0; i < a.size() - 1; i++) {
20      if(a[i].s == a[i+1].s) continue;
21      c = 0;
22      while(a[i].i+c < s[a[i].s].length() && a[i+1].i+c < s[a[i+1].s].length() && s[a[i].s][a[i].i+c] == s[a
    [i+1].s][a[i+1].i+c]) c++;
23      if(c > m) r=i, m=c;
24  }
25  return m == 0 ? "" : s[a[r].s].substr(a[r].i, m);
26 }

```

5.5 Longest Common Subsequence

```

1  string lcscs(string &a, string &b) {
2      int m[a.length() + 1][b.length() + 1], x=0, y=0;
3      memset(m, 0, sizeof(m));
4      for(int y = a.length() - 1; y >= 0; y--) {
5          for(int x = b.length() - 1; x >= 0; x--) {
6              if(a[y] == b[x]) m[y][x] = 1 + m[y+1][x+1];
7              else m[y][x] = max(m[y+1][x], m[y][x+1]);
8          }
9      } //for length only: return m[0][0];
10     string res;
11     while(x < b.length() && y < a.length()) {
12         if(a[y] == b[x]) res += a[y++], x++;
13         else if(m[y][x+1] > m[y+1][x+1]) x++;
14         else y++;
15     }
16     return res;
17 }

```

6 Java

6.1 Introduction

- Compilen: `javac main.java`
- Ausführen: `java main < sample.in`
- Einlesen:

```

1  Scanner in = new Scanner(System.in); //java.util.Scanner
2  String line = in.nextLine(); //reads the next line of the input
3  int num = in.nextInt(); //reads the next token of the input as an int
4  double num2 = in.nextDouble(); //reads the next token of the input as a double

```

6.2 BigInteger

Hier ein kleiner Überblick über die Methoden der Klasse `BigInteger`:

```

1  //Returns this +,*,/,- val
2  BigInteger add(BigInteger val), multiply(BigInteger val), divide(BigInteger val), subtract(BigInteger val)
3
4  //Returns this^(^e)
5  BigInteger pow(BigInteger e)

```

```

6
7 //Bit-Operations
8 BigInteger and(BigInteger val), or(BigInteger val), xor(BigInteger val), not(), shiftLeft(int n), shiftRight(
    int n)
9
10 //Returns the greatest common divisor of abs(this) and abs(val)
11 BigInteger gcd(BigInteger val)
12
13 //Returns this mod m, this\(^{-1}\) mod m, this\(^e\) mod m
14 BigInteger mod(BigInteger m), modInverse(BigInteger m), modPow(BigInteger e, BigInteger m)
15
16 //Returns the next number that is greater than this and that is probably a prime.
17 BigInteger nextProbablePrime()
18
19 //Converting BigInteger. Attention: If the BigInteger is too big the lowest bits were chosen which fits into
    the converted data-type.
20 int intValue(), long longValue(), float floatValue(), double doubleValue()

```

7 Sonstiges

7.1 2-SAT

1. Bedingungen in 2-CNF formulieren.
2. Implikationsgraph bauen, $(a \vee b)$ wird zu $\neg a \Rightarrow b$ und $\neg b \Rightarrow a$.
3. Finde die starken Zusammenhangskomponenten.
4. Genau dann lösbar, wenn keine Variable mit ihrer Negation in einer SCC liegt.

7.2 Sortieren in Linearzeit

Wenn die Eingabe aus einem kleinen Intervall $[0, n)$ stammt ist Bucketsort schneller.

7.2.1 Bucketsort

```

1 vector<int> res;
2 void bucketSort(vector<int> &a) { //stores result in global vector res
3     int c[BUCKETS] = {0};
4     for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) c[a[i]]++;
5     int C = 0;
6     for (int i = 0; i < BUCKETS; i++) {
7         int tmp = C;
8         C += c[i];
9         c[i] = tmp;
10    }
11    res.resize(a.size());
12    for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) {
13        res[c[a[i]]] = a[i];
14        c[a[i]]++;
15    }
16 }

```

7.2.2 LSD-Radixsort

```

1 //Comparable with sort from <algorithms> in a range from 0 to 5000, for values greater than 5000 use sort
2 const int p[10] = {1,10,100,1000,10000,100000,1000000,10000000,100000000,1000000000};
3
4 int getLongestNumber(vector<int> &a) {
5     int res = 0;
6     for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) res = max(res, (int)ceil(log10(a[i]) + 1));
7     return res;
8 }
9
10 int getIthDigit(int digit, int i) {
11     return (digit / p[i]) % 10;

```

```
12 }
13
14 void radixSort(vector<int> &a) {
15     int digits = getLongestNumber(a);
16     for (int d = 0; d < digits; d++) {
17         vector<int> bucket[10];
18         for(int i = 0; i < (int)a.size(); i++)
19             bucket[getIthDigit(a[i],d)].push_back(a[i]);
20         a.clear();
21         for(int i = 0; i < 10; i++)
22             copy(bucket[i].begin(), bucket[i].end(), back_inserter(a));
23     }
24 }
```