

Partition Problem

Francisco Javier Arocas Herrera

Óscar Hernández Díaz

Gabriel Melián Hernández

Adrián Epifanio Rodríguez Hernández

1. Introducción al Partition Problem

2. Variantes del Partition

- Suma de Subconjuntos
- Partition de números de múltiples vías.
- 3-Partition
- Partition product

3. Dificultad Computacional.

- Partimos de una instancia de suma de subconjuntos para decidir si hay un subconjunto S con suma T .
- Instancia de Partition: conjunto inicial más $z1 = \text{suma}(S)$ y $z2 = 2T$.
- $\text{Suma}(S) + z1 + z2 = 2 * \text{suma}(S) + 2T$. Suma objetivo de Partition = $\text{Suma}(S) + T$
- Si $\text{Suma}(S') = T \rightarrow \text{Suma}(S' \cup \{z1\}) = \text{Suma}(S) + T \rightarrow S' \cup \{z1\}$, es solución a la instancia.
- NP-Hard.



4. Algoritmos Aproximados.

- Greedy Number Partitioning.
 - Sin ordenar $\rightarrow O(n)$, con relación de aproximación $3/2$.
 - Ordenados $\rightarrow O(n \log n)$, con relación de aproximación $7/6$.
- Largest Differencing Method (Karmarkar-Karp Algorithm).
 - $O(n \log n)$, con relación de aproximación $7/6$.
 - Funciona mejor en entornos de simulación.
- Multifit.
 - En el peor caso su relación de aproximación es $8/7$.



5. Algoritmos Exactos

- Algoritmos que siempre encuentran la partición óptima.
 - ◆ Pueden utilizar un tiempo exponencial
- Estos algoritmos son:
 1. Pseudo polynomial time number partitioning
 2. Complete Greedy Algorithm (CGA)
 3. Complete Karmarkar-Karp Algorithm (CKK)

5.1 Pseudo polynomial time number partitioning

- Ocupa $O(nm)$ de memoria
- M = número más grande en la entrada
- Se puede extender y utilizar para varias particiones, pero no es eficiente.

```
function can_be_partitioned_equally(S) is
  input: A list of integers S.
  output: True if S can be partitioned into two subsets that have equal sum.

   $n \leftarrow |S|$ 
   $K \leftarrow \text{sum}(S)$ 
   $P \leftarrow$  empty boolean table of size  $(\lfloor K/2 \rfloor + 1)$  by  $(n + 1)$ 

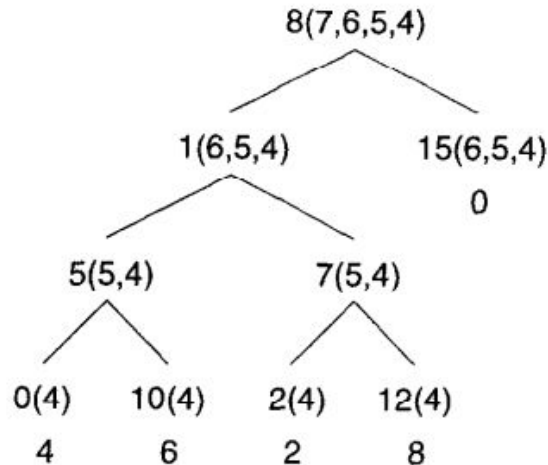
  initialize top row  $(P(0, x))$  of  $P$  to True
  initialize leftmost column  $(P(x, 0))$  of  $P$ , except for  $P(0, 0)$  to False

  for  $i$  from 1 to  $\lfloor K/2 \rfloor$ 
    for  $j$  from 1 to  $n$ 
       $x = S[j-1]$ 
      if  $(i-x) \geq 0$  then
         $P(i, j) \leftarrow P(i, j-1) \text{ or } P(i-x, j-1)$ 
      else
         $P(i, j) \leftarrow P(i, j-1)$ 

  return  $P(\lfloor K/2 \rfloor, n)$ 
```

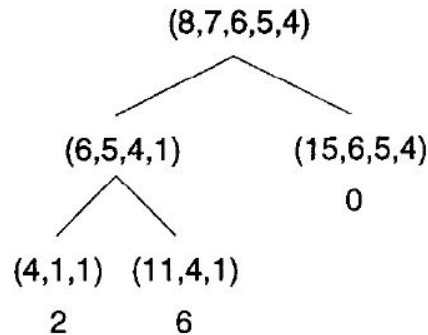
5.2 Complete Greedy Algorithm (CGA)

- Considera todas las particiones mediante la construcción de un árbol binario
- Requiere sólo $O(n)$ espacio, pero puede tomar $O(2^n)$ tiempo
- Se puede mejorar con una heurística



5.3 Complete Karmarkar-Karp algorithm (CKK)

- Es una extensión de el algoritmo complete greedy
- Considera todas las particiones mediante la construcción de un árbol binario
- El árbol es de menor tamaño que el de CGA. Es más eficiente, y suele producir una solución mejor que el greedy.
- Require $O(n)$ espacio, pero en el peor de los casos podría tomar $O(2^n)$



6. Ejemplo

Dado el conjunto $S = \{3,1,1,2,2,1\}$

$$A \quad S1 = \{1,1,1,2\} \quad = \quad S2 = \{2,3\}.$$

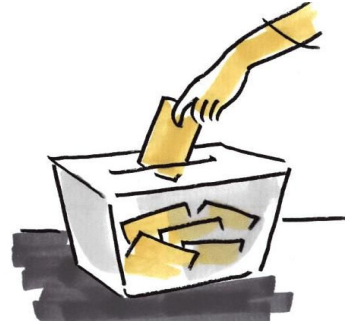
$$B \quad S1 = \{2,1,1\} \quad \neq \quad S2 = \{2,2,1,3\}$$

$$C \quad S1 = \{3,1,1\} \quad = \quad S2 = \{2,2,1\}$$

~~$$S = \{2,5\}$$~~

7. Aplicaciones

Manipulación en las elecciones



A

B

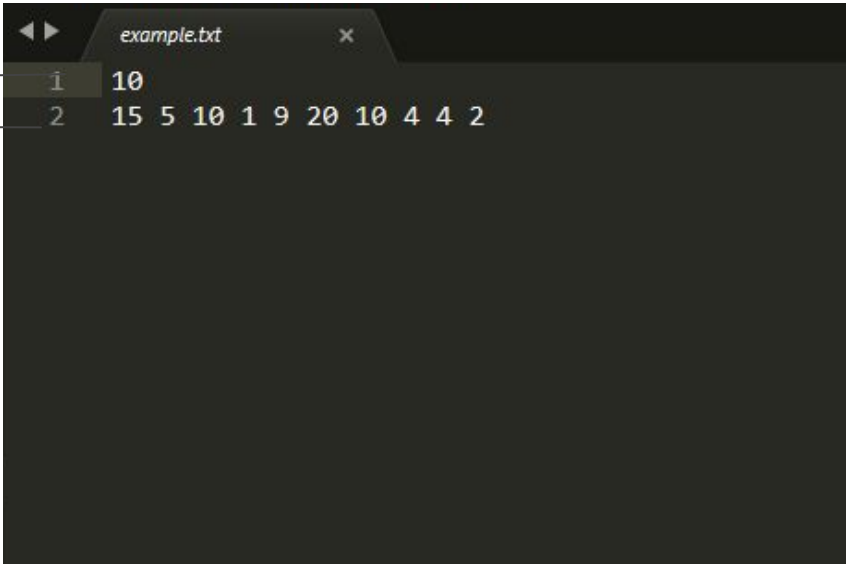
C



8. Formato Input

Nº de elementos

Elementos del conjunto



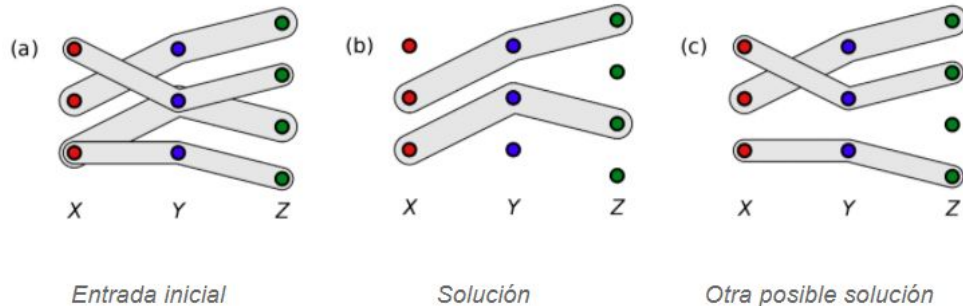
```
example.txt
1 10
2 15 5 10 1 9 20 10 4 4 2
```

9. 3DM a Partition

- a. Definición de 3DM
- b. Definición de Partition
- c. Transformar 3DM a Partition

9.1 Definición de 3DM

- Dado conjunto X, Y, Z finito y disjunto.
- $T = X \times Y \times Z$
- T se compone de tripletas (x, y, z) , tal que x pertenece a X , y pertenece a Y , z pertenece a Z
- Es un 3DM si (x_1, y_1, z_1) está en M y (x_2, y_2, z_2) pertenece a M . Tenemos que x_1 no es igual a x_2 , y_1 no es igual a y_2 , z_1 no es igual a z_2



9.2 Definición de Partition

→ **Definición:** Dado un conjunto S de números enteros positivos, dividirlo en dos subconjuntos $S1$ y $S2$. De forma que la suma de los números del primer conjunto sea igual a la suma de los del segundo conjunto.

◆ Ejemplo: $S = \{3, 1, 1, 2, 2, 1\}$

◆ Solución:

- $S1 = \{3, 1, 1\} \mid \text{Suma} = 5$
- $S2 = \{2, 2, 1\} \mid \text{Suma} = 5$

◆ Otra solución:

- $S1 = \{1, 1, 1, 2\} \mid \text{Suma} = 5$
- $S2 = \{2, 3\} \mid \text{Suma} = 5$



9.3 Transformación 3DM a Partition (I)

EJEMPLO:

$X = \{ a \ b \ c \}$

$Y = \{ 1 \ 2 \ 3 \}$

$Z = \{ x \ y \ z \}$

$T = \{ a \ 2 \ y \} , \{ b \ 1 \ z \} , \{ c \ 3 \ x \} , \{ a \ 1 \ x \}$

$s(a1) = \{ a, 2, y \} = [001 \ 000 \ 000 \mid 000 \ 001 \ 000 \mid 000 \ 001 \ 000]$

$s(a2) = \{ b, 1, z \} = [000 \ 001 \ 000 \mid 001 \ 000 \ 000 \mid 000 \ 000 \ 001]$

$s(a3) = \{ c, 3, x \} = [000 \ 000 \ 001 \mid 000 \ 000 \ 001 \mid 001 \ 000 \ 000]$

$s(a4) = \{ a, 1, x \} = [001 \ 000 \ 000 \mid 001 \ 000 \ 000 \mid 001 \ 000 \ 000]$

$A = \text{Sum}(s(a)) = [010 \ 001 \ 001 \mid 010 \ 001 \ 001 \mid 010 \ 001 \ 001]$

9.4 Transformación 3DM a Partition (III)

$$\mathbf{B} = \{ \{a, b, c\}, \{1 \ 2 \ 3\}, \{x \ y \ z\} \} = [001 \ 001 \ 001 \mid 001 \ 001 \ 001 \mid 001 \ 001 \ 001]$$

$$\mathbf{C} = 2 * \mathbf{A} - \mathbf{B} = [011 \ 001 \ 001 \mid 011 \ 001 \ 001 \mid 011 \ 001 \ 001]$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = [011 \ 010 \ 010 \mid 011 \ 010 \ 010 \mid 011 \ 010 \ 010]$$

$$s(a1) = [001 \ 000 \ 000 \mid 000 \ 001 \ 000 \mid 000 \ 001 \ 000] = 16781320$$

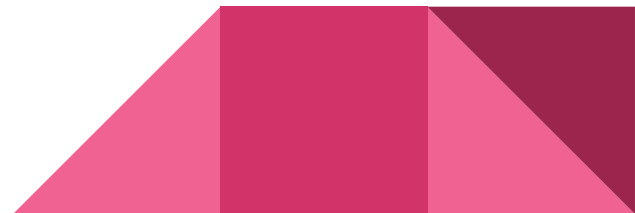
$$s(a2) = [000 \ 001 \ 000 \mid 001 \ 000 \ 000 \mid 000 \ 000 \ 001] = 2129921$$

$$s(a3) = [000 \ 000 \ 001 \mid 000 \ 000 \ 001 \mid 001 \ 000 \ 000] = 262720$$

$$s(a4) = [001 \ 000 \ 000 \mid 001 \ 000 \ 000 \mid 001 \ 000 \ 000] = 16810048$$

$$C = [011 \ 001 \ 001 \mid 011 \ 001 \ 001 \mid 011 \ 001 \ 001] = 52794057$$

$$D = [011 \ 010 \ 010 \mid 011 \ 010 \ 010 \mid 011 \ 010 \ 010] = 55157970$$



9.3 Transformación 3DM a Partition (IV)

$V = [262720, 2129921, 16781320, 16810048, 52794057, 55157070]$

→ $V1 = [262720, 2129921, 16781320, 52794057] = \underline{\text{SUM} = 71968018}$

→ $V2 = [16810048, 55157970] = \underline{\text{SUM} = 71968018}$

Original Vector:

[262720, 2129921, 16781320, 16810048, 52794057, 55157970]

V1:

{ 262720, 2129921, 16781320, 52794057 }

V2:

{ 16810048, 55157970 }

3DM Data:

Vector X: { a, b, c }

Vector Z: { x, y, z }

Triples: [{ a, 2, y } { b, 1, z } { c, 3, x } { a, 1, x }]

10. Bibliografía

- Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_problem
- Definición: <https://arxiv.org/ftp/cond-mat/papers/0310/0310317.pdf>
- Github: <https://github.com/AdrianEpi/CC-Partition>



11. Contacto

Francisco Javier Arocas Herrera
Óscar Hernández Díaz
Gabriel Melián Hernández
Adrián Epifanio Rodríguez Hernández

alu0100906813@ull.edu.es
alu0101127163@ull.edu.es
alu0100819786@ull.edu.es
alu0101158280@ull.edu.es

