



Unidad 4. Modelos GARCH

Proyecto 2. Precio de cierre de una acción de NVIDIA

Realizado por:

Adrián Augusto Farías Suárez

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán

Licenciatura en Actuaría

Series de Tiempo

Fecha de entrega: viernes 30 de mayo de 2025

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
2. Hechos estilizados en la serie de tiempo	2
2.1 Agrupamiento de la volatilidad	3
2.2 Los rendimientos muestran autocorrelaciones pequeñas	4
2.3 Distribución leptocúrtica de los rendimientos	5
3. Identificación de los posibles modelos	6
4. Validación de los modelos propuestos	8
4.1 <i>GARCH</i> (2,2) con errores con distribución normal	8
4.1.1 Estimación del modelo	8
4.1.2 Validación de supuestos	9
4.2 <i>GARCH</i> (1,2) con errores con distribución normal	14
4.2.1 Estimación del modelo	14
4.3.2 Validación de supuestos	15
4.3 <i>GARCH</i> (1,1) con errores con distribución normal	20
4.3.1 Estimación del modelo	20
4.3.2 Validación de supuestos	20
5. Pronósticos de la volatilidad estocástica	26

1. Introducción

En el presente proyecto se analiza el comportamiento del precio de cierre de las acciones de NVIDIA Corporation, una de las empresas más influyentes en el sector tecnológico debido a su liderazgo en el desarrollo de unidades de procesamiento gráfico (GPU), inteligencia artificial (IA) y computación de alto rendimiento. NVIDIA no solo ha revolucionado industrias como los videojuegos, el diseño gráfico y la simulación, sino que también se ha posicionado como un actor clave en mercados emergentes como los vehículos autónomos, la computación en la nube y las soluciones de metaverso. Su relevancia en el mercado global la convierte en un caso de estudio ideal para analizar la dinámica de volatilidad en acciones tecnológicas, las cuales suelen estar sujetas a fuertes movimientos impulsados por innovaciones disruptivas y ciclos de demanda.

El estudio se enfoca en modelar la volatilidad de los rendimientos de esta acción mediante un modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), ampliamente utilizado en el análisis financiero para capturar la variabilidad cambiante de series de tiempo económicas. La base de datos empleada consiste en los precios de cierre diarios de las acciones de NVIDIA, expresados en dólares estadounidenses (USD), obtenidos de la plataforma *TradingView*, reconocida por su confiabilidad en datos bursátiles históricos y en tiempo real. Esta frecuencia diaria permite capturar variaciones intradía y ofrece una base sólida para evaluar riesgos financieros a corto plazo.

Dado que los mercados tecnológicos se caracterizan por su alta sensibilidad a noticias macroeconómicas, lanzamientos de productos y avances regulatorios, la aplicación de modelos GARCH resulta particularmente útil para cuantificar la persistencia y asimetrías en la volatilidad. Los resultados de este análisis no solo contribuirán a entender el perfil de riesgo de NVIDIA, sino que también podrían servir como referencia para estrategias de inversión y gestión de portafolios en sectores de alta innovación.

2. Hechos estilizados en la serie de tiempo

El análisis de los hechos estilizados en series financieras requiere trabajar con retornos en lugar de precios, dado que estos últimos suelen presentar tendencias y no estacionariedad, lo cual dificulta la identificación de patrones estadísticos robustos. Por ello, se calculan los rendimientos logarítmicos del precio de cierre de NVIDIA mediante la siguiente expresión:

$$r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Esta transformación no solo facilita el estudio de la dinámica de la serie, sino que también permite una interpretación más clara de las variaciones porcentuales en el precio del activo.

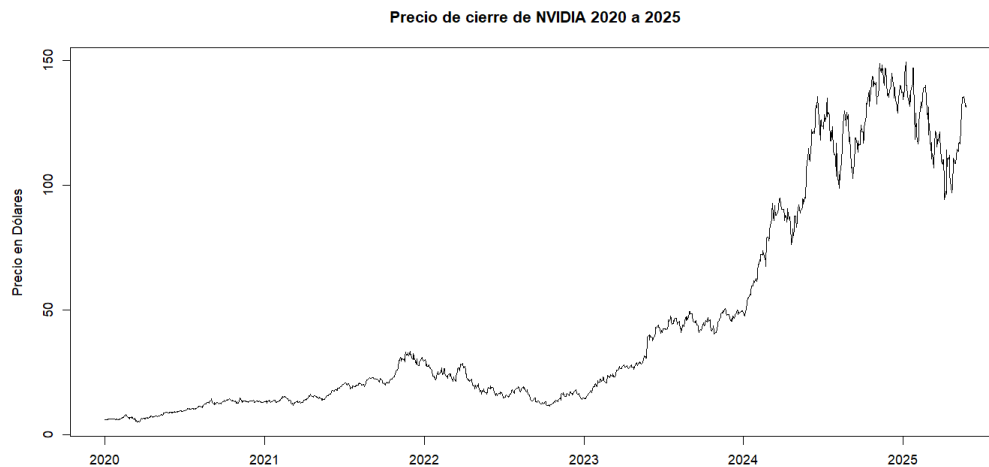


Figura 1. Serie de tiempo del precio de cierre de NVIDIA, 2020-2025

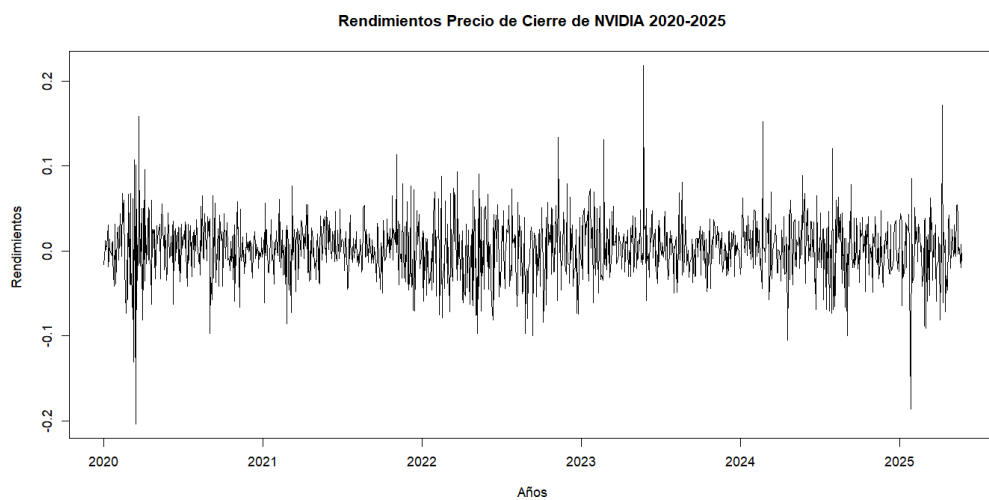


Figura 2. Rendimientos del precio de cierre de NVIDIA, 2020-2025

2.1 Agrupamiento de la volatilidad

Uno de los patrones más característicos en series financieras es la presencia de volatilidad agrupada, donde períodos de alta variabilidad en los retornos son seguidos por fases de relativa calma. Este fenómeno suele estar asociado a eventos macroeconómicos, noticias corporativas o cambios en el sentimiento del mercado.

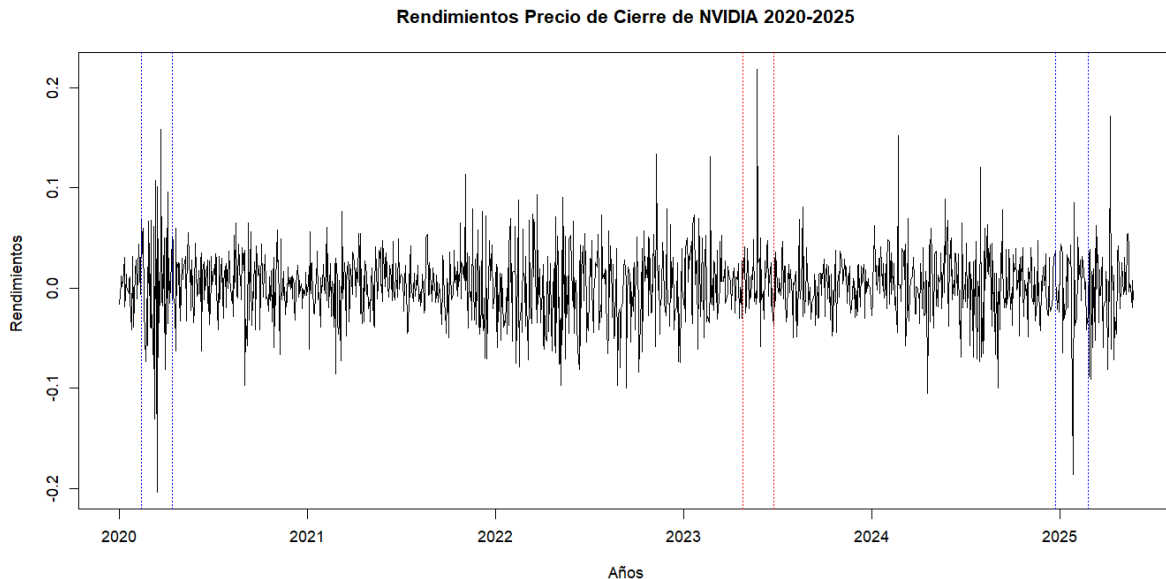


Figura 3. Rendimientos del precio de cierre de NVIDIA con una banda de volatilidad, 2020-2025

La serie temporal de rendimientos diarios de NVIDIA entre 2020 y 2025 presenta un patrón característico de volatilidad agrupada, donde se observan claros periodos de alta variabilidad alternando con fases de relativa estabilidad. Particularmente destacables son los episodios de elevada volatilidad concentrados en determinados momentos del periodo analizado, que coinciden con eventos relevantes en el mercado tecnológico y financiero.

El gráfico evidencia cómo los rendimientos muestran una marcada heterocedasticidad, con clusters de volatilidad que persisten temporalmente antes de volver a niveles basales. Estos períodos se pueden observar en la Figura 3 encerrados en bandas, donde los rendimientos sufren una subida o caída abrupta para luego estabilizarse con el paso del tiempo. Esta agrupación temporal de la variabilidad es consistente con el comportamiento típico de los activos financieros, donde la incertidumbre del mercado tiende a manifestarse en rachas temporales concentradas más que en patrones uniformemente distribuidos.

2.2 Los rendimientos muestran autocorrelaciones pequeñas

El análisis de las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) para los rendimientos del precio de cierre de NVIDIA revela la presencia de coeficientes de correlación significativamente pequeños en todos los retardos analizados. Tanto la ACF como la PACF muestran valores que oscilan dentro de un estrecho margen alrededor de cero. Este comportamiento es característico de series de rendimientos financieros eficientes, donde la ausencia de autocorrelaciones relevantes sugiere que los precios incorporan rápidamente toda la información disponible.

Los mínimos valores observados en los coeficientes de correlación, tanto simples como parciales, indican que los rendimientos no presentan dependencia lineal significativa entre observaciones sucesivas. Este hallazgo es consistente con la hipótesis de mercados eficientes en su forma débil, donde los rendimientos pasados no contienen información útil para predecir el comportamiento futuro de la serie. La ausencia de patrones autocorrelacionados en los rendimientos refuerza la idoneidad de emplear modelos que capturen la dependencia en momentos de segundo orden, como los modelos GARCH, más que en la media condicional de la serie.

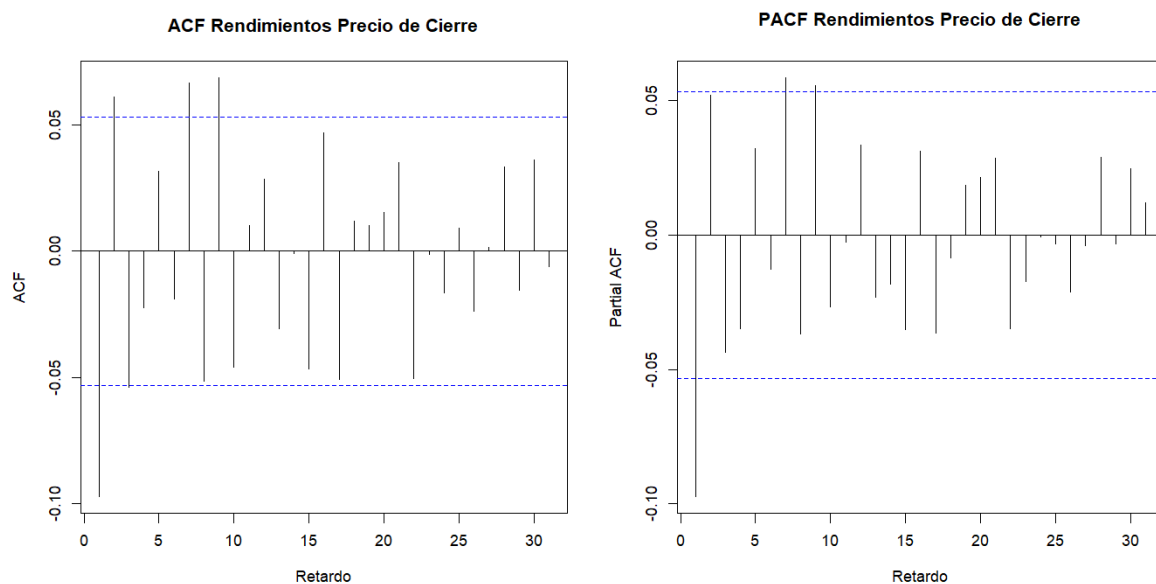


Figura 4. ACF y PACF de rendimientos de precio de cierre de NVIDIA

2.3 Distribución leptocúrtica de los rendimientos

El análisis de la densidad de los rendimientos mediante estimación no paramétrica revela una distribución con características leptocúrticas, evidenciada por un coeficiente de curtosis de 3.796. Este valor, superior al esperado en una distribución normal estándar, indica una mayor concentración de probabilidad alrededor de la media en comparación con la curva gaussiana teórica. La diferencia, aunque estadísticamente significativa, no presenta una desviación extrema, lo que sugiere una moderada leptocurtosis en la serie.

Esta particularidad en la forma de la distribución justifica la consideración de modelos que capturen adecuadamente este comportamiento, como los enfoques GARCH con distribuciones condicionales adaptadas a dichas características. La presencia de leptocurtosis, incluso en su forma moderada, resalta la importancia de emplear especificaciones que no asuman normalidad estricta en el análisis de los rendimientos financieros.

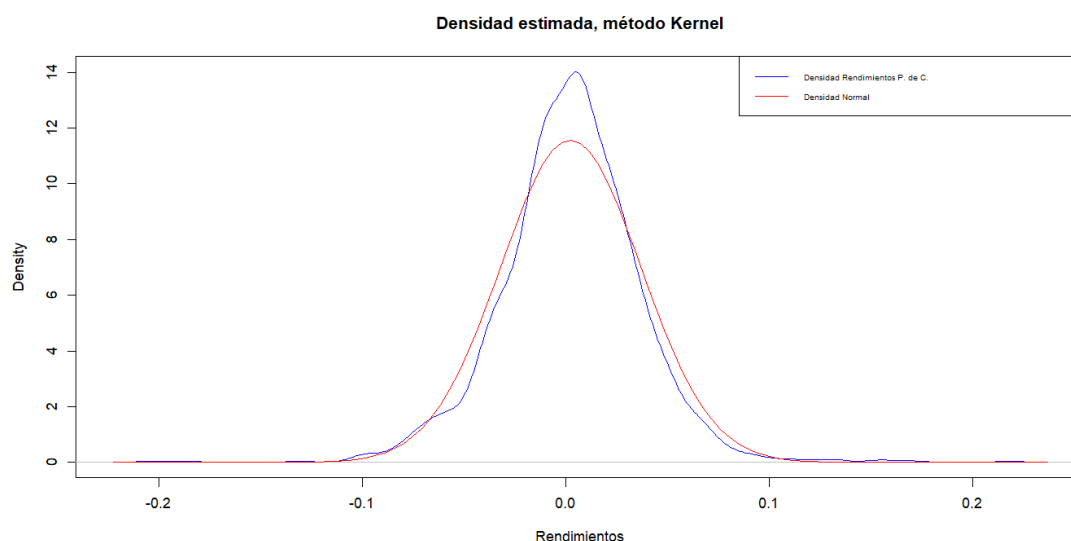


Figura 5. Comparación de distribución de rendimientos y normal

Podemos ver esto claramente en el gráfico de densidad: la curva de los rendimientos reales es más puntiaguda en el centro. La evidencia empírica muestra que la función de densidad de los rendimientos presenta simultáneamente un pico más pronunciado en la moda.

3. Identificación de los posibles modelos

Primero se comprobará si está presente el efecto ARCH en los rendimientos con ayuda de R, utilizando la función `archtest` de la paquetería *fDMA*. Formalmente, el contraste de hipótesis es:

$$H_0: \alpha_1 = \dots = \alpha_{10}$$

vs.

$$H_1: \exists i, \alpha_i \neq 0$$

Con ayuda de R, se obtuvieron los siguientes resultados:

```
> archtest(as.vector(SerieRendHist$Rendimientos), lag=10)

Engle's LM ARCH Test

data:  as.vector(SerieRendHist$Rendimientos)
statistic = 62.353, lag = 10, p-value =
1.296e-09
alternative hypothesis: ARCH effects of order 10 are present
```

Figura 6. Prueba del efecto ARCH sobre los rendimientos

Como $p - \text{valor} = 1.296e - 09 < 0.05 = \alpha$, se rechaza la hipótesis nula, es decir, está presente el efecto ARCH.

Para poder determinar el modelo $GARCH(p, q)$ con mejor ajuste a la serie financiera utilizada en este documento, se utilizará la metodología de Box-Jenkins a la serie de los cuadrados de los log-rendimientos.

Ahora, es necesario determinar un modelo $ARMA(r, p)$ para r_t^2 donde $r = \max\{p, q\}$. Para ello, es necesario hacer el análisis que consiste en la representación gráfica de la función de autocorrelación (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF) de la serie de los cuadrados (Figura 1). Estas herramientas permiten examinar la estructura de dependencia temporal de la serie, proporcionando información fundamental para la identificación de un modelo de series de tiempo adecuado.

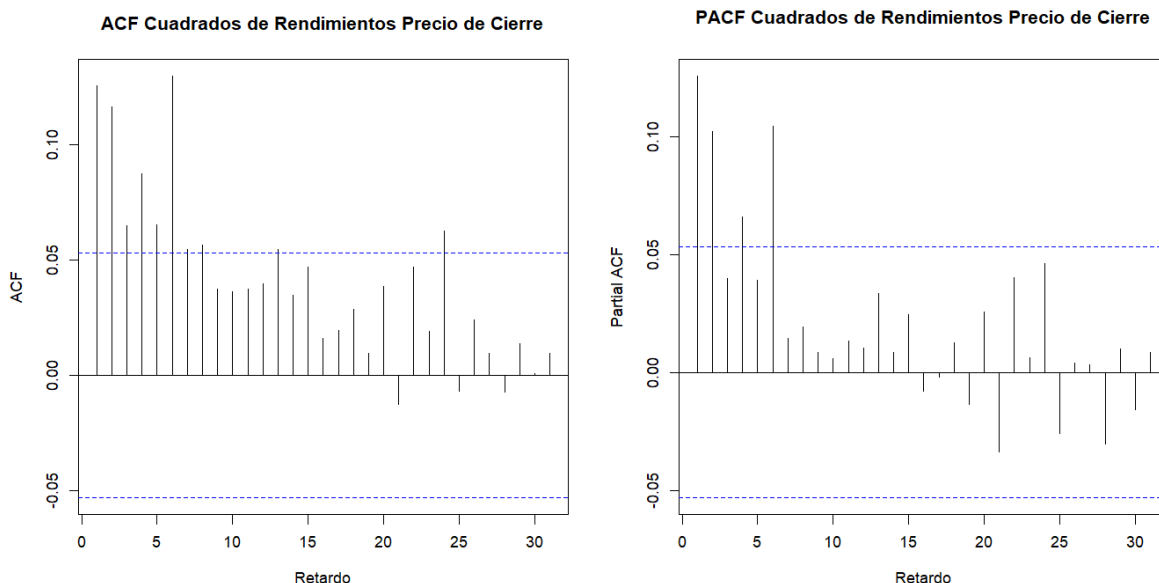


Figura 7. Gráfica de ACF y PACF de la serie de los cuadrados de los rendimientos $\{r_t^2\}$

Haciendo un análisis conjunto de las dos gráficas no nos lleva a concluir algún modelo en particular, pues en el ACF los picos caen dentro de las bandas de Bartlett a partir del retardo 9, para luego ser significativamente diferentes de cero en el retardo 24. Por otra parte, en el PACF los picos caen dentro de las bandas a partir del retardo 7 para luego permanecer dentro de las bandas. Mediante la visualización de estas dos gráficas no está claro cuál modelo podría ser adecuado para modelar la serie. Además del análisis de las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF), se empleó la función de autocorrelación extendida (EACF) para identificar posibles órdenes en modelos ARMA alternativos. Este método resulta particularmente útil cuando los patrones en la ACF y PACF no son concluyentes, ya que permite visualizar combinaciones de rezagos autorregresivos y de medias móviles de una mejor manera.

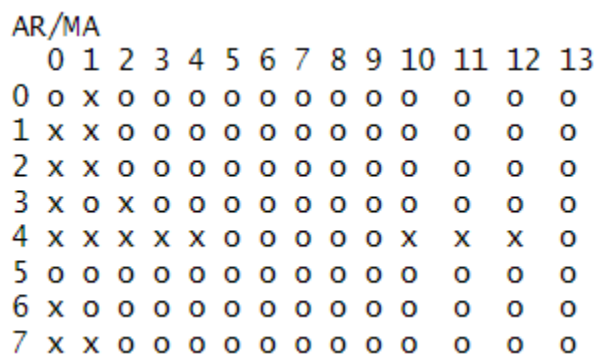


Figura 8. Gráfica de EACF de la serie de los cuadrados de los rendimientos $\{r_t^2\}$

En la gráfica de la EACF (Figura 8), se identificaron tres modelos como posibles candidatos. Los modelos son un $ARMA(0,2)$, $ARMA(1,2)$ y $ARMA(2,2)$. Estos modelos fueron seleccionados debido a que, en sus respectivas posiciones en la matriz EACF, se observa la formación de un triángulo claro sin interrupciones (representado por cruces), lo cual sugiere que dichas combinaciones de p y q son estadísticamente adecuadas para la serie analizada.

Una vez identificados los modelos, el siguiente paso es validarlos. Sin embargo, antes vale la pena mencionar que el modelo $ARMA(0,2)$ no es viable para este análisis, pues según la metodología de Box-Jenkins, se tiene que $r = 0$ y $p = 2$, de tal manera que para determinar el parámetro q del modelo GARCH, se debe cumplir que $0 = \max\{2, q\}$ lo cual claramente no tiene solución, por lo que dicho modelo queda descartado. Lo mismo ocurre con el modelo $ARMA(1,2)$, pues no existe q tal que $1 = \max\{2, q\}$. De esta manera, el modelo a validar será el $ARMA(2,2)$.

Los posibles modelos $GARCH(p, q)$ se obtienen como se muestra a continuación. Según la metodología Box-Jenkins, el modelo de los cuadrados de los rendimientos es un $ARMA(r, p)$. En este caso, $r = 2$ y $p = 2$. Entonces, q debe satisfacer la ecuación $2 = \max\{2, q\}$. Los posibles valores de q son $q = 1$ y $q = 2$. De esta manera, los modelos GARCH candidatos son $GARCH(2,1)$ y $GARCH(2,2)$. Sin embargo, se ajustará el modelo con mayor cantidad de parámetros, en este caso, el $GARCH(2,2)$.

4. Validación de los modelos propuestos

La selección inicial de modelos GARCH proporciona una aproximación tentativa, pero es fundamental validar su idoneidad para garantizar que capturen adecuadamente la estructura de los datos y cumplan con los supuestos estadísticos. La validación se centra en tres objetivos principales: (1) verificar que los cuadrados de los residuos estandarizados del modelo no estén correlacionados, (2) verificar que los residuos estandarizados del modelo sigan una distribución normal y (3) evaluar la significancia estadística de los coeficientes, descartando términos redundantes que no contribuyan al ajuste.

A continuación, se llevará a cabo la validación de los modelos propuestos en el apartado anterior.

4.1 $GARCH(2,2)$ con errores con distribución normal

4.1.1 Estimación del modelo

Para realizar el ajuste del modelo en R, se utilizaron las funciones `ugarchspec` y `ugarchfit` de la paquetería *rugarch*, como se muestra a continuación:

Optimal Parameters

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
omega	0.000105	0.000036	2.913090	0.003579
alpha1	0.053522	0.029824	1.794619	0.072714
alpha2	0.066178	0.032604	2.029762	0.042381
beta1	0.798342	0.577442	1.382550	0.166803
beta2	0.000041	0.486323	0.000085	0.999932

Figura 14. Ajuste del modelo GARCH(2,2) en términos de los rendimientos

El modelo propuesto estimado es de la forma:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

Donde

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 \\ &= 0.000105 + 0.053522 r_{t-1}^2 + 0.066178 r_{t-2}^2 + 0.798342 \sigma_{t-1}^2 + 0.000041 \sigma_{t-2}^2 \end{aligned}$$

4.1.2 Validación de supuestos

Una vez estimado el modelo inicial, el siguiente paso es validar los supuestos.

Los cuadrados de los residuos estandarizados no están correlacionados

Para este supuesto es necesario que los lags de la ACF y PACF de los residuales del modelo propuesto caigan dentro de la barra de Bartlett en su mayoría, pues esto indicaría que son ruido blanco. A continuación, se muestra el código utilizado en R y las gráficas correspondientes:

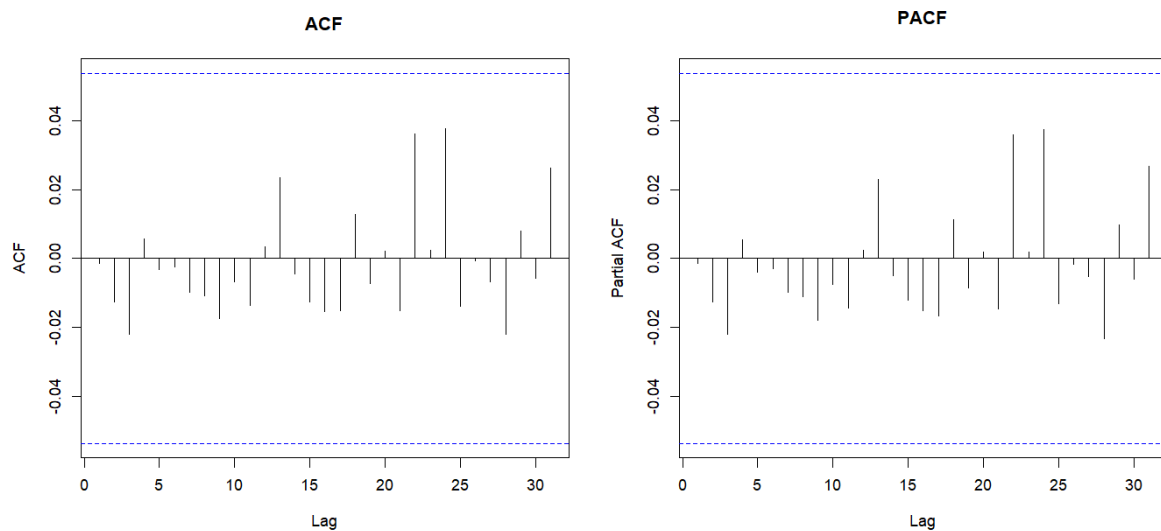


Figura 15. ACF y PACF de los cuadrados de residuales estandarizados de GARCH(2,2)

Los cuadrados de los residuales estandarizados del modelo ajustado no parecen presentar autocorrelación, tal como lo evidencia el análisis de las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF). En ambas gráficas, todos los picos caen dentro de los límites de las bandas de Bartlett, lo que indica que no existen autocorrelaciones significativas en los residuales para ningún retardo considerado.

Para validar el supuesto de no correlación en el modelo, se realizará la prueba de Ljung-Box. Esta prueba evalúa formalmente la hipótesis nula de que todas las autocorrelaciones hasta un rezago determinado son conjuntamente iguales a cero, lo que indicaría que los residuos no presentan estructura correlacional remanente. Formalmente, el contraste de hipótesis es:

$$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_k = 0$$

vs.

$$H_1: \exists i, \rho_i \neq 0$$

Con ayuda de R, se obtuvieron los siguientes resultados:

```
Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
-----
              statistic p-value
Lag[1]          0.002901  0.9570
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [11]  1.030287  0.9961
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [19]  1.902334  0.9996
d.o.f=4
```

Figura 16. Prueba Ljung-Box sobre los cuadrados de residuales estandarizados de GARCH(2,2)

En la Figura 16 se puede observar que se realizó la prueba para distintos retardos como 1, 11 y 19.

- Para $k = 1$

$$H_0: \rho_1 = 0$$

vs.

$$H_1: \rho_1 \neq 0$$

Como $p - valor = 0.9570 > 0.05 = \alpha$, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, las autocorrelaciones de hasta un retardo 1 no son significativamente distintas de cero. Por lo tanto, los cuadrados de los residuos estandarizados no están correlacionados.

- Para $k = 11$

$$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_{11} = 0$$

vs.

$$H_1: \exists i, \rho_i \neq 0$$

Como $p - valor = 0.9961 > 0.05 = \alpha$, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, las autocorrelaciones de hasta un retardo 11 no son significativamente distintas de cero. Por lo tanto, los cuadrados de los residuos estandarizados no están correlacionados.

- Para $k = 19$

$$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_{19} = 0$$

vs.

$$H_1: \exists i, \rho_i \neq 0$$

Como $p - valor = 0.9996 > 0.05 = \alpha$, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, las autocorrelaciones de hasta un retardo 19 no son significativamente distintas de cero. Por lo tanto, los cuadrados de los residuos estandarizados no están correlacionados.

Normalidad de los residuos estandarizados

Otra prueba adicional fue la de Kolmogorov-Smirnov para normalidad, donde las hipótesis a contrastar son:

H_0 : Los residuos estandarizados siguen una distribución normal

vs.

H_1 : Los residuos estandarizados no siguen una distribución normal

Con el software R se obtuvo los siguientes resultados:

```
> stdret22 <- residuals(garchfit22, standardize = TRUE)
> ks.test(stdret22, "pnorm", 0, 1)
```

Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

```
data: stdret22
D = 0.98789, p-value < 0.00000000000000022
alternative hypothesis: two-sided
```

Figura 17. Prueba Kolmogorov-Smirnov sobre los residuos estandarizados de GARCH(2,2)

Como $p - valor < 0.00000000000000022 < 0.05 = \alpha$, se rechaza la hipótesis nula en favor de la alternativa, es decir, los residuales estandarizados no siguen una distribución normal.

Como los residuos no siguen una distribución normal, esto quiere decir que el modelo GARCH(2,2) con errores con distribución normal no es el adecuado para la serie

financiera estudiada. Sin embargo, para propósitos de este trabajo, se determinará si la distribución de los residuos es simétrica, mediante la visualización del boxplot y el histograma.

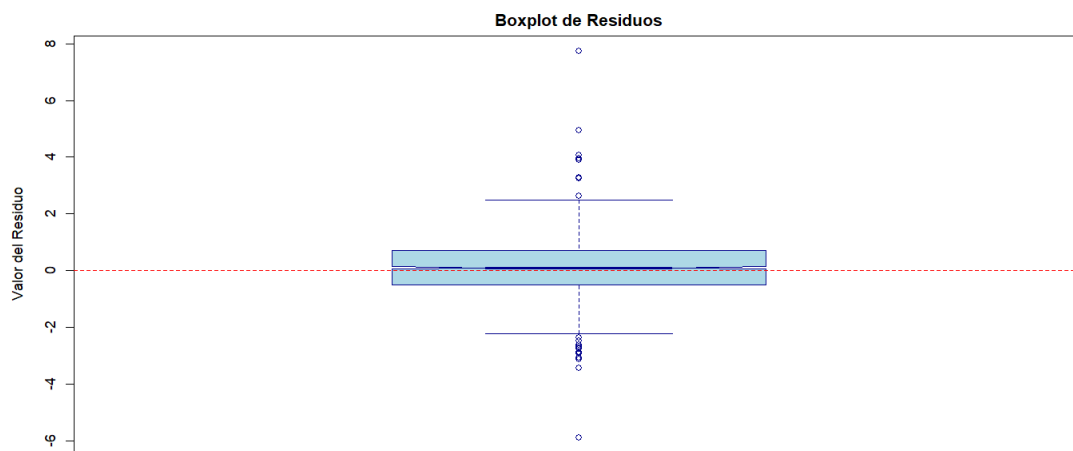


Figura 18. Boxplot sobre los residuos estandarizados de GARCH(2,2)

El análisis de los residuos del modelo evidencia una distribución estadísticamente simétrica, lo cual resulta fundamental para validar los supuestos del modelo GARCH empleado. La evaluación gráfica mediante el boxplot revela una mediana centrada en el rango intercuartílico, con bigotes de longitud comparable en ambos extremos y ausencia de valores atípicos que predominen en una dirección específica. Esta disposición equilibrada de los datos sugiere una dispersión uniforme en las colas de la distribución.

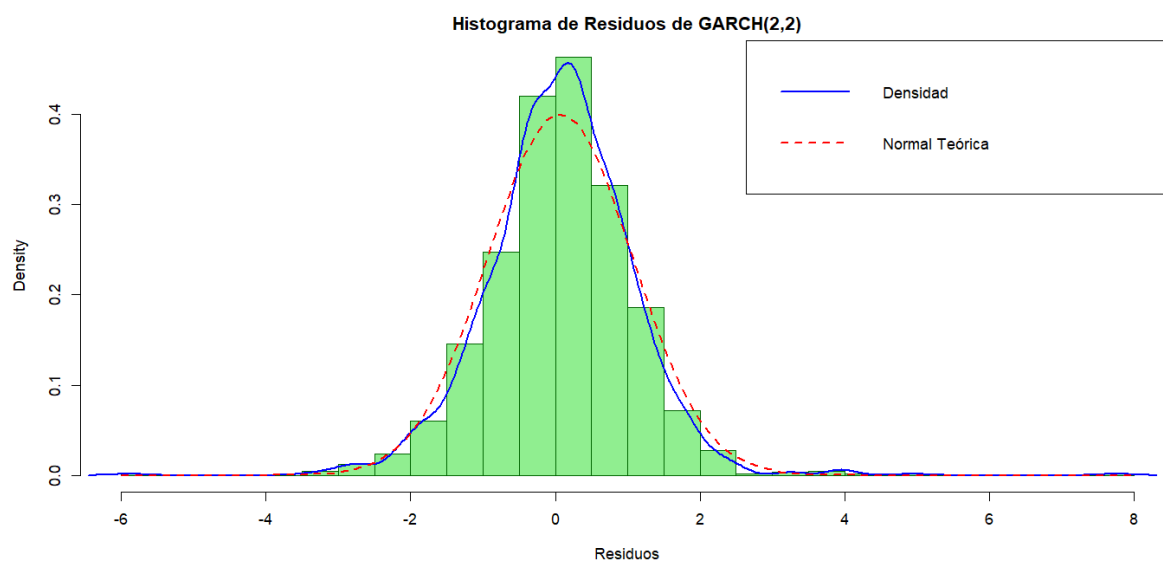


Figura 19. Histograma sobre los residuos estandarizados de GARCH(2,2)

La simetría de la distribución queda evidenciada por la equidistribución de las frecuencias a ambos lados del valor central, donde ambas colas del histograma decrecen de forma similar y armónica. Esta observación corrobora los resultados del boxplot, donde la mediana se ubicaba exactamente en el centro del rango intercuartílico con bigotes de igual longitud. La concordancia entre ambas representaciones gráficas refuerza la conclusión de simetría distributiva.

Como la distribución resultó ser simétrica, se procederá a evaluar la significancia de los coeficientes del modelo.

Significancia de los coeficientes

El siguiente paso fue realizar la prueba de significancia de los coeficientes del modelo ajustado.

Los contrastes de hipótesis de las pruebas individuales fueron:

- Para el coeficiente α_0

$$H_0: \alpha_0 = 0$$

vs.

$$H_1: \alpha_0 \neq 0$$

En la Figura 14, se puede observar que en la prueba individual de α_0 se tuvo $p - \text{valor} = 0.003579 < 0.05$ por lo que se rechaza la hipótesis nula, esto es, α_0 resultó significativamente distinto de cero dado que las demás variables están incluidas en el modelo, por lo que no se incluye en el modelo, por lo que se incluye en el modelo.

- Para los coeficientes α

$$H_0: \alpha_i = 0$$

vs.

$$H_1: \alpha_i \neq 0$$

Para $i = 1, 2$

En la Figura 14, se puede observar que en la prueba individual de α_1 se tuvo $p - \text{valor} = 0.072714 > 0.05$ por lo que no se rechaza la hipótesis nula, esto es, α_1 no resultó significativamente distinto de cero dado que las demás variables están incluidas en el modelo, por lo que no se incluye en el modelo. Sin embargo, en la

prueba individual de α_2 se tuvo que $p - valor = 0.042381 < 0.05$, esto es, α_2 resultó significativamente distinto de cero dado que las demás variables están incluidas en el modelo, por lo que se incluyen los dos coeficientes en el modelo.

- Para los coeficientes β

$$H_0: \beta_i = 0$$

vs.

$$H_1: \beta_i \neq 0$$

Para $i = 1, 2$

En la Figura 14, se puede observar que en la prueba individual de β_1 se tuvo $p - valor = 0.166803 > 0.05$ por lo que no se rechaza la hipótesis nula, esto es, β_1 no resultó significativamente distinto de cero dado que las demás variables están incluidas en el modelo, por lo que no se incluye en el modelo. Por otro lado, en la prueba individual de β_2 se tuvo que $p - valor = 0.999932 > 0.05$, esto es, β_2 no resultó significativamente distinto de cero dado que las demás variables están incluidas en el modelo.

Después, se procedió a eliminar del modelo los coeficientes con mayor p-valor. En este caso, se eliminó primero β_2 cuyo p-valor fue 0.999932. De esta manera, el modelo resultante es un $GARCH(1,2)$.

4.2 $GARCH(1,2)$ con errores con distribución normal

4.2.1 Estimación del modelo

Para realizar el ajuste del modelo en R, se utilizaron las funciones `ugarchspec` y `ugarchfit` de la paquetería *rugarch*, como se muestra a continuación:

Optimal Parameters				
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
omega	0.000105	0.000033	3.1816	0.001465
alpha1	0.053538	0.029959	1.7870	0.073932
alpha2	0.066178	0.040068	1.6516	0.098611
beta1	0.798406	0.047517	16.8024	0.000000

Figura 20. Ajuste del modelo $GARCH(1,2)$ en términos de los rendimientos

El modelo propuesto estimado es de la forma:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

Donde

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ &= 0.000105 + 0.053538 r_{t-1}^2 + 0.066178 r_{t-2}^2 + 0.798406 \sigma_{t-1}^2\end{aligned}$$

4.3.2 Validación de supuestos

Una vez estimado el modelo inicial, el siguiente paso es validar los supuestos.

Los cuadrados de los residuos estandarizados no están correlacionados

Para este supuesto es necesario que los lags de la ACF y PACF de los residuales del modelo propuesto caigan dentro de la barra de Bartlett en su mayoría, pues esto indicaría que son ruido blanco. A continuación, se muestra el código utilizado en R y las gráficas correspondientes:

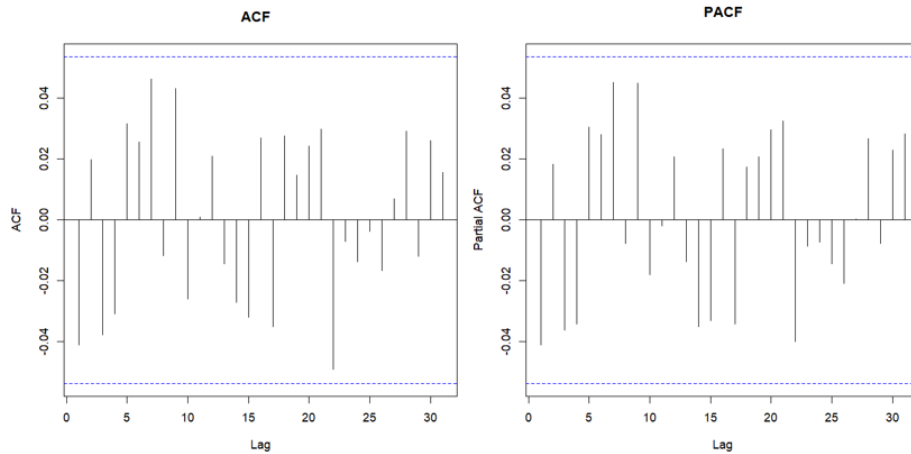


Figura 21. ACF y PACF de los cuadrados de residuales estandarizados de GARCH(1,2)

Los cuadrados de los residuales estandarizados del modelo ajustado no parecen presentar autocorrelación, tal como lo evidencia el análisis de las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF). En ambas gráficas, todos los picos caen dentro de los límites de las bandas de Bartlett, lo que indica que no existen autocorrelaciones significativas en los residuales para ningún retardo considerado.

Para validar el supuesto de no correlación en el modelo, se realizará la prueba de Ljung-Box. Esta prueba evalúa formalmente la hipótesis nula de que todas las autocorrelaciones hasta un rezago determinado son conjuntamente iguales a cero, lo que indicaría que los residuos no presentan estructura correlacional remanente. Formalmente, el contraste de hipótesis es:

$$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_k = 0$$

vs.

$$H_1: \exists i, \rho_i \neq 0$$

Con ayuda de R, se obtuvieron los siguientes resultados:

```
Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
-----
                                statistic p-value
Lag[1]                          0.002926  0.9569
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][8]        0.761797  0.9876
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][14]      1.336310  0.9985
d.o.f=3
```

Figura 22. Prueba Ljung-Box sobre los cuadrados de residuales estandarizados de GARCH(1,2)

En la Figura 22 se puede observar que se realizó la prueba para distintos retardos como 1, 8 y 14.

- Para $k = 1$

$$H_0: \rho_1 = 0$$

vs.

$$H_1: \rho_1 \neq 0$$

Como $p - valor = 0.9569 > 0.05 = \alpha$, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, las autocorrelaciones de hasta un retardo 1 no son significativamente distintas de cero. Por lo tanto, los cuadrados de los residuos estandarizados no están correlacionados.

- Para $k = 8$

$$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_8 = 0$$

vs.

$$H_1: \exists i, \rho_i \neq 0$$

Como $p - valor = 0.9876 > 0.05 = \alpha$, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, las autocorrelaciones de hasta un retardo 8 no son significativamente distintas de cero. Por lo tanto, los cuadrados de los residuos estandarizados no están correlacionados.

- Para $k = 14$

$$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_{14} = 0$$

vs.

$$H_1: \exists i, \rho_i \neq 0$$

Como $p - valor = 0.9985 > 0.05 = \alpha$, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, las autocorrelaciones de hasta un retardo 14 no son significativamente distintas de cero. Por lo tanto, los cuadrados de los residuos estandarizados no están correlacionados.

Normalidad de los residuos estandarizados

Otra prueba adicional fue la de Kolmogorov-Smirnov para normalidad, donde las hipótesis a contrastar son:

H_0 : Los residuos estandarizados siguen una distribución normal

vs.

H_1 : Los residuos estandarizados no siguen una distribución normal

Con el software R se obtuvo los siguientes resultados:

```
> ks.test(stdret12, "pnorm", 0, 1)

Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  stdret12
D = 0.98789, p-value < 0.00000000000000022
alternative hypothesis: two-sided
```

Figura 23. Prueba Kolmogorov-Smirnov sobre los residuos estandarizados de GARCH(1,2)

Como $p - \text{valor} < 0.00000000000000022 < 0.05 = \alpha$, se rechaza la hipótesis nula en favor de la alternativa, es decir, los residuales estandarizados no siguen una distribución normal.

Como los residuos no siguen una distribución normal, esto quiere decir que el modelo GARCH(1,2) con errores con distribución normal no es el adecuado para la serie financiera estudiada. Sin embargo, para propósitos de este trabajo, se determinará si la distribución de los residuos es simétrica, mediante la visualización del boxplot y el histograma.

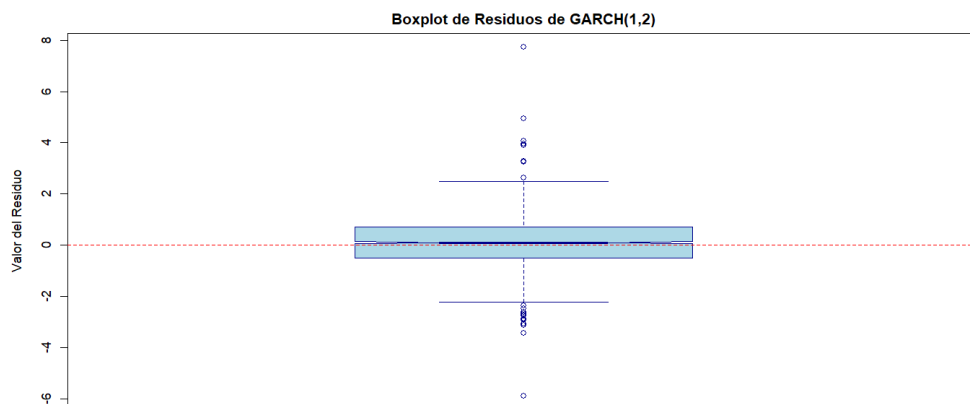


Figura 24. Boxplot sobre los residuos estandarizados de GARCH(1,2)

El análisis de los residuos del modelo evidencia una distribución estadísticamente simétrica, lo cual resulta fundamental para validar los supuestos del modelo GARCH empleado. La evaluación gráfica mediante el boxplot revela una mediana centrada en el rango intercuartílico, con bigotes de longitud comparable en ambos extremos y ausencia de valores atípicos que predominen en una dirección específica. Esta disposición equilibrada de los datos sugiere una dispersión uniforme en las colas de la distribución.

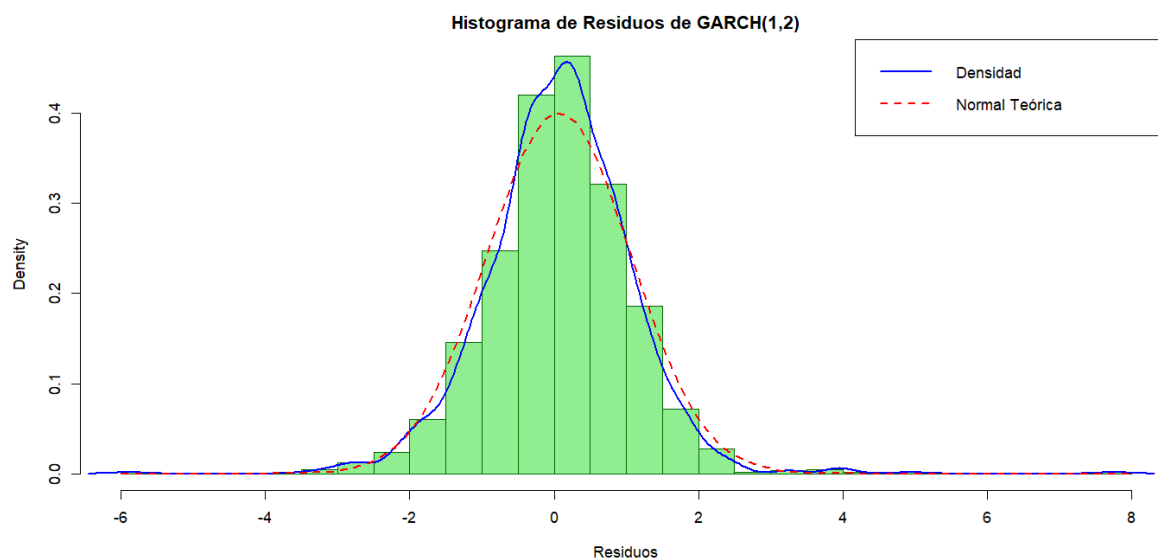


Figura 25. Histograma sobre los residuos estandarizados de GARCH(1,2)

La simetría de la distribución queda evidenciada por la equidistribución de las frecuencias a ambos lados del valor central, donde ambas colas del histograma decrecen de forma similar y armónica. Esta observación corrobora los resultados del boxplot, donde la mediana se ubicaba exactamente en el centro del rango intercuartílico con bigotes de igual longitud. La concordancia entre ambas representaciones gráficas refuerza la conclusión de simetría distributiva.

Como la distribución resultó ser simétrica, se procederá a evaluar la significancia de los coeficientes del modelo.

Significancia de los coeficientes

El siguiente paso fue realizar la prueba de significancia de los coeficientes del modelo ajustado.

Los contrastes de hipótesis de las pruebas individuales fueron:

- Para el coeficiente α_0

$$H_0: \alpha_0 = 0$$

vs.

$$H_1: \alpha_0 \neq 0$$

En la Figura 20, se puede observar que en la prueba individual de α_0 se tuvo $p - valor = 0.001465 < 0.05$ por lo que se rechaza la hipótesis nula, esto es, α_0 resultó significativamente distinto de cero dado que las demás variables están incluidas en el modelo, por lo que no se incluye en el modelo, por lo que se incluye en el modelo.

- Para los coeficientes α

$$H_0: \alpha_i = 0$$

vs.

$$H_1: \alpha_i \neq 0$$

Para $i = 1, 2$

En la Figura 20, se puede observar que en la prueba individual de α_1 se tuvo $p - valor = 0.073932 < 0.05$ por lo que no se rechaza la hipótesis nula, esto es, α_1 resultó significativamente distinto de cero dado que las demás variables están incluidas en el modelo, por lo que se incluye en el modelo. Por otro lado en la prueba individual de α_2 se tuvo que $p - valor = 0.098611 > 0.05$, por lo que tampoco resultó significativamente distinto de cero y no se incluye en el modelo

- Para los coeficientes β

$$H_0: \beta_1 = 0$$

vs.

$$H_1: \beta_1 \neq 0$$

En la Figura 20, se puede observar que en la prueba individual de β_1 se tuvo $p - valor = 0 < 0.05$ por lo que se rechaza la hipótesis nula, esto es, β_1 resultó significativamente distinto de cero dado que las demás variables están incluidas en el modelo, por lo que se incluye en el modelo.

Después, se procedió a eliminar del modelo los coeficientes con mayor p-valor. En este caso, se eliminó primero α_2 cuyo p-valor fue 0.098611. De esta manera, el modelo resultante es un $GARCH(1,1)$.

4.3 GARCH(1,1) con errores con distribución normal

4.3.1 Estimación del modelo

Para realizar el ajuste del modelo en R, se utilizaron las funciones `ugarchspec` y `ugarchfit` de la paquetería *rugarch*, como se muestra a continuación:

Optimal Parameters					
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
omega	0.000086	0.000025	3.4556	0.000549	
alpha1	0.096624	0.021438	4.5071	0.000007	
beta1	0.836097	0.034031	24.5689	0.000000	

Figura 26. Ajuste del modelo GARCH(1,1) en términos de los rendimientos

El modelo propuesto estimado es de la forma:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

Donde

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ &= 0.000086 + 0.096624 r_{t-1}^2 + 0.836097 \sigma_{t-1}^2\end{aligned}$$

4.3.2 Validación de supuestos

Una vez estimado el modelo inicial, el siguiente paso es validar los supuestos.

Los cuadrados de los residuos estandarizados no están correlacionados

Para este supuesto es necesario que los lags de la ACF y PACF de los residuales del modelo propuesto caigan dentro de la barra de Bartlett en su mayoría, pues esto indicaría que son ruido blanco. A continuación, se muestra el código utilizado en R y las gráficas correspondientes:

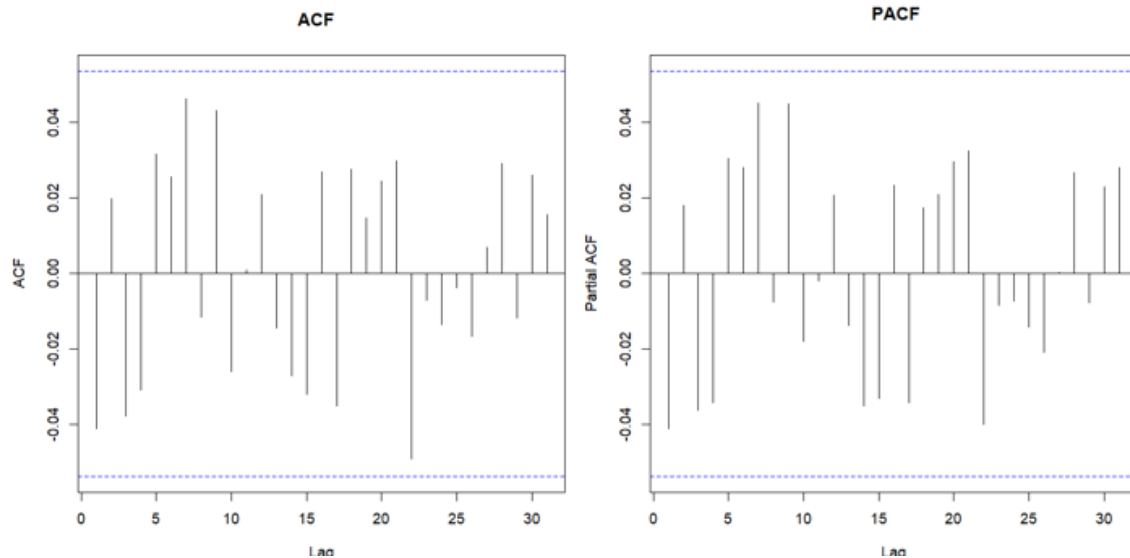


Figura 27. ACF y PACF de los cuadrados de residuales estandarizados de GARCH(1,1)

Los cuadrados de los residuales estandarizados del modelo ajustado no parecen presentar autocorrelación, tal como lo evidencia el análisis de las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF). En ambas gráficas, todos los picos caen dentro de los límites de las bandas de Bartlett, lo que indica que no existen autocorrelaciones significativas en los residuales para ningún retardo considerado.

Para validar el supuesto de no correlación en el modelo, se realizará la prueba de Ljung-Box. Esta prueba evalúa formalmente la hipótesis nula de que todas las autocorrelaciones hasta un rezago determinado son conjuntamente iguales a cero, lo que indicaría que los residuos no presentan estructura correlacional remanente. Formalmente, el contraste de hipótesis es:

$$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_k = 0$$

vs.

$$H_1: \exists i, \rho_i \neq 0$$

Con ayuda de R, se obtuvieron los siguientes resultados:

```
Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
-----
              statistic p-value
Lag[1]              0.3441  0.5575
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5] 0.7474  0.9137
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9] 0.9805  0.9871
d.o.f=2
```

Figura 28. Prueba Ljung-Box sobre los cuadrados de residuales estandarizados de GARCH(1,1)

En la Figura 28 se puede observar que se realizó la prueba para distintos retardos como 1, 5 y 9.

- Para $k = 1$

$$H_0: \rho_1 = 0$$

vs.

$$H_1: \rho_1 \neq 0$$

Como $p - valor = 0.5575 > 0.05 = \alpha$, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, las autocorrelaciones de hasta un retardo 1 no son significativamente distintas de cero. Por lo tanto, los cuadrados de los residuos estandarizados no están correlacionados.

- Para $k = 5$

$$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_5 = 0$$

vs.

$$H_1: \exists i, \rho_i \neq 0$$

Como $p - valor = 0.9137 > 0.05 = \alpha$, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, las autocorrelaciones de hasta un retardo 5 no son significativamente distintas de cero. Por lo tanto, los cuadrados de los residuos estandarizados no están correlacionados.

- Para $k = 9$

$$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_9 = 0$$

vs.

$$H_1: \exists i, \rho_i \neq 0$$

Como $p - valor = 0.9871 > 0.05 = \alpha$, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, las autocorrelaciones de hasta un retardo 9 no son significativamente distintas de cero. Por lo tanto, los cuadrados de los residuos estandarizados no están correlacionados.

Normalidad de los residuos estandarizados

Otra prueba adicional fue la de Kolmogorov-Smirnov para normalidad, donde las hipótesis a contrastar son:

$$H_0: \text{Los residuos estandarizados siguen una distribución normal}$$

vs.

$$H_1: \text{Los residuos estandarizados no siguen una distribución normal}$$

Con el software R se obtuvo los siguientes resultados:


```
> stdret11 <- residuals(garchfit11, standardize = TRUE)
> ks.test(stdret11, "pnorm", 0, 1)
```

Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test

```
data: stdret11
D = 0.9877, p-value < 0.00000000000000022
alternative hypothesis: two-sided
```

Figura 29. Prueba Kolmogorov-Smirnov sobre los residuos estandarizados de GARCH(1,1)

Como $p - \text{valor} < 0.00000000000000022 < 0.05 = \alpha$, se rechaza la hipótesis nula en favor de la alternativa, es decir, los residuos estandarizados no siguen una distribución normal.

Como los residuos no siguen una distribución normal, esto quiere decir que el modelo GARCH(1,1) con errores con distribución normal no es el adecuado para la serie financiera estudiada. Sin embargo, para propósitos de este trabajo, se determinará si la distribución de los residuos es simétrica, mediante la visualización del boxplot y el histograma.

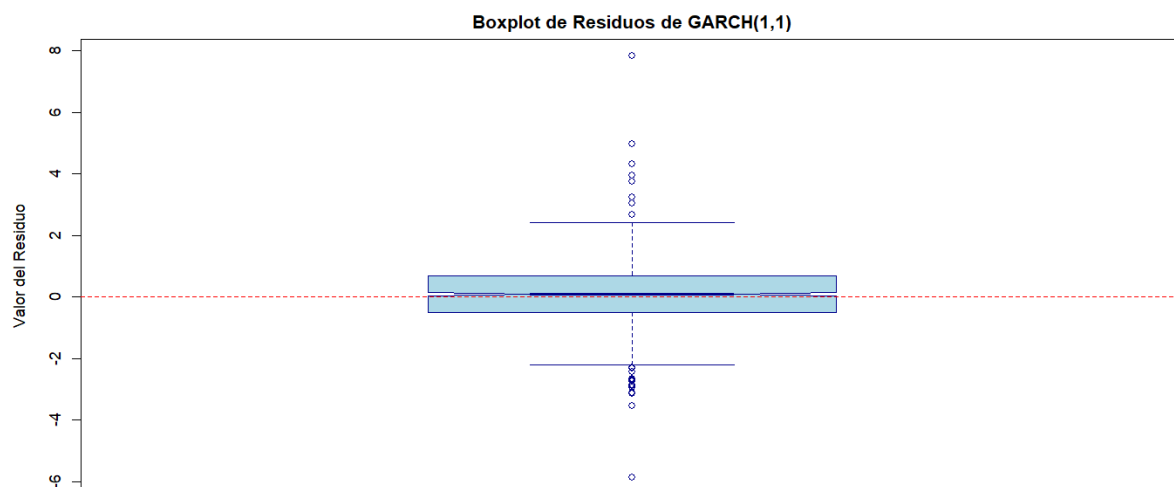


Figura 30. Boxplot sobre los residuos estandarizados de GARCH(1,1)

El análisis de los residuos del modelo evidencia una distribución estadísticamente simétrica, lo cual resulta fundamental para validar los supuestos del modelo GARCH empleado. La evaluación gráfica mediante el boxplot revela una mediana centrada en el rango intercuartílico, con bigotes de longitud comparable en ambos extremos y ausencia de valores atípicos que predominen en una dirección específica. Esta disposición equilibrada de los datos sugiere una dispersión uniforme en las colas de la distribución.

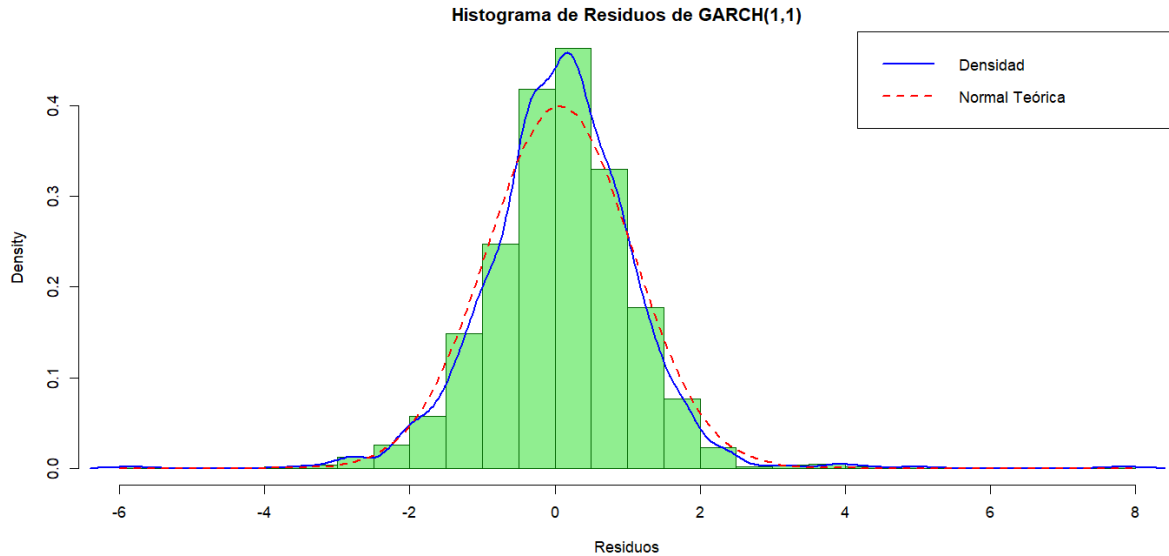


Figura 31. Histograma sobre los residuos estandarizados de GARCH(1,1)

La simetría de la distribución queda evidenciada por la equidistribución de las frecuencias a ambos lados del valor central, donde ambas colas del histograma decrecen de forma similar y armónica. Esta observación corrobora los resultados del boxplot, donde la mediana se ubicaba exactamente en el centro del rango intercuartílico con bigotes de igual longitud. La concordancia entre ambas representaciones gráficas refuerza la conclusión de simetría distributiva.

Como la distribución resultó ser simétrica, se procederá a evaluar la significancia de los coeficientes del modelo.

Significancia de los coeficientes

El siguiente paso fue realizar la prueba de significancia de los coeficientes del modelo ajustado.

Los contrastes de hipótesis de las pruebas individuales fueron:

- Para el coeficiente α_0

$$H_0: \alpha_0 = 0$$

vs.

$$H_1: \alpha_0 \neq 0$$

En la Figura 26, se puede observar que en la prueba individual de α_0 se tuvo $p - \text{valor} = 0.00549 < 0.05$ por lo que se rechaza la hipótesis nula, esto es, α_0 resultó

significativamente distinto de cero dado que las demás variables están incluidas en el modelo, por lo que no se incluye en el modelo, por lo que se incluye en el modelo.

- Para los coeficientes α

$$H_0: \alpha_1 = 0$$

vs.

$$H_1: \alpha_1 \neq 0$$

En la Figura 26, se puede observar que en la prueba individual de α_1 se tuvo $p - \text{valor} = 0.000007 < 0.05$ por lo que se rechaza la hipótesis nula, esto es, α_1 resultó significativamente distinto de cero dado que las demás variables están incluidas en el modelo, por lo que se incluye en el modelo.

- Para los coeficientes β

$$H_0: \beta_1 = 0$$

vs.

$$H_1: \beta_1 \neq 0$$

En la Figura 26, se puede observar que en la prueba individual de β_1 se tuvo $p - \text{valor} = 0 < 0.05$ por lo que se rechaza la hipótesis nula, esto es, β_1 resultó significativamente distinto de cero dado que las demás variables están incluidas en el modelo, por lo que se incluye en el modelo.

Como todos los coeficientes resultaron significativamente distintos de cero, el modelo resultante es un $GARCH(1,1)$

5. Pronósticos de la volatilidad estocástica

En la sección anterior se propuso un modelo $GARCH(2,2)$ para validar, sin embargo, se llegó a la conclusión de que el mejor modelo es un $GARCH(1,1)$ que tiene la forma:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

Donde

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ &= 0.000086 + 0.096624 r_{t-1}^2 + 0.836097 \sigma_{t-1}^2\end{aligned}$$

El siguiente paso es realizar los pronósticos de los cinco períodos a futuro mediante la función `model.forecast` en R:

```
0-roll forecast [T0=2025-04-22]:
      Series  Sigma
T+1         0 0.04596
T+2         0 0.04534
T+3         0 0.04476
T+4         0 0.04421
T+5         0 0.04368
```

Figura 32. Pronósticos a futuro con el modelo $GARCH(1,1)$

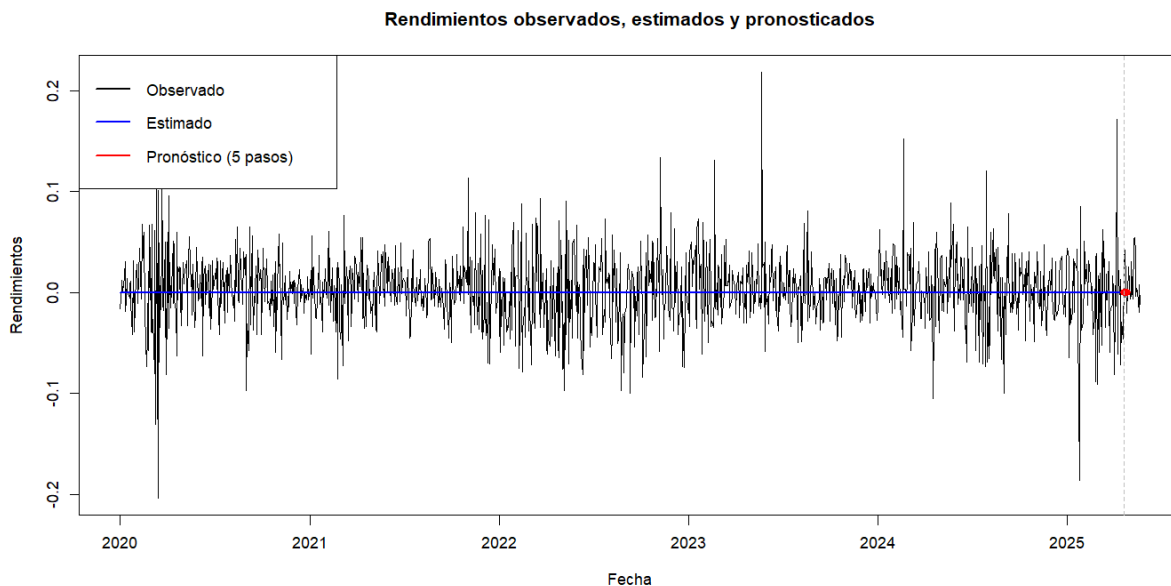


Figura 33. Rendimientos observados y estimados

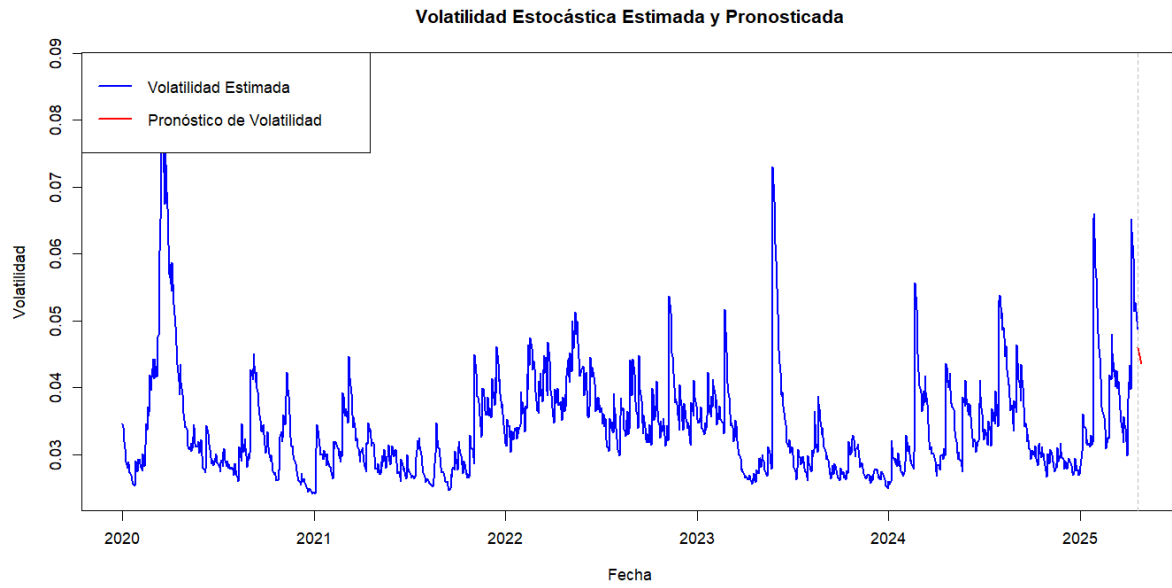


Figura 34. Volatilidad estimada y pronósticos