

Introducción

Se modeló matemáticamente el desplazamiento lateral de edificios con n grados de libertad, con un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, frente a excitación sísmica simulada como una onda sinodal. Se analizaron diferentes modelos de control activo (control lazo cerrado), con el objetivo de reducir el escalamiento producido por las frecuencias de resonancia del sistema.

Debido a esto un edificio ubicado en México debe de ser capaz de resistir un sismo de cierta magnitud gracias a la gran actividad sísmica del país

Modelación matemática de desplazamiento lateral sin control

El fenómeno de desplazamiento lateral con n grados de libertad en la modelación de un edificio se puede hacer con el esquema masa resorte amortiguador. Considerando masas concentradas m_i , resortes con una rigidez k_i y un coeficiente de amortiguamiento viscoso lineal β_i . El planteamiento matricial para n grados de libertad se define como [1]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_g(t)$$

El sistema en su representación de espacio de estados es [1]:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}\ddot{\mathbf{x}}_g(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}}_g(t)$$

La solución analítica al sistema en su espacio de estados se puede encontrar con:

$$\mathbf{z}(t) = \phi(t)\mathbf{z}(0) + \int_{t_0}^t \phi(t)\mathbf{x}_g(\tau)d\tau \quad (1)$$

Donde $\mathbf{z}(t)$ es un vector con el desplazamiento de cada masa, $\phi = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} = e^{\mathbf{A}t}$ y $t_0 = 0$ [1].

Caso de Prueba: Realizamos la simulación de un problema con base en el siguiente diagrama que fue recuperado de [2] (figura 1):

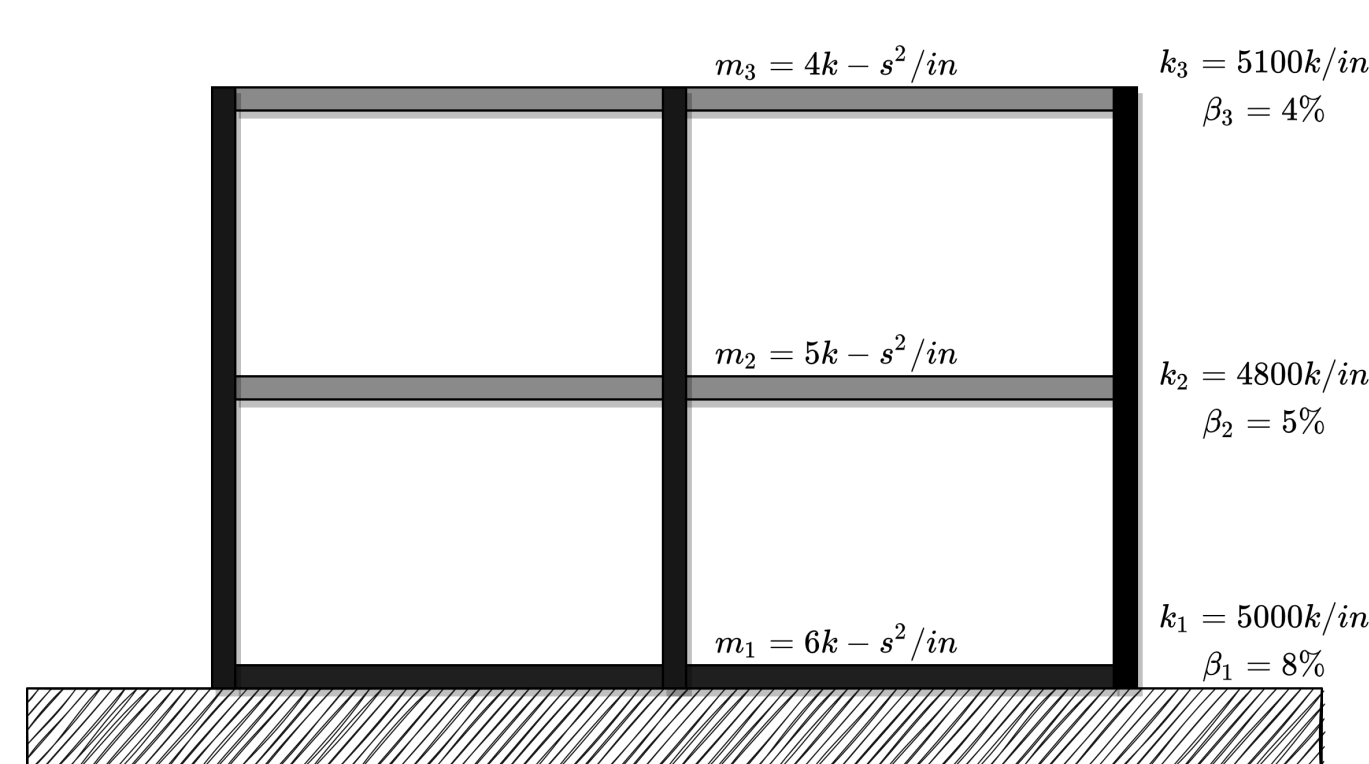


Figure 1: Caso de prueba propuesto.

Posterior a la construcción del sistema se hace análisis de estabilidad. Los valores propios de la matriz \mathbf{A} del sistema en espacio de estados:

$$\begin{aligned} &-0.0148 \pm 56.2820i \\ &-0.0086 \pm 38.8200i \\ &-0.0014 \pm 14.6176i \end{aligned}$$

El sistema es externa e internamente estable. Se procede a realizar el análisis de respuesta en frecuencia.

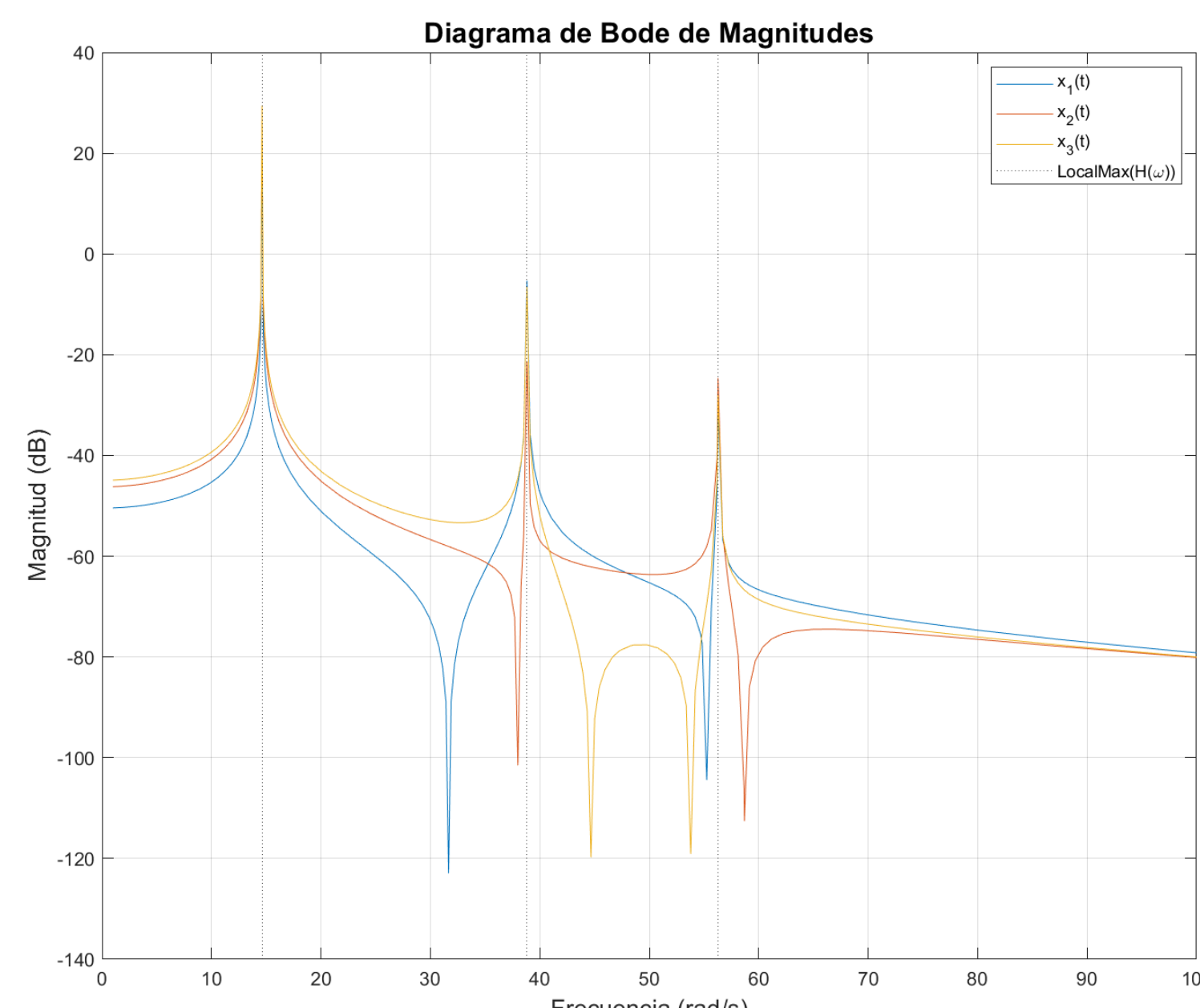


Figure 2: Gráfica de Magnitud de Bode.

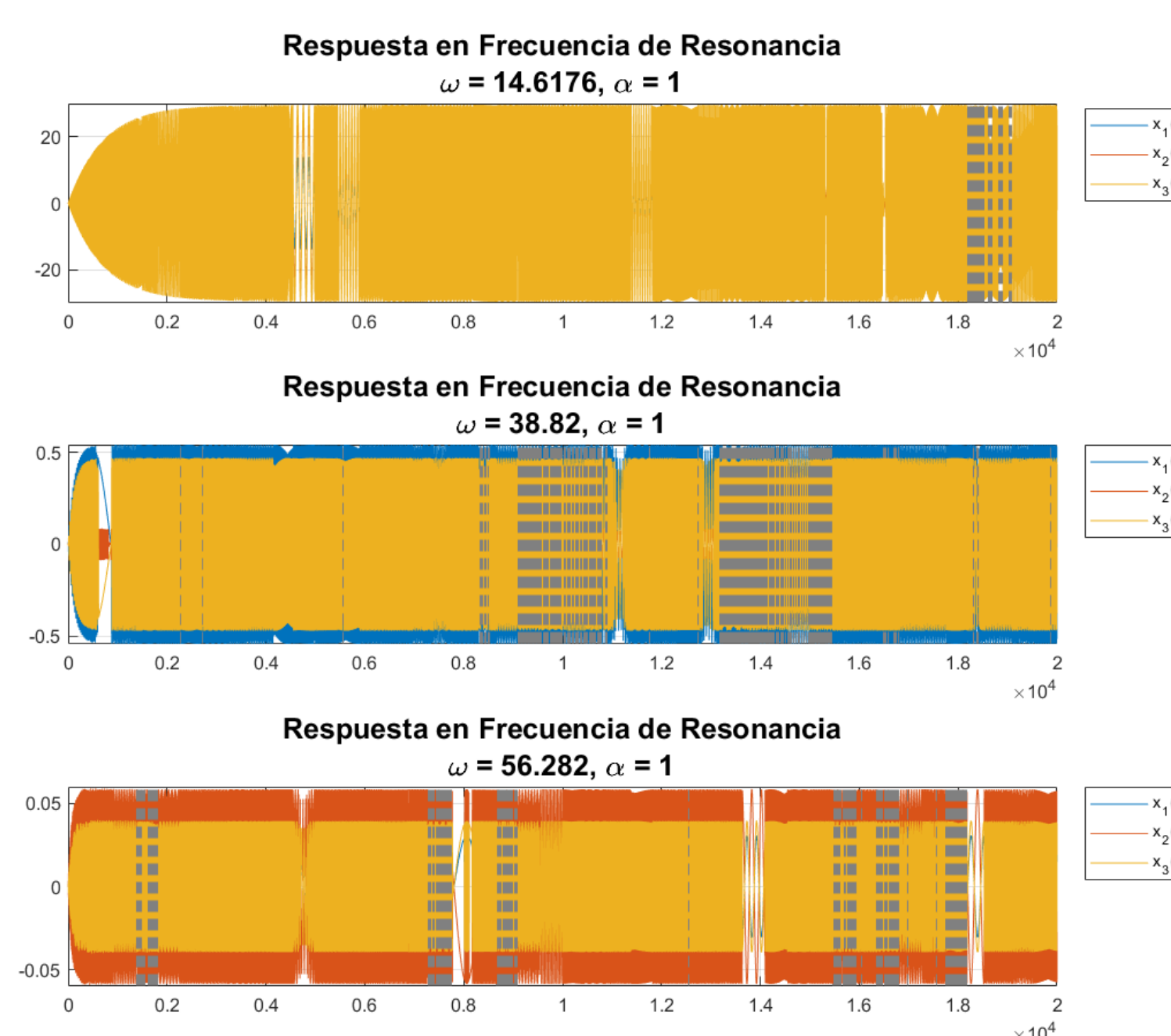


Figure 3: Respuesta en Frecuencias de Resonancia.

Se registraron 3 frecuencias de resonancia 14.6176, 38.82 y 56.282 (figura 2). En la figura 3 se observa la respuesta del sistema en estas frecuencias y la tendencia de las salidas a un comportamiento asintótico.

Modelación matemática de desplazamiento lateral con control

El sistema es interna y externamente estable, pero no significa que bajo excitación sísmica el edificio no se encuentre en peligro de daño estructural total o parcial. Se aplica control para reducir el efecto de la frecuencia de resonancia 14.6176 rad/s con un sistema de control en lazo cerrado (figura 4).

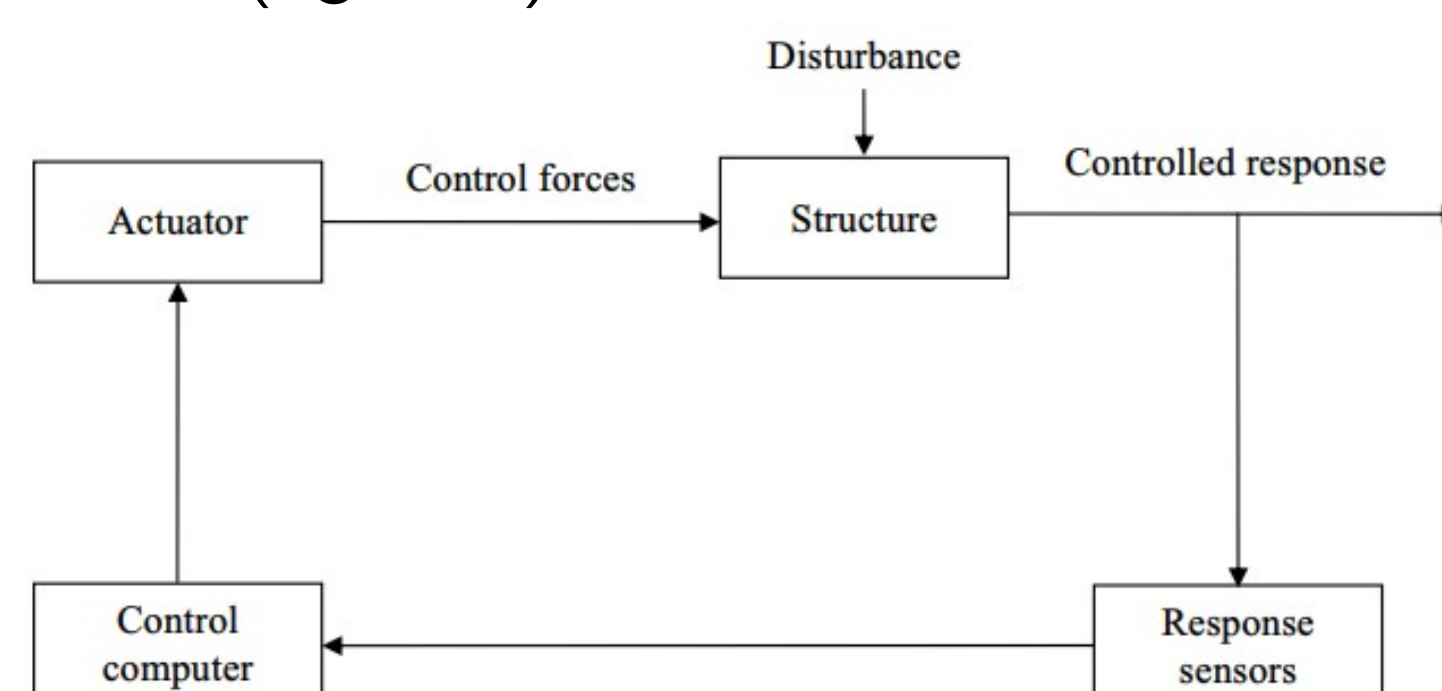


Figure 4: Esquema de control activo.

Se revisarán los siguientes casos de control activo [2]:

- Actuadores Hidráulicos
- Masa de Amortiguamiento Activo
- Actuadores Hidráulicos y Masa de Amortiguamiento Activo

Los esquemas de control se pueden representar genéricamente con la forma [2]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \gamma\mathbf{u}(t) + \delta\ddot{\mathbf{x}}_g(t)$$

El vector de fuerza de control es $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{G}\mathbf{z}(t)$. Y finalmente el sistema en su representación de estados [2]:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_u\mathbf{G})\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_r\ddot{\mathbf{x}}_g(t)$$

La matriz \mathbf{G} se eligió con el *Algoritmo de Riccati de Control Óptimo* [2]. Para el esquema de masa de amortiguamiento activo se proponen los siguientes parámetros: $m_d = 0.5k - s^2/in$ $b_d = 6\%$ $k_d = 4500k/in$.

Análisis y Simulación

Se realizaron simulaciones para observar el efecto de atenuación de la frecuencia de resonancia 14.6176 (rad/s) a 1000 segundos. Los 4 casos propuestos son Simulación Sin Control, Simulación con Actuadores Hidráulicos, Simulación con Masa de Amortiguamiento Activo, Simulación con Actuadores Hidráulicos y Masa de Amortiguamiento Activo.

Caso	ω_r (rad/s)	Escalamiento Máximo (dB)	Atenuación (dB)
0	14.6176	26.71	~
1	14.6174	-3.84	30.56
2	14.6168	-9.21	35.93
3	14.6165	-10.61	37.33

Table 1: Resumen de comparación entre esquemas de control.

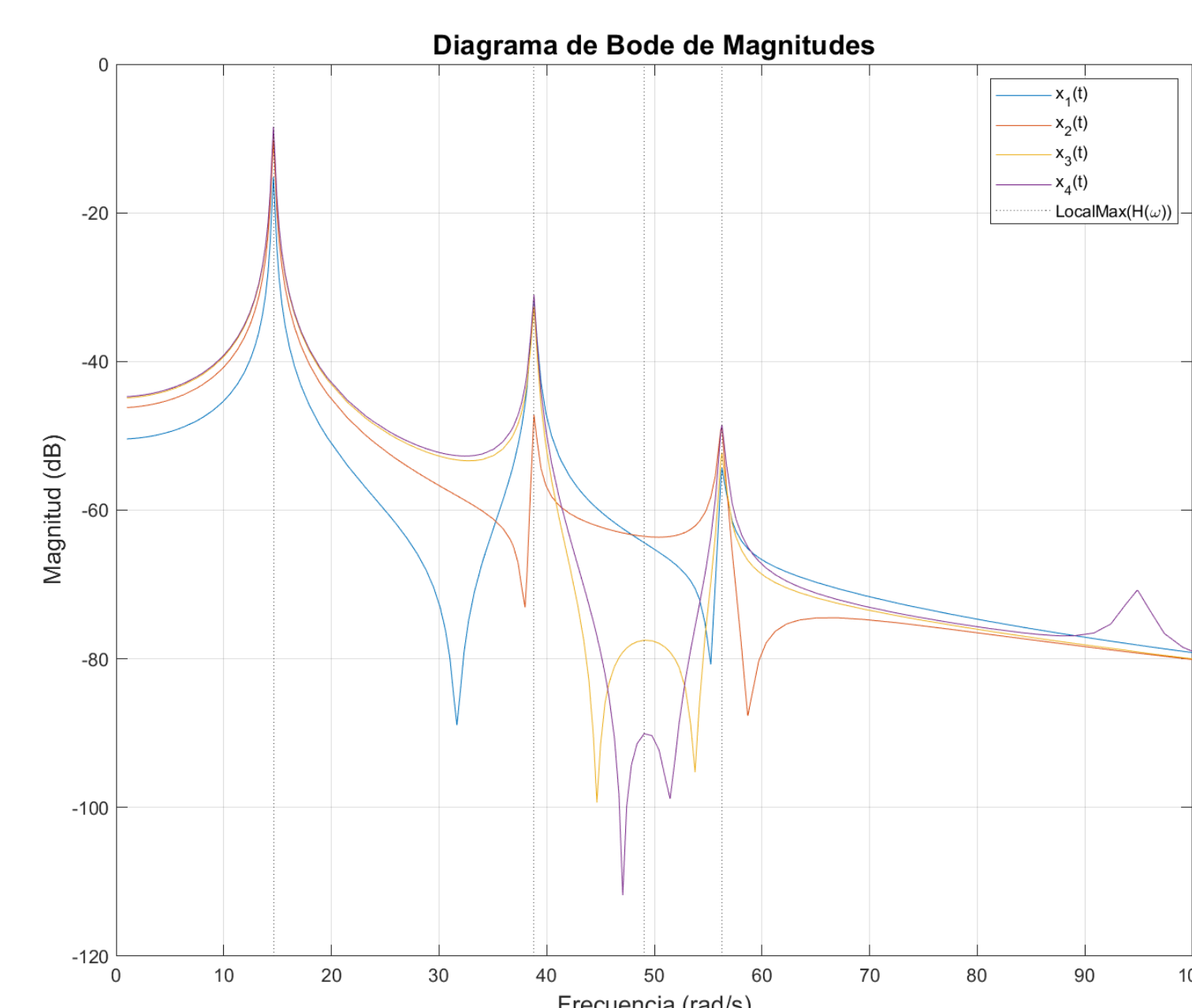


Figure 5: Gráfica de Magnitud de Bode para el Caso 3.

Conclusión

- El sistema sin control es externa e internamente estable.
- Se realizó control en este para atenuar las frecuencias de resonancia.
- El mejor esquema de control fue la combinación de esquemas revisados.
- La implementación puede mejorar bajo un diseño informado y sensible al contexto de un caso específico a tratar.

Referencias

- [1] Castaldo, P. *Integrated Seismic Design of Structure and Control Systems*. Springer International Publishing, 2014.
- [2] Cheng, F. *Smart Structures*. CRC Press, 2008.

Anexos

