

Modelado, análisis, simulación y control de un fenómeno vibratorio

Adrián A. Ferrer Orgaz¹, Carlos J. Ávila González¹, Elisa M. Bonilla Martín¹, and Enrique Maldonado Chavarría¹

¹Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

June 13, 2015

Abstract: Se modeló matemáticamente el desplazamiento lateral de edificios con múltiples grados de libertad, con un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, frente a excitación sísmica armónica simulada como una onda sinodal. En el análisis realizado de este modelo para 2 pisos y un techo (3 masas, 3 grados de libertad), se observó un sistema estable interna y externamente, cuya frecuencia de resonancia con mayor impacto a tiempo infinito genera un escalamiento en el desplazamiento lateral de las masa de 26,71 *dB*. Posteriormente, se analizaron modelos de control activo (control lazo cerrado), con el objetivo de reducir el escalamiento violento de esta frecuencia de resonancia. Se estudiaron los modelos de *Actuadores Hidráulicos Masa de Amortiguamiento Activo* y el diseño de leyes de control con el *Algoritmo de Riccati de Control Óptimo*. Se montaron ambos modelos en conjunto y por separado en el modelo sin control y se analizó el comportamiento frente a la frecuencia de resonancia destacada. Cada implementación de control tuvo el efecto esperado, una reducción satisfactoria en el escalamiento frente a la frecuencia de resonancia. El modelo con mejor atenuación del efecto resultó ser aquel que combina ambas técnicas de control activo. El código fuente, simulaciones y animaciones se ponen a disposición del lector en la sección de anexos.

Keywords: sismo, modelación estructural, sistema de ecuaciones diferenciales lineales, teoría de control, control óptimo

1. INTRODUCCIÓN

La República Mexicana se caracteriza por su gran actividad sísmica y volcánica. Hablando en el contexto de Placas Tectónicas, México se encuentra ubicado en el llamado *Cinturón de Fuego*, donde se registra la mayor parte de los movimientos telúricos a nivel mundial. La región de Mesoamérica, donde se encuentra ubicado México, se caracteriza por su alta actividad tectónica, resultado de la subducción de la *Placa de Cocos* a lo largo de la *Trinchera Mesoamericana*.

En México, según estadísticas se registran más de 90 sismos por año, con una magnitud que supera los cuatro grados en la escala de Richter (explicada más adelante), lo que equivale a un 60% de todos los movimientos telúricos que se registran en el mundo.¹

En la ingeniería, los edificios se consideran dentro de la categoría de las *estructuras*, cuyo propósito es de carga y/o transmisión de pesos. Entre las fuerzas y factores externos que pueden afectar a estas, se encuentran aquellas de tipo estáticas, como la gravedad, y dinámicas, como los sismos, que son el caso de estudio del presente documento. El sistema generado con la estructura y estos factores externos, produce una respuesta que se puede manifestar como deformación, en el caso estático, o vibración, en el caso dinámico. Uno de los enfoques del estudio de estos sistemas se encarga de garantizar la seguridad estructural de la misma y sus componentes frente a una o a un grupo de perturbaciones externas.

Los sismos se generan en el interior de la tierra y se propagan en todas direcciones en forma de ondas, pueden ser de corta duración y su intensidad varía, a menudo son producidos por la liberación espontánea de grandes cantidades de energía.

El principal motivo que se tiene para estudiar los sismos es para determinar el *Riesgo Sísmico*, que se refiere a la probabilidad de ocurrencia, dentro de un determinado tiempo y lugar, donde el sismo causará ciertas pérdidas o daños. En el riesgo influyen otras variables como el peligro sísmico, los posibles efectos locales de amplificación de ondas sísmicas, la vulnerabilidad de las estructuras de construcción, y la capacidad de respuesta de las instituciones y autoridades, así como las posibles pérdidas humanas y económicas. Este riesgo varía de una región a otra, dependiendo de la cercanía a las fallas activas, al tipo de suelo, a la edad y diseño de las edificaciones y en gran medida de la cantidad y tipo de asentamientos humanos y construcciones, cercanos a la ubicación del evento. El riesgo sísmico en la Ciudad de México tiene una variación enorme de una zona a otra debido a la heterogeneidad y comportamiento de los suelos, así como a la diversidad de los asentamientos humanos que se tienen en la república.¹

La problemática a resolver en el presente, se trata de una investigación y exploración del planteamiento ingenieril de estos sistemas, a través de modelación matemática, control enfocado a sismos y simulación computacional.⁶

1.1 Características de los sismos

Ahora bien, enfocándonos a los sismos, que son el objeto de nuestro estudio, encontramos que las causas más frecuentes por las que sucede un sismo, se mencionan a continuación:

- **Tectónica:** Generados por el movimiento de las placas tectónicas que frecuentemente chocan entre ellas y producen el movimiento de la Tierra, que afecta grandes extensiones.
- **Volcánica:** También ocurren cuando un volcán hace erupción, y estos eventos en general, no se extienden más allá de la zona de erupción.
- **Hundimiento:** Producido por la acción erosiva que tienen las aguas subterráneas en la corteza terrestre, esto genera un vacío que termina cediendo ante el peso de la parte superior produciendo vibraciones de poca magnitud.

- **Deslizamientos:** Ocasionados por el peso de las montañas que, al desgajarse y caer, producen vibraciones de poca magnitud alrededor.
- **Explosiones atómicas:** Realizadas por el ser humano y que tienen una repercusión en la corteza terrestre, y que generan los movimientos.

Los sismos cuentan con diversas características que los diferencian unos de otros, se conocen las siguientes:

- **Foco o Hipocentro:** Es el punto exacto donde se genera el sismo, se encuentra debajo de la superficie terrestre a uno 700 kilómetros de profundidad.
- **Epicentro:** Es la proyección del foco a la superficie terrestre, es decir, el punto exacto donde se genera el sismo a nivel superficial y donde alcanza su mayor intensidad.
- **Falla:** Es causada por la liberación de los esfuerzos impuestos por el terreno, de esta manera, la tierra vibra.
- **Ondas sísmicas:** Se propagan en todas direcciones y transmiten la fuerza que se generan en el foco sísmico hasta el epicentro en proporción a la intensidad y magnitud de cada sismo.

Estas características pueden ser observadas con mayor detalle en la figura 1.²

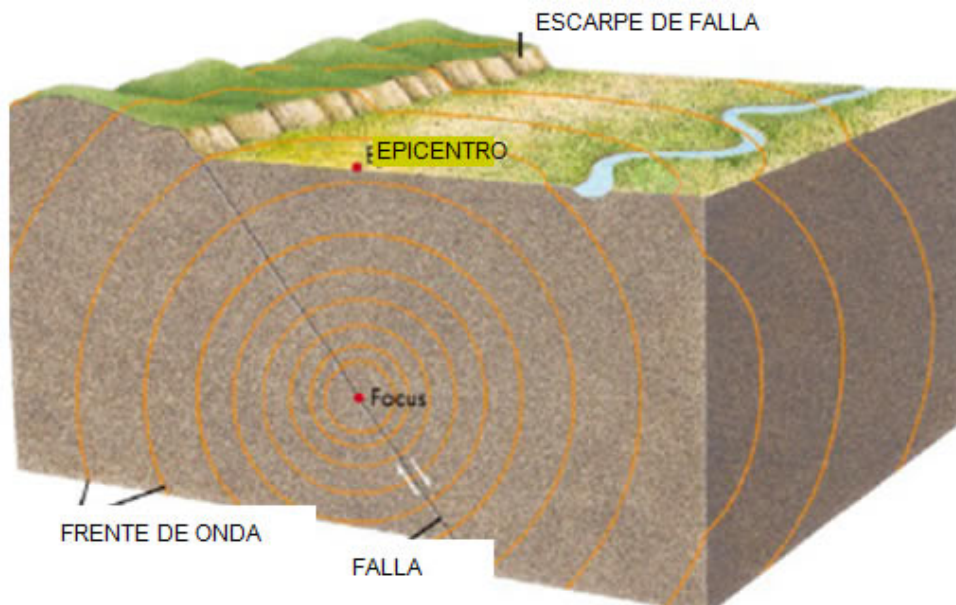


Figura 1. Características físicas de los sismos.²

1.2 Magnitud Richter

Antes de comenzar a con el análisis de los datos del Sistema Sismológico Nacional (SSN), se debe mencionar la forma en la que se miden los sismos. Esta forma de medición se conoce como **Escala de Magnitud o Escala de Richter** que esta relacionada con la energía liberada durante un temblor y se obtiene de forma numérica a partir de los registros obtenidos por los *sismógrafos*, esta es la manera más común y aceptada para la medición y la clasificación de los sismos.³

1.3 Análisis de los datos

Con el objetivo de observar las características sismológicas de nuestro país, nos dimos a la tarea de recurrir a los datos del Sistema Sismológico Nacional (SSN) y descargar los datos de los sismos registrados desde el *01 de enero de 1985* hasta el *12 de mayo de 2022*. La base de datos cuenta con 236,799 entradas y 10 columnas. A continuación, se presenta un desglose de las variables contenidas en la base de datos.⁴

Tabla 1. Descripción de las variables.⁴

Variable	Tipo	Descripción
Fecha	Cualitativa	Fecha del sismo en formato GMT-5
Hora	Cualitativa	Hora del sismo en formato GMT-5
Magnitud	Cuantitativa	Intensidad del sismo en escala Richter
Latitud	Cuantitativa	Coordenadas del epicentro
Longitud	Cuantitativa	Coordenadas del epicentro
Profundidad	Cuantitativa	Altura del epicentro
Referencia de localización	Cualitativa	Especificación de la ubicación del sismo
Fecha UTC	Cualitativa	Fecha del sismo en formato UTC
Hora UTC	Cualitativa	Hora del sismo en formato UTC
Estatus	Cualitativa	Estado de revisión del sismo

1.3.1 Tratamiento de los datos

Para manejar los datos de una forma sencilla y utilizar las variables de interés del equipo, la base de datos recibió una serie de técnicas de tratamiento que se pueden observar en la figura 2.

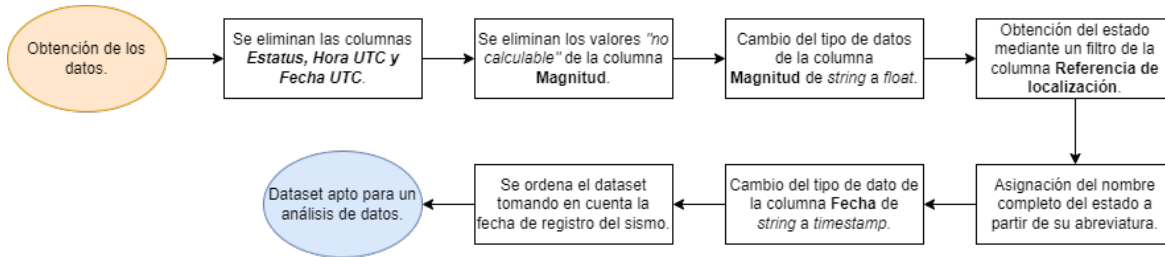


Figura 2. Diagrama de flujo del tratamiento de los datos.⁴

Con los datos procesados y tratados se procede a realizar un pequeño análisis de los datos para encontrar diversos insights que nos apoyen en la justificación de la elaboración de este proyecto, al igual que, observar la actividad telúrica que está presente en el país.

1.3.2 Magnitudes más comunes en México

Como ya se mencionó en la sección de introducción, México cuenta con una gran actividad telúrica a lo largo de su territorio, lo que se puede comprobar gracias a las magnitudes de los sismos que han sido registrados en los últimos 30 años. En el siguiente histograma se muestran las magnitudes de los sismos que han sido registrados en la base de datos del Servicio Sismológico Nacional.

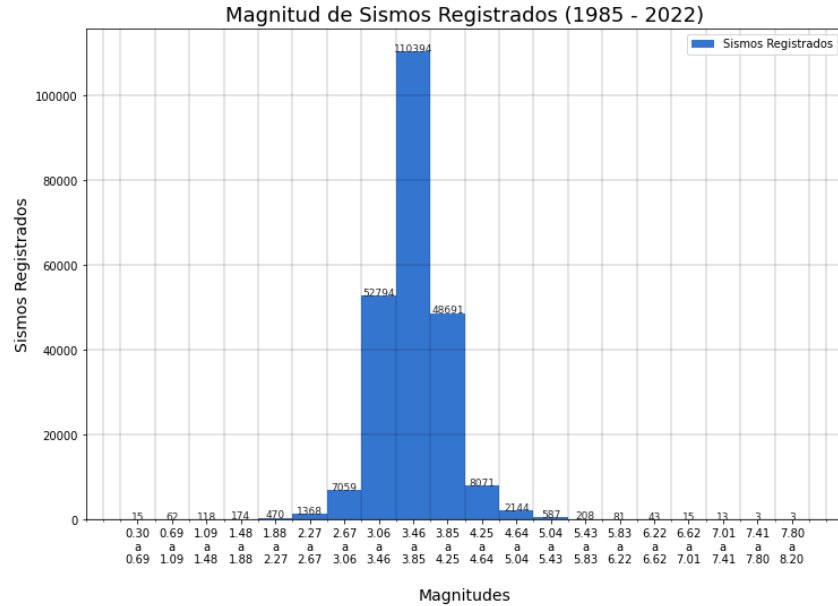


Figura 3. Histograma de magnitudes en México.⁴

De la figura 3 podemos observar que la gran mayoría de los sismos que han ocurrido en la república mexicana, se clasifican entre los 3.0 y 4.0 grados en la escala Richter. Teniendo esta información y apoyándonos en la tabla de magnitudes podemos decir que los sismos ocurridos en México pertenecen a la clasificación de *Ligero - Moderado* lo que significa que son sismos perceptibles, pero no tienen consecuencias graves tanto materiales como humanas.

1.3.3 Entidades con más sismos registrados

Con el fin de encontrar aquellas entidades federativas en las que más sismos se han registrado, se procedió a hacer una sumatoria de todos los sismos ocurridos por estado, los resultados se pueden ver en la siguiente gráfica de barras.

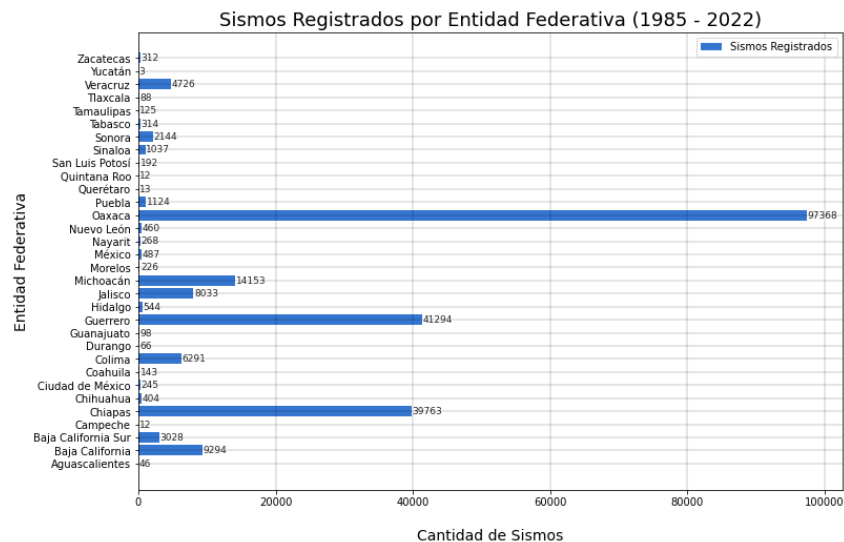


Figura 4. Sismos registrados por entidad federativa.⁴

De la figura 4 podemos observar que la mayoría de los sismos ocurrieron en los estados de *Oaxaca*, *Guerrero*

y *Chiapas*. Para explicar el por qué la mayoría de los sismos de México ocurren principalmente en estos tres estados, se graficó el número de sismos por estado en un mapa de la república mexicana.

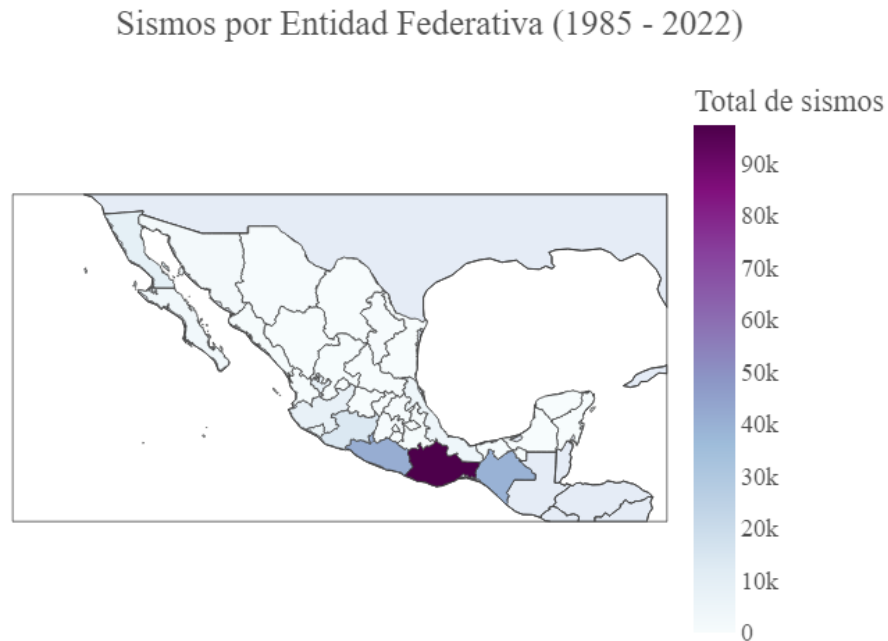


Figura 5. Mapa de los sismos registrados.⁴

Tomando como referencia la figura 5 y comparándola con la figura 6 observamos que los tres estados se encuentran en la costa del Océano Pacífico y, como sabemos, debajo de esta se encuentran la *Placa de Rivera* y la famosa *Placa de Cocos*, que ha sido responsable de los terremotos más devastadores que han sacudido a México. Teniendo estos datos podemos concluir que los sismos se concentran mayormente en los tres estados mencionados y que ocurren debido a su localización geográfica por encima de la Placa de Cocos.



Figura 6. Mapa de las placas tectónicas de México.¹²

1.3.4 Sismos registrados por año

Otro dato relevante a conocer es el número de sismos que se han ido registrando a lo largo de los años, para esto se procedió a contabilizar los registros de los sismos que ocurrieron por cada uno de los años en la base de datos, es decir, el total de los sismos anuales desde 1985 hasta 2022.

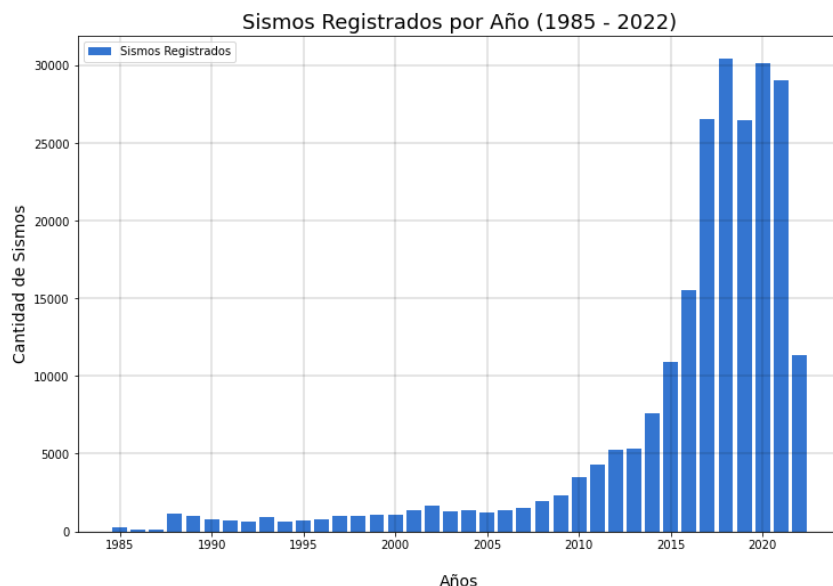


Figura 7. Sismos registrados por año.

En la figura 7 podemos notar que el número de sismos se incrementa de manera alarmante en el año 2016 y que, desde ese año, se ha mantenido por encima de los 25,000 sismos registrados anualmente. Esto último nos confirma que la actividad telúrica en México está incrementando y por ende se deben tomar medidas de precaución, que protejan a las comunidades y a las edificaciones ya que las consecuencias que se podrían llegar a presentar, si se produce un sismo mayor a la magnitud promedio que pudimos observar en los análisis anteriores.

1.4 Normas de construcción

Nuestro caso de estudio se concentra en la Ciudad de México, la capital del país y zona que ha sufrido el impacto económico y pérdidas humanas debido a los grandes sismos acontecidos en la nación. Es por esto que es importante tener un contexto sobre las políticas de construcción que rigen las edificaciones en México y cómo han evolucionado en los últimos años poniendo énfasis en el hecho que uno de los terremotos más fuertes del país sucedió en 2017.

Más adelante citaremos extractos del *Reglamento de construcciones para el Distrito Federal: Normas técnicas complementarias para diseño sísmico*, ediciones de 2013, 2017 y 2022, recuperados de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural.

1.4.1 Adiciones a la edición del 2013

En la edición del año 2013 se planteó que las Normas tuvieran como propósito dar una seguridad adecuada cumpliendo los puntos que se mencionaran a continuación.

- Bajo sismos que pueden presentarse varias veces durante la vida útil de la estructura, se tengan, a lo más, daños leves que requieran reparaciones menores y no interrumpan la operación de la construcción.
- Bajo el sismo máximo probable, no ocurran fallas estructurales mayores, ni pérdidas de vidas, aunque pueden presentarse daños que lleguen a afectar el funcionamiento de la construcción y requerir reparaciones importantes o inclusive, su demolición, como ya ha ocurrido .

Adicionalmente toda edificación deberá contar con un sistema estructural capaz de transmitir al sistema suelo-cimentación los efectos combinados de las fuerzas laterales de inercia generadas durante el sismo y de las fuerzas gravitacionales; se verificará que tanto la estructura como su cimentación resistan las fuerzas cortantes y axiales, momentos torsionantes de entrepiso y momentos de volteo inducidos por sismo, combinados con los que correspondan a otras solicitaciones y afectados por los factores de carga correspondientes.⁷

Una de las novedades más importantes de este año fue la *Zonificación Geotécnica* y la clasificación de estructuras por factor de importancia.

La primera define tres zonas que del tipo de suelo en el que están construidas:

- Zona I o de Lomas
- Zona II o de Transición
- Zona III o del Lago

La segunda presenta dos grupos de mayor interés y que por ende piden una mayor reglamentación durante los cálculos estructurales.

- **Grupo A1:** Edificios en los que es necesario que se mantengan operativos aún después de un sismo extraordinariamente severo, como hospitales, estaciones de bomberos, aeropuertos, instalaciones militares, estructuras para la generación y transmisión y distribución de electricidad, etc.) y construcciones cuya falla puede implicar un severo peligro para la población, por contener cantidades importantes de sustancias tóxicas o explosivas.
- **Grupo A2:** Construcciones cuya falla podría causar un número elevado de pérdidas de vidas humanas; como estadios, salas de reuniones, templos y edificios que puedan albergar más de 1000 personas. Además de construcciones que causen una afectación a la población particularmente vulnerable o aquellas edificaciones que generarían la pérdida de material de gran valor histórico o cultural (museos, monumentos, etc.).⁷

1.4.2 Adiciones a la edición del 2017

Tras el sismo de 2017 se tomaron nuevas consideraciones, por ejemplo:

En caso de que durante una construcción la estructura o alguna parte de ella pueda quedar en condiciones más desfavorables que las que pueden presentarse después de su terminación, deberá preverse desde la etapa de diseño, que durante su proceso de construcción la estructura tenga la capacidad de resistir las solicitaciones sísmicas obtenidas con un espectro de diseño definido según lo indicado.⁷

De igual forma se deja más clara la definición de *estructura regular*. Para que una estructura se considere regular debe satisfacer los requisitos siguientes:

1. Los diferentes muros, marcos y demás sistemas sismo-resistentes verticales son sensiblemente paralelos a los ejes ortogonales principales del edificio. Se considera que un plano o elemento sismo-resistente es sensiblemente paralelo a uno de los ejes ortogonales cuando el ángulo que forma en planta con respecto a dicho eje no excede 15 grados.
2. La relación de su altura a la dimensión menor de su base no es mayor que cuatro.
3. La relación de largo a ancho de la base no es mayor que cuatro.
4. En planta no tiene entrantes ni salientes de dimensiones mayores que 20 por ciento de la dimensión de la planta medida paralelamente a la dirección en que se considera el entrante o saliente.

5. Cada nivel tiene un sistema de piso cuya rigidez y resistencia en su plano satisfacen ciertas especificaciones.
6. El sistema de piso no tiene aberturas que en algún nivel excedan 20 por ciento de su área en planta en dicho nivel, y las áreas huecas no difieren en posición de un piso a otro.
7. El peso de cada nivel, incluyendo la carga viva que debe considerarse para diseño sísmico, no es mayor que 120 por ciento del correspondiente al piso inmediato inferior.
8. En cada dirección, ningún piso tiene una dimensión en planta mayor que 110 por ciento de la del piso inmediato inferior.
9. Todas las columnas están restringidas en todos los pisos en las dos direcciones de análisis por diafragmas horizontales o por vigas.
10. Todas las columnas de cada entrepiso tienen la misma altura, aunque esta pueda variar de un piso a otro.
11. La rigidez lateral de ningún entrepiso difiere en más de 20 por ciento de la del entrepiso inmediatamente inferior.
12. En ningún entrepiso el desplazamiento lateral de algún punto de la planta excede en más de 20 por ciento el desplazamiento lateral promedio de los extremos de la misma.⁷

1.4.3 Adiciones a la edición del 2020

A pesar de no mostrar cambios significativos mantiene todos los aciertos de sus ediciones pasadas y debe leerse a profundidad al ser la versión sobre la cuál se rigen actualmente las construcciones.⁷

1.5 Opinión de la comunidad profesional

Aún tras las diversas actualizaciones que han traído los últimos años, la gente involucrada en la construcción y cumplimiento de estas normas siguen sin estar satisfechos con los marcos legales que existen actualmente.

Fernando Torroella, arquitecto y director responsable de obra, lidera estas inconformidades en una entrevista para Noticias Milenio junto con propuestas para mejorar este contexto. Propone la creación de un código urbano junto con castigos más severos para los directores responsables de la obra.

Estas sugerencias no vienen de un capricho de los expertos. Según las normas de la ciudad las edificaciones en la CDMX deben estar calculadas para soportar sismos de magnitud 10. Cosa que en el último lustro se ha evidenciado no es así.⁸

1.6 Control

De una manera informal, se podría decir que un problema de control consiste en seleccionar, de un conjunto específico o arbitrario de elementos (o parámetros, configuraciones, funciones, etc), aquellos que aplicados a un sistema fijo, hagan que dicho sistema se comporte de una manera deseada o que se alcance un estado definido por el autor.

A continuación, se presentan algunas definiciones vitales para el estudio de la *Teoría de Control*, así como de los *Sistemas de Control*:

- **Planta:** Cualquier objeto físico que pueda ser controlado. Puede ser cualquier objeto cuyo objetivo sea llevar a cabo una operación determinada.
- **Proceso:** Se define como una operación o conjunto de procesos que producen una serie de cambios graduales que llevan de un estado a otro, y que tienden a un determinado resultado final. Se denomina proceso a cualquier operación que se desee controlar.

- **Sistema:** Podemos definir un sistema como un arreglo o conjunto de cosas conectadas o relacionadas de manera que se constituya un todo. Es una combinación de componentes que actúan en conjunto, con un determinado objetivo a cumplir.
- **Entrada de un sistema** Es una variable del sistema elegida de tal manera que se la utiliza como excitación del mismo.
- **Salida de un sistema:** Es una variable del sistema elegida de tal modo que sea utilizada para analizar los efectos que produjo una excitación en la entrada del mismo.
- **Control:** Esta palabra se puede designar a la regulación, dirección o comando de un sistema.

En general, podemos decir que la *planta* junto con el *proceso* son los dos componentes que conforman a un sistema. Si a este sistema se le proporciona una salida deseada o algunos parámetros requeridos para su funcionamiento, entonces el sistema se transforma en un *Sistema de Control*.¹¹

1.7 Sistema de control

Un sistema de control es un arreglo de componentes físicos conectados de tal manera que el arreglo pueda comandar, dirigir o regular, asimismo o a otro sistema. Estos sistemas comandan, dirigen o controlan dinámicamente su salida para que esta cumpla con ciertos requisitos a partir de la entrada o excitación que estos reciben.

La características específicas de estos sistemas son:

- **Entrada de un sistema de control:** Es una variable del sistema controlado que se elige de modo tal que mediante su manipulación se logra que el sistema cumpla con un objetivo determinado. Estas son variables que ingresan al sistema y no dependen de ninguna otra variable interna del mismo.
- **Salida de un sistema de control:** Es una variable del sistema controlado que se elige de modo tal que mediante su estudio se analiza si el sistema cumple o no con los objetivos propuestos. Se verá más adelante que, en los sistemas realimentados, esta señal de salida contribuye a realizar el control propuesto.
- **Realimentación:** Es una propiedad de los sistemas que permiten que la salida del sistema o cualquier variable del mismo sea comparada con la entrada al sistema o con cualquier componente del sistema, de tal manera que pueda establecerse la acción de control apropiada entre la entrada y la salida.¹¹

2. ANÁLISIS DEL SISTEMA

2.1 Torre Ejecutiva Pemex

Ya contando con un entendimiento acerca de cómo funcionan los sismos y habiendo analizado las características sismológicas en nuestro país, conociendo además las políticas de construcción actuales e históricamente existentes, nosotros decidimos elegir la Torre Ejecutiva Pemex para así observar los efectos que tienen los sismos en esta.

2.1.1 Antecedentes

En 1979 comenzó la construcción de este rascacielos, al mando de Pedro Moctezuma que previamente inició diseñando en 1976. Tres años más tarde de iniciada su construcción, fue ocupada por primera vez. La altura de este gran edificio es de 214 mts y cuenta con 53 pisos. En total toda la estructura pesa aproximadamente 110 mil toneladas y está soportada por 164 pilas plantadas a un poco más de 32 metros bajo el suelo, estas tienen una capacidad de carga de hasta 1000 toneladas cada una.⁹

2.1.2 Tecnología Sísmica

Adicionalmente a estos detalles de construcción y debido al hecho de que el edificio está localizado en una de las zonas de mayor riesgo sísmico en la Ciudad de México, la torre fue diseñada para soportar sismos de 8.5 grados en la escala Richter. Algunas de las tecnologías con las que cuenta, son una serie de diagonales que definen marcos cada 16 pisos, además de que el edificio está equipado con armaduras horizontales tipo diafragma en los pisos 21 y 37, ligando con las diagonales, por lo que todo esto ayuda a reducir los movimientos horizontales para que así se pueda mantener la estructura del edificio. Es importante mencionar que en el caso de que un sismo de gran magnitud ocurra, la torre empezará a oscilar hasta 1.80 metros durante varios segundos.⁹

A continuación se muestra un diagrama que nos deja ver toda la información explicada anteriormente.

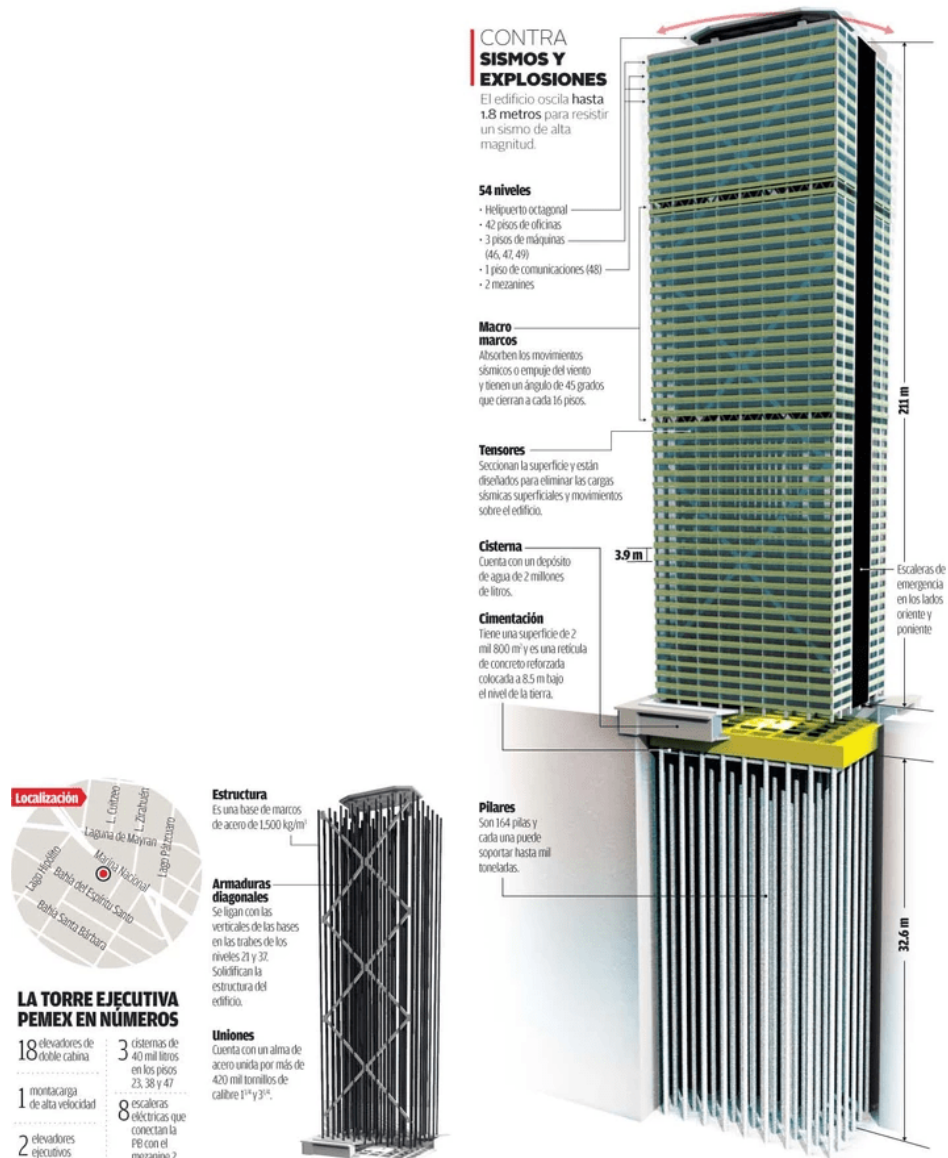


Figura 8. Diseño de la Torre Ejecutiva Pemex.¹⁰

Este edificio ha sido puesto a prueba en repetidas ocasiones como el 19 de septiembre de 1985, cuando un terremoto de 8.1 grados Richter, sacudió por aproximadamente 2 minutos a la Ciudad de México. Asimismo logró superar los sismos que duraron más de 2 minutos del 7 y 19 septiembre de 2017 que tuvieron una magnitud de 8 y 7.1 grados respectivamente.⁹

El crear un modelo matemático del edificio nos ayudará a representar la conducta real de la estructura, además de que podremos observar si es necesario incorporar más medidas que ayuden al edificio a soportar un sismo de gran magnitud o medidas que optimicen el sistema ya implementado. Aunado a esto se podrían realizar una serie de simulaciones que ayudarían al personal en las propuestas de mejora para estructuras de nuevas edificaciones que compartan características con este rascacielos.

3. MODELADO MATEMÁTICO DE DESPLAZAMIENTO LATERAL SIN CONTROL

En el estudio del diseño sísmico para estructuras se consideran modelados principalmente dinámicos debido a la naturaleza del sismo en sí.⁵ La abstracción matemática del diseño de edificios nos permite generar modelos con grados de libertad únicos y múltiples que describen el fenómeno del desplazamiento lateral de estas estructuras. En el caso de la respuesta sísmica sin ningún elemento disipador de energía, se puede modelar este fenómeno considerando masas concentradas m_i , con apoyos que constan de resortes con una cierta constante rigidez k_i y una constante de amortiguamiento de viscosidad lineal β_i . El desplazamiento lateral se define como $x_i(t)$, y la excitación de la entrada sísmica causante del desplazamiento lateral $x_g(t)$. Ya que tanto la rigidez como el amortiguamiento son lineales se puede construir el siguiente modelo de ecuaciones diferenciales lineal para un sistema con un grado de libertad:⁵

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_g(t) \quad (1)$$

Donde la entrada sísmica causante del desplazamiento lateral de la estructura se entiende por el término $-m\ddot{x}_g(t)$.^{5,6}

Además, el desplazamiento total se puede calcular de la siguiente forma:

$$x_{tot} = x(t) + x_g(t) \quad (2)$$

En el caso de tener un sistema de control integrado la ecuación 1 se reescribe de la forma:

$$(m + \bar{m})\ddot{x}(t) + (\beta + \bar{\beta})\dot{x}(t) + (k + \bar{k})x(t) = -(m + \bar{m})\ddot{x}_g(t) \quad (3)$$

Donde $\bar{m}, \bar{\beta}, \bar{k}$ corresponden a la aportación de sistema de control integrado. En esta sección se modelará sin un sistema de control integrado o despreciando la aportación de este, se hará el análisis matemático a partir de la ecuación 1.

Al dividir la ecuación 1 por la masa m se obtiene una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuya forma se puede analizar de forma genérica:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = -\ddot{x}_g(t) \quad (4)$$

Donde la frecuencia natural se define como:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

y ζ es la tasa de amortiguamiento:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega} \quad (6)$$

Esta tasa de amortiguamiento se puede subdividir conceptualmente de la siguiente forma:

$$\zeta = \zeta_s + \zeta_d \quad (7)$$

Donde ζ_s es el amortiguamiento natural de la estructura y ζ_d el amortiguamiento atribuido al sistema de control presente en el sistema. En el caso de este modelo no hay presencia de un sistema de amortiguamiento por lo que $\zeta = \zeta_d$. En la mayoría de las estructuras reales relacionadas al diseño ingenieril sísmico los sistemas entran en el caso de subamortiguamiento donde $1 > \zeta > 0$.⁵ La respuesta total del sistema se puede escribir como:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) - \frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) d\tau \quad (8)$$

Donde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ es la frecuencia natural amortiguada C_1 y C_2 es son constantes a determinar por las condiciones iniciales. Estas constantes se definen como:

$$C_1 = x(0) \quad (9)$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}(0) + \omega_n x(0)\zeta}{\omega_d} \quad (10)$$

La respuesta total se puede dividir en respuesta a estado cero y respuesta a estado estacionario. De la ecuación 8 se tiene:

$$x_{ss}(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) \quad (11)$$

$$x_{s0}(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) d\tau \quad (12)$$

Considerando que la estructura a estudiar tiene respuesta a estado estacionario cero (condiciones iniciales cero), la respuesta total se reescribe como:⁵

$$x_{total} = x_{s0} = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) d\tau \quad (13)$$

3.1 Modelado de sistemas con n grados de libertad

El modelado matricial para sistemas con grados de libertad mayores a uno es análogo a la ecuación 1 de un grado de libertad.⁶

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_g(t) \quad (14)$$

La matriz \mathbf{M} tiene la forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & m_m & \dots & 0 & 0 \\ & sym. & & & \ddots & & \\ & & & & & m_{n-1} & \\ & & & & & & m_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

La matriz \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 & & 0 & & 0 & 0 \\ & b_2 + b_3 & & 0 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & b_m + b_{m+1} & \dots & 0 & 0 \\ & sym. & & & \ddots & & \\ & & & & & b_{n-1} + b_n & -b_n \\ & & & & & & b_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

Y finalmente la matriz \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & 0 & & 0 & 0 \\ & k_2 + k_3 & & 0 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & k_m + k_{m+1} & \dots & 0 & 0 \\ & sym. & & & \ddots & & \\ & & & & & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & & & & k_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

Donde \mathbf{M} , \mathbf{B} y \mathbf{K} representan las matrices de masas concentradas, amortiguamiento y rigidez. El sistema diferencial matricial anterior se puede escribir en su representación de espacio de estados:⁵

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}(t) \quad (18)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}(t) \quad (19)$$

El vector $\mathbf{z}(t)$ de longitud $2N$ conteniendo $x_i(t)$ y $\dot{x}_i(t)$ para todo i relacionado a cada uno de los N grados de libertad:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

La matriz \mathbf{A} y el vector \mathbf{b} tienen la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \quad (21)$$

La matriz \mathbf{C} y \mathbf{D} :

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I}_{n \times n} \quad \mathbf{0}_{n \times n}] \quad \mathbf{D} = [\mathbf{0}_{n \times 1}] \quad (22)$$

De 18 se puede encontrar una solución analítica de la respuesta del sistema con el método de transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}(t) \\ s\mathbf{Z}(s) - \mathbf{z}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{Z}(s) + \mathbf{b}\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}(s) \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Z}(s) &= \mathbf{z}(0) + \mathbf{b}\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}(s) \\ \mathbf{Z}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{z}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}(s) \end{aligned}$$

$$\mathbf{z}(t) = \Phi(t)\mathbf{z}(0) + \int_{t_0}^t \Phi(t)\mathbf{b}\ddot{\mathbf{u}}_g(\tau)d\tau \quad (23)$$

Donde $\Phi = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} = e^{\mathbf{A}t}$ y $t_0 = 0$. Finalmente de 19 y 23 se obtiene la solución del sistema.

3.2 Caso de prueba

En esta sección de **Modelado Matemático sin Control** se realiza la simulación de un problema con base en el ejemplo 2.1.1 modificado del libro *Smart Structures*⁶ (figura 9). Las modificaciones realizadas consisten en la inclusión de un piso con características similares a los propuestos en el original, la rigidez y el porcentaje de amortiguamiento se le atribuye a las características inherentes de la estructura.

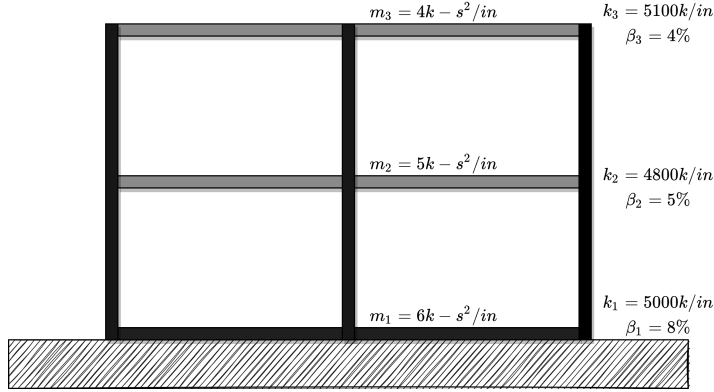


Figura 9. Diagrama del problema planteado.

De la ecuación 14 se procede a generar las matrices 15, 16 y 17 para construir el modelo de 3 grados de libertad:

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,1300 & -0,0500 & 0 \\ -0,0500 & 0,0500 & -0,0400 \\ 0 & -0,0400 & 0,0400 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$K = \begin{bmatrix} 9800 & -4800 & 0 \\ -4800 & 9900 & -5100 \\ 0 & -5100 & 5100 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Adicionalmente, según la modelación realizada en *Smart Structures*⁶ la excitación sísmica se modelará con una función sinodal con la forma:

$$\ddot{x}_g(t) = \alpha \sin(\omega t) \quad (27)$$

Nótese que contrario a la intuición, el sistema modelado con 3 grados de libertad propuesto simula 3 masas que componen al edificio de dos pisos y no tres. Es posible establecer el modelo de forma que cada grado de libertad corresponda a cada piso. Sin embargo, el modelo propuesto, síntesis de las propuestas encontradas en la bibliografía consultada^{5,6} modela 3 masas que en este caso corresponden a dos pisos y un techo.

3.2.1 Espacio de estados

Para realizar el análisis del planteamiento matricial obtenido con 24, 25 y 26, se transforma el sistema a su forma de espacio de estados según las ecuaciones 18 y 19 con las construcciones 21 y 22:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,0010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0010 \\ -1,6333 & 0,8000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,9600 & -1,9800 & 1,0200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2750 & -1,2750 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Consecuentemente, las matrices generadas representan al sistema de la figura 9 en su forma de espacio de estados.

3.2.2 Análisis de estabilidad

Posterior a la generación de la forma de espacio de estados, se obtienen los valores propios de la matriz **A**, que representan los polos en la función de transferencia del sistema completo:

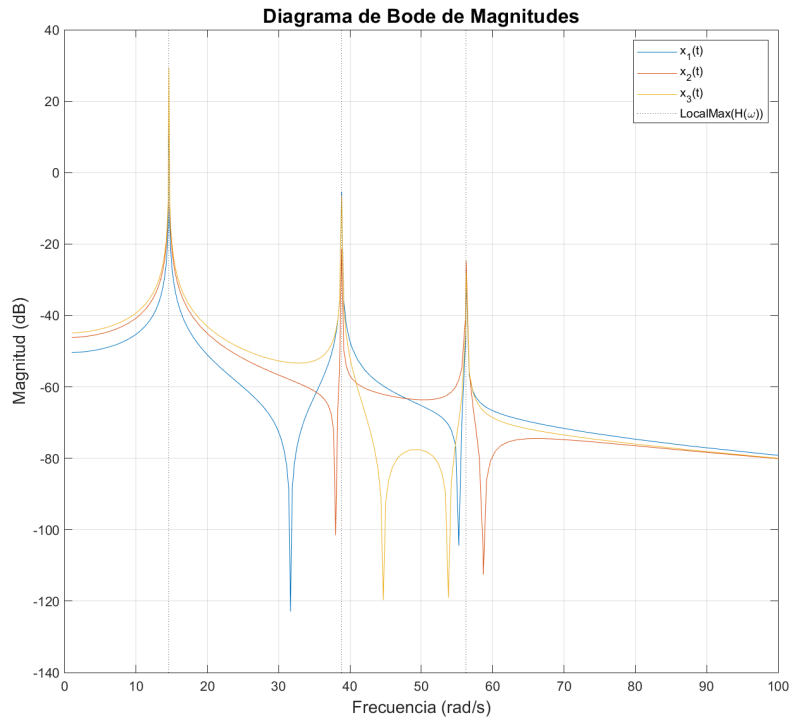
Tabla 2. Valores propios del sistema.

λ
$-0,0148 \pm 56,2820i$
$-0,0086 \pm 38,82i$
$-0,0014 \pm 14,6176i$

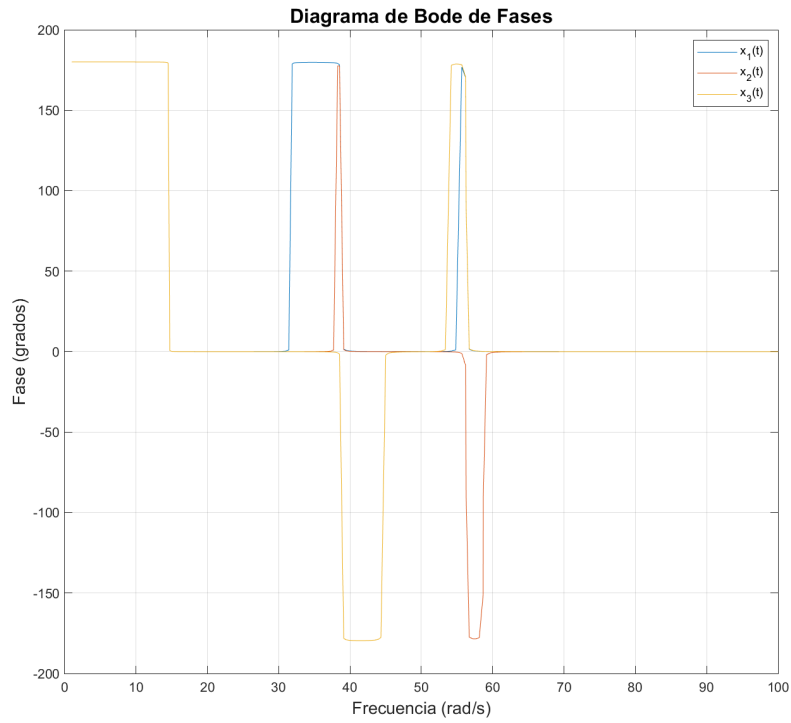
Tomando en cuenta los valores propios obtenidos (tabla 2) podemos observar que todos cuentan con parte real negativa, esto nos indica que el sistema que se tiene es **BIBO-estable**, es decir, que para toda entrada acotada, la respuesta que se tiene también es acotada. De la misma manera, se concluye que el sistema es asintóticamente estable de acuerdo al criterio de Lyapunov, por lo que el estado estacionario de este tiene un comportamiento asintótico a cero frente a condiciones iniciales cero y ninguna entrada.

3.2.3 Análisis del sistema

Se realizan los diagramas de magnitud y fase de Bode para analizar la respuesta en frecuencia del sistema:



(a) Diagrama de Magnitudes de Bode.



(b) Diagrama de Fases de Bode.

Figura 10. Diagramas de Bode.

Como se puede observar en la figura 10(a), se registraron 3 valores de escalamiento máximos comunes para todas las masas, en las frecuencias 14.6176, 38.82 y 56.282. Estas frecuencias corresponden a las frecuencias de resonancia, es decir, producen un escalamiento particular a la salida en respuesta a frecuencia. Posteriormente, se observará el efecto de estas frecuencias de resonancia en la salida analítica del sistema.

Adicionalmente, para complementar el análisis anterior se procedió a generar el diagrama de desplazamiento de fase de Bode (figura 10(b)), donde se puede visualizar si existe un desplazamiento de fase en grados de la salida tomando en cuenta la estructura de la entrada.

3.2.4 Solución Analítica del Sistema

Posteriormente, se procedió a realizar la solución analítica del sistema asumiendo condiciones iniciales cero con las ecuaciones 23 y 19. La solución es una función $\mathbf{x}(t, \alpha, \omega)$, donde α y ω son la amplitud y frecuencia de la función sinusoidal de entrada (ecuación 27). Debido a la complejidad de las ecuaciones generadas por el método de solución, sumado a la poca flexibilidad de simplificación resultante de estar en términos de α y ω , únicamente los resultados gráficos serán incluidos (se puede consultar la solución en MATLAB: <https://adrianferrero.github.io/ModelacionMatematicaControlDeSismos/>). Finalmente, se realizaron visualizaciones del comportamiento de la solución del sistema en los siguientes casos:

1. Respuesta y Espacio de Estados en Frecuencia de Resonancia
2. Respuesta y Espacio de Estados en Frecuencias (ejemplos de α y ω arbitrarios)

Como se puede observar en la figura 11, las amplitudes de las respuestas en el tiempo tienen una tendencia creciente, efecto de ser excitadas por las frecuencias de resonancia. Al analizar la figura 12, se puede observar de nuevo la salida (puesto que debido al planteamiento de la forma de espacio de estados, tres de estos corresponden a la solución del sistema) y se observa que el resto de estados oscila con amplitudes no mayores a 0.5.

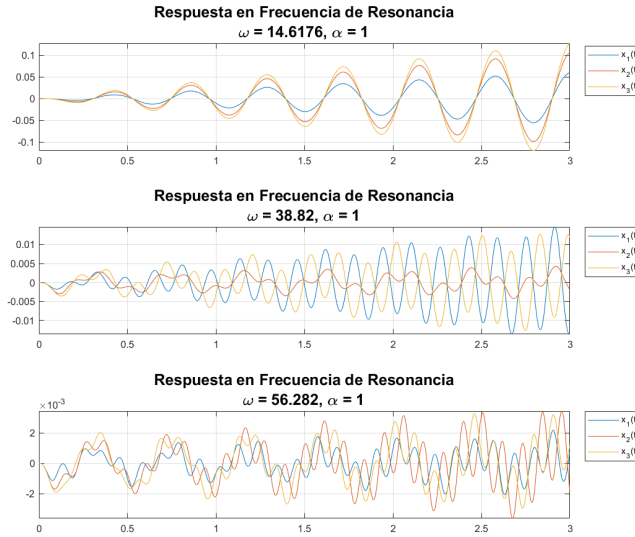


Figura 11. Gráficas de la respuesta en frecuencia de resonancia con $\alpha = 1$.

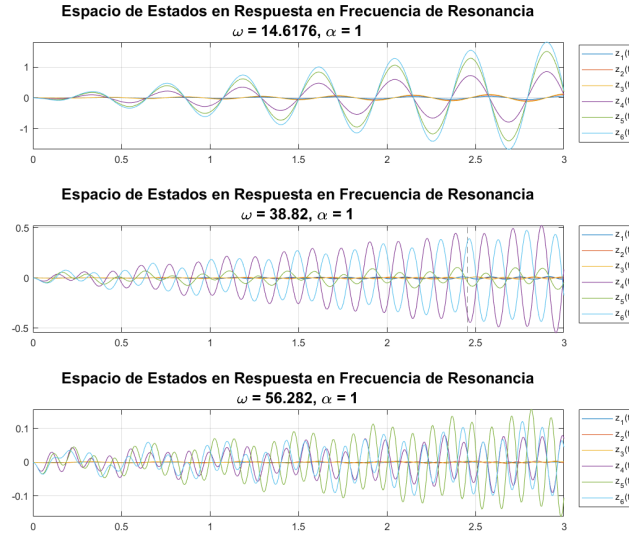


Figura 12. Gráficas del espacio de estados en respuesta en frecuencia de resonancia con $\alpha = 1$.

A simple vista, parecería que el crecimiento de las amplitudes tienen una tendencia creciente hacia infinito en un tiempo infinito. Sin embargo, en la figura 13 se puede observar que posteriormente en el tiempo, en los tres casos la salida es acotada (resultado congruente con la conclusión del análisis de la estabilidad del sistema). En los tres casos, se puede observar que el crecimiento de las amplitudes en el tiempo adopta un comportamiento asintótico.

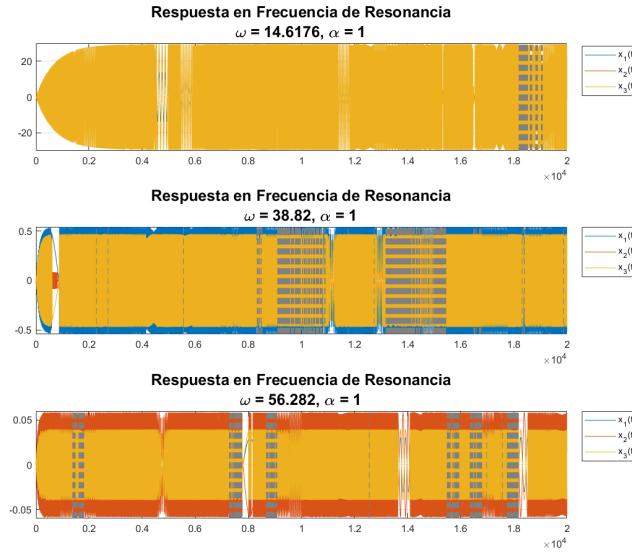


Figura 13. Gráficas de la respuesta en frecuencia de resonancia con $\alpha = 1$ hasta un tiempo $t = 800$.

Finalmente se realizaron otras tres configuraciones de α y ω para observar el comportamiento del sistema. En la figura 14, se pueden observar estos resultados, y adicionalmente, en la figura 15 el comportamiento de los estados con estas entradas diseñadas.

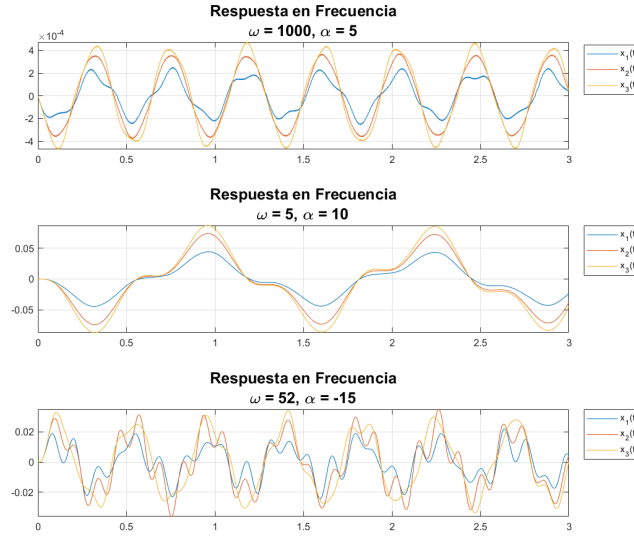


Figura 14. Gráficas de la respuesta en frecuencia de entradas diseñadas.

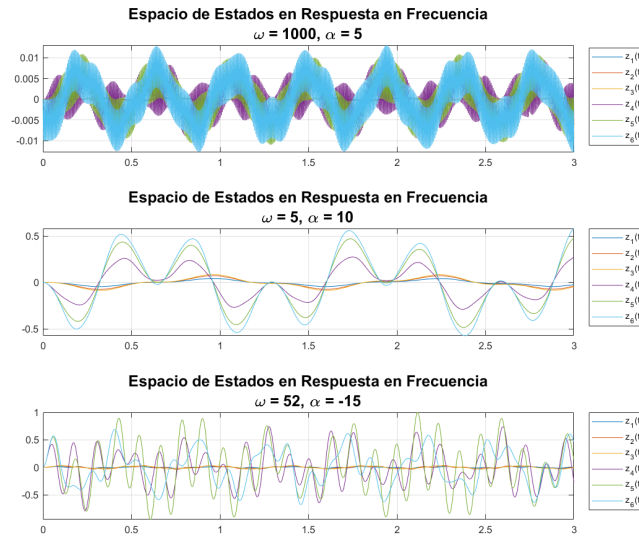


Figura 15. Gráficas del espacio de estados en respuesta en frecuencia de entradas diseñadas.

4. MODELACIÓN MATEMÁTICA DE DESPLAZAMIENTO LATERAL CON CONTROL

Como se puede observar en la figura 13, la respuesta del sistema en las frecuencias de resonancia analizadas en tiempo infinito no tenderá a tener amplitudes infinitas, conclusión generada con el análisis de las visualizaciones y de estabilidad del sistema. Sin embargo, esto en sí no significa que el edificio no se encuentre en peligro de daño estructural total o parcial en caso de experimentar una perturbación periódica con esta frecuencia. En particular, esta sección tiene el objetivo de reducir el efecto de la frecuencia de resonancia $14,6176 \text{ rad/s}$ en el sistema con aplicación de control en lazo cerrado (figura 16).

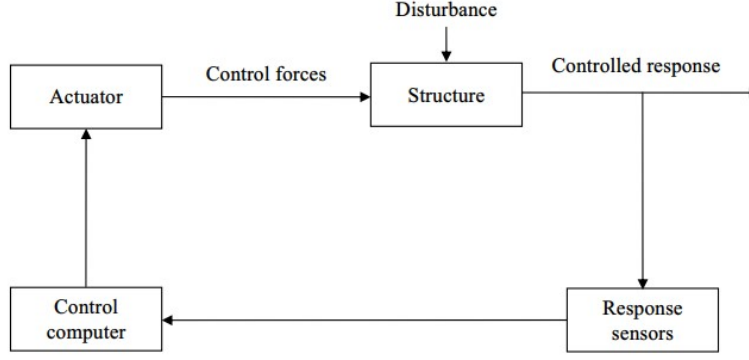


Figura 16. Esquema de control en lazo cerrado.⁶

En el presente se analizarán dos esquemas de control activo (lazo cerrado) inteligentes: actuadores hidráulicos activos y masa de amortiguamiento activo (figura 17).

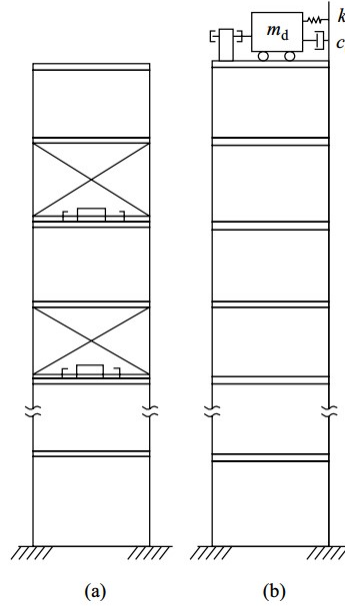


Figura 17. Estructuras inteligentes de control activo. a) Actuadores Hidráulicos. b) Masa de Amortiguamiento Activo.⁶

4.1 Modelación de Movimiento con Actuadores Hidráulicos Activos

De acuerdo a *Smart Structures*⁶ y con base en el diagrama de la figura 18 el modelado matricial del movimiento con Actuadores Hidráulicos en las masas del sistema se puede escribir como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \gamma\mathbf{u}(t) + \delta\ddot{\mathbf{x}}_g(t) \quad (32)$$

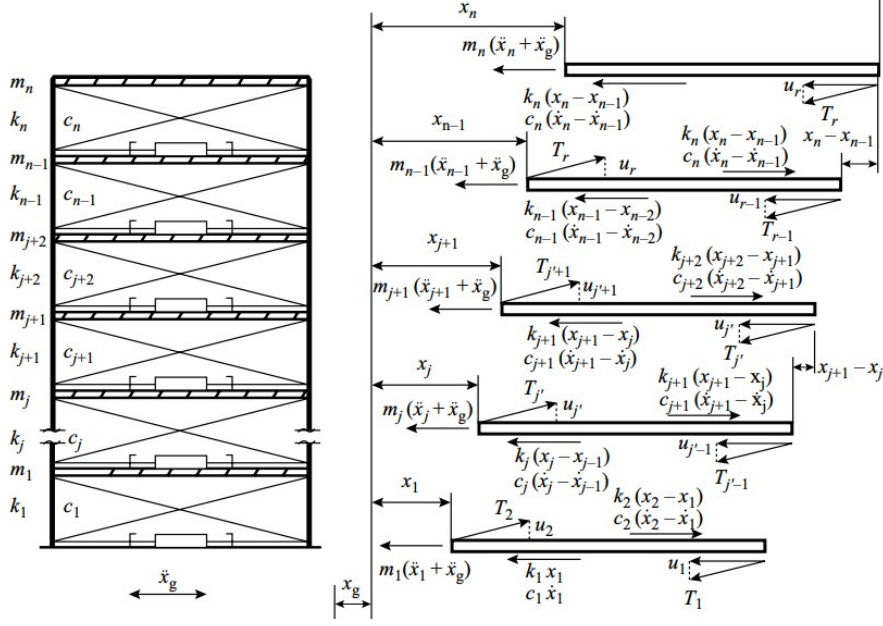


Figura 18. Diagrama de un edificio de n grados de libertad con esquema de control de actuadores hidráulicos activos.⁶

Donde las matrices \mathbf{M} , \mathbf{B} y \mathbf{K} son las matrices de masa, coeficientes de amortiguamiento viscoso y rigidez, y definen de la misma forma que 15, 16 y 17 respectivamente. El vector $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ representa la fuerza de control ejercida por cada actuador, y $\ddot{\mathbf{x}}_g(t)$ la excitación sísmica sinodal. Las matriz δ se define como:

$$\delta = -[m_1, m_2, m_3, \dots, m_i, \dots, m_n]^T \quad (33)$$

La matriz γ de posición de los actuadores hidráulicos con r actuadores se define como:

$$\gamma_{n \times r} = \bar{\gamma}_{n \times r} \theta_{n \times r} \quad (34)$$

Y las matrices $\bar{\gamma}$ y θ se definen como:

$$\bar{\gamma} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & & \\ 0 & -1 & 1 & & & & & \\ & & -1 & 1 & & & & \\ & & & \dots & \dots & & & \\ & & & & \dots & \dots & & \\ & & & & & -1 & 1 & \\ & & & & & & & -1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

4.2 Modelación de Movimiento con Masa de Amortiguamiento Activo

De acuerdo a *Smart Structures*⁶ y con base en el diagrama de la figura 19 el modelado matricial del movimiento con Masa de Amortiguamiento Activo se puede escribir de la misma forma que con Actuadores Hidráulicos (ecuación 32), a reserva de las definiciones de \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} , γ y δ .

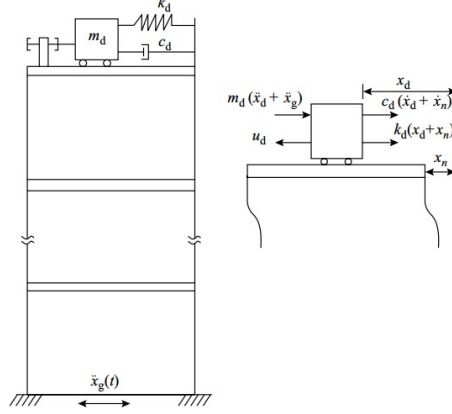


Figura 19. Diagrama de un edificio de n grados de libertad con esquema de control de masa de amortiguamiento activo.⁶

Con m_d , b_d y k_d siendo la masa, coeficiente de amortiguamiento y de rigidez de la masa de amortiguamiento activo, las matrices \mathbf{M} , \mathbf{B} y \mathbf{K} se definen como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & m_m & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & sym. & & & \ddots & & & \\ & & & & & m_{n-1} & 0 & 0 \\ & & & & & & m_n & 0 \\ & & & & & & & m_d \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & b_2 + b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & b_m + b_{m+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & sym. & & & \ddots & & & \\ & & & & & b_{n-1} + b_n & -b_n & 0 \\ & & & & & & b_n & 0 \\ & & & & & & -b_d & b_d \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_2 + k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & k_m + k_{m+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & sym. & & & \ddots & & & \\ & & & & & k_{n-1} + k_n & -k_n & 0 \\ & & & & & & k_n & 0 \\ & & & & & & -k_d & k_d \end{bmatrix} \quad (39)$$

Las matrices γ y δ se definen como:

$$\gamma = [0, 0, 0, \dots, 0, -1, 1]^T \quad (40)$$

$$\delta = -[m_1, m_2, m_3, \dots, m_i, \dots, m_n, m_d]^T \quad (41)$$

4.3 Modelado de Movimiento Propuesto con Ambos Esquemas de Control

Haciendo una síntesis de ambos modelados presentados anteriormente, se propone el modelado matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \gamma\mathbf{u}(t) + \delta\ddot{\mathbf{x}}_g(t) \quad (42)$$

Donde \mathbf{M} , \mathbf{B} y \mathbf{K} se definen como 37, 38 y 39 respectivamente. El vector $\mathbf{u}(t)$ es la fuerza de control ejercida por cada uno de los actuadores hidráulicos y la masa de amortiguamiento activo:

$$\mathbf{u}(t) = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_i, \dots, u_n, u_d]^T \quad (43)$$

La matriz γ se define como:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}\theta & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Donde $\bar{\gamma}$ y θ se definen de acuerdo a 35 y 36 respectivamente. Y finalmente, δ se define de acuerdo con 41.

4.4 Modelado con Control en Espacio de Estados

De acuerdo con *Smart Structures*⁶ y las modificaciones realizadas con el modelo propuesto, la representación en espacio de estados con control se puede definir como:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_u\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_r\ddot{\mathbf{x}}_g(t) \quad (45)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (46)$$

Donde $\mathbf{z}(t)$ se define de acuerdo con la ecuación 20. Considerando n como la cantidad de masas en el sistema contando la masa de amortiguamiento activo, la matriz \mathbf{A} como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (47)$$

La matriz \mathbf{B}_u :

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} \\ M^{-1}\gamma \end{bmatrix} \quad (48)$$

La matriz \mathbf{B}_r (denotando una multiplicación elemento a elemento como *):

$$\mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} \\ M^{-1}\gamma * \mathbf{I}_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (49)$$

La matriz \mathbf{C} y \mathbf{D} se definen de acuerdo a la ecuación 22 respectivamente. Se asumen condiciones iniciales cero:

$$\mathbf{Z}(0) = \mathbf{0} \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{0} \quad \ddot{\mathbf{x}}_g(0) = \mathbf{0}$$

4.4.1 Ley de Control y Retroalimentación

De acuerdo con la figura 16 y lo mencionado anteriormente, el esquema de control que se utilizará es del tipo lazo cerrado. Para realizar esta técnica de control se asume que es posible medir con sensores la respuesta del sistema frente a las perturbaciones sísmicas modeladas, y además, que el sistema es controlable. A su vez, se asume igualmente que se tiene acceso a mediciones de los estados del sistema, o en su defecto, que este es observable. Con esto, el vector $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ se define como:⁶

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = -\mathbf{G}\mathbf{z}(\mathbf{t}) \quad (50)$$

Donde \mathbf{G} es una matriz de dimensiones $r \times 2n$ donde r es la cantidad de actuadores y n la cantidad de grados de libertad del sistema.⁶ El sistema en espacio de estados se vuelve:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_r \ddot{\mathbf{x}}_g(t) \quad (51)$$

Donde \mathbf{A}_c se define como:⁶

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B}_u \mathbf{G} \quad (52)$$

Para determinar la matriz \mathbf{G} existen algoritmos de control clásicos como el método de *posicionamiento de polos*, sin embargo, en el presente se optará por determinar esta *Ley de Control* con un algoritmo de optimización cuadrática de teoría de control óptimo, el *Algoritmo de Riccati de Control Óptimo*. Con este, la fuerza de control se determina con base en el criterio de minimización de una función índice J :⁶

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{z}(\mathbf{t})^T \mathbf{Q} \mathbf{z}(\mathbf{t}) + \mathbf{u}(\mathbf{t})^T \mathbf{R} \mathbf{u}(\mathbf{t})) dt \quad (53)$$

Donde \mathbf{Q} y \mathbf{R} son matrices positivas simétricas, que en el contexto del presente se pueden interpretar como matrices de costo para el error de estimación de estados y costo de fuerza ejercida por cada actuador. En el contexto de algoritmos de optimización, estas dos matrices se pueden considerar como parámetros contextuales a las condiciones y capacidades a disposición.

4.5 Simulación y Aplicación en el Caso de Prueba

Retomando el esquema propuesto en la figura 9, y aplicándole las técnicas de control revisadas anteriormente, se propone que la masa de amortiguamiento activo tenga los coeficientes de masa, amortiguamiento viscoso y rigidez sean:

$$m_d = 0,5k - s^2/in \quad b_d = 6\% \quad k_d = 4500k/in \quad (54)$$

Se propone que las matrices $\mathbf{Q}, \mathbf{R} = \mathbf{I}_{n \times n}$. Se realizaron simulaciones en un tiempo total de 1000 segundos para observar la tendencia del estado estacionario en 4 diferentes casos de interés frente a excitación armónica con la frecuencia de resonancia más violenta ($14,6176 \text{ rad/s}$) estudiada en la sección de **Modelación Matemática de Desplazamiento Lateral sin Control**. La hipótesis y objetivo de esta sección de modelado matemático con control, es esperar poder reducir el efecto de esta frecuencia y reducir la magnitud de escalamiento producida. Los 4 casos propuestos son:

- Simulación Sin Control
- Simulación con Actuadores Hidráulicos
- Simulación con Masa de Amortiguamiento Activo
- Simulación con Actuadores Hidráulicos y Masa de Amortiguamiento Activo

La implementación completa de la simulaciones y animaciones generadas con estas se pueden encontrar en la liga: <https://adrianferrero.github.io/ModelacionMatematicaControlDeSismos/>. Se invita al lector a consultar las animaciones generadas puesto que enriquece la interpretación de los resultados mostrados a continuación.

4.5.1 Caso 0: Simulación Sin Control

En este caso se rescatan las mismas conclusiones que en la sección de **Modelación Matemática de Desplazamiento Lateral sin Control**. En la figura 20 se encuentra la simulación en el periodo de tiempo de experimentación.

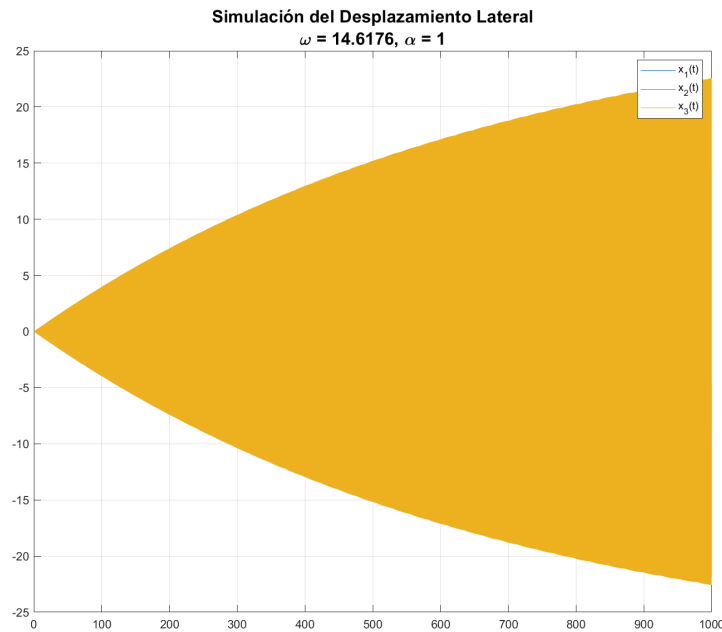


Figura 20. Simulación del Desplazamiento Lateral para el Caso 0.

4.5.2 Caso 1: Simulación con Actuadores Hidráulicos

En este caso el sistema es estable (tabla 3), observable y controlable. Como se puede observar en la figura 21, la primera frecuencia de escalamiento máximo es de 14,6174 rad/s alcanzando una magnitud promedio de aproximadamente $-3,84\text{ dB}$ en todas las masas. Este caso, siendo el primero a analizar con control, muestra una reducción de 30,56 dB promedio con respecto al *caso 0*. Adicionalmente, en la figura 22 se puede observar la gran diferencia en la tendencia de los estados estacionarios en ambos casos. En el *caso 0* después de 1000 segundos no parece estabilizarse aún y la amplitudes de las oscilaciones son mayores a 20 pulgadas, y en este resultado a partir del segundo 100 oscila con amplitudes menores a 0.9 pulgadas.

Tabla 3. Valores propios del sistema del Caso 1.

λ
$-0,1811 \pm 56,2818i$
$-0,1216 \pm 38,8198i$
$-0,0457 \pm 14,6175i$

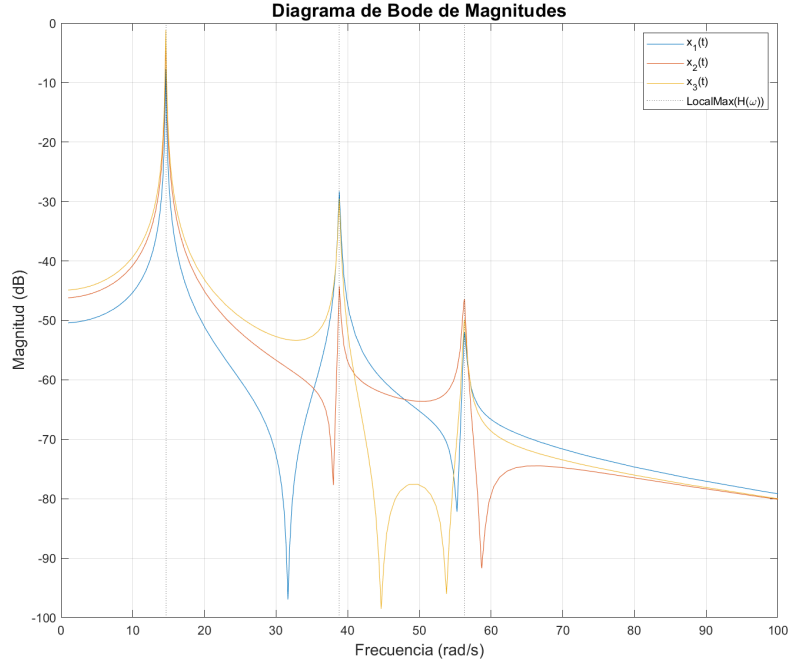


Figura 21. Gráfica de Magnitud de Bode para el Caso 1.

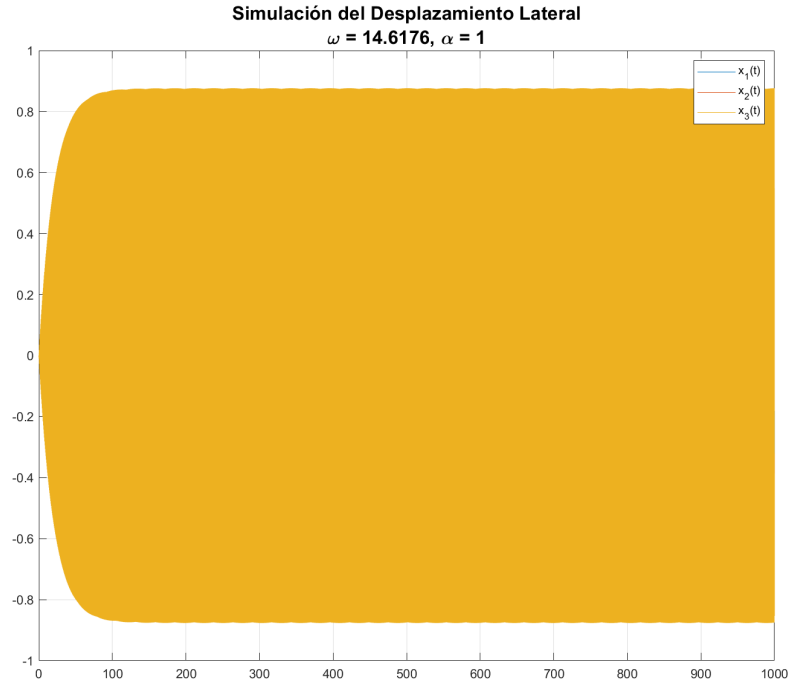


Figura 22. Simulación del Desplazamiento Lateral para el Caso 1.

4.5.3 Caso 2: Simulación con Masa de Amortiguamiento Activo

En este caso el sistema igualmente resulta ser estable (tabla 4), controlable y observable. De acuerdo con la figura 23, el escalamiento máximo para la respuesta a excitación armónica en este sistema es con la frecuencia 14,6168 rad/s , con una magnitud promedio de $-9,2137\text{ dB}$ en todas las masas. Comparando con el caso anterior, se observa que el impacto en la reducción del efecto de las frecuencias de resonancia en el sistema es mayor al

usar el esquema de masa de amortiguamiento activo. En comparación con el *caso 0*, se observa que se alcanza una reducción de 35,93 *dB* promedio en la magnitud del escalamiento máximo. En la figura 24 se puede encontrar el comportamiento de la simulación, donde se observa que antes de los 100 segundos se estabiliza en oscilaciones constantes de menos de 0.45 pulgadas.

Tabla 4. Valores propios del sistema del Caso 2.

λ
$-1,1508 \pm 94,8658i$
$-0,684 \pm 56,2808i$
$-0,0809 \pm 38,8192i$
$-0,0982 \pm 14,6171i$

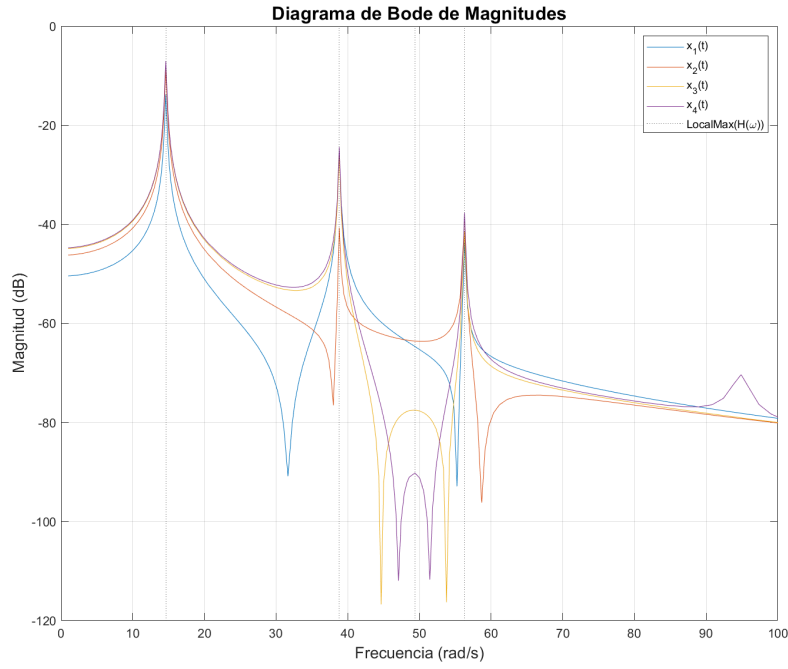


Figura 23. Gráfica de Magnitud de Bode para el Caso 2.

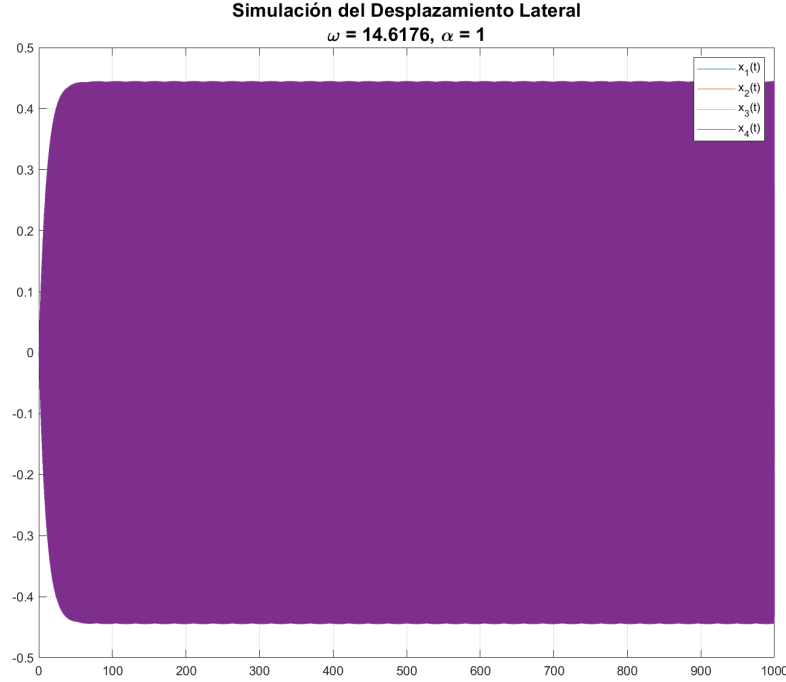


Figura 24. Simulación del Desplazamiento Lateral para el Caso 2.

4.5.4 Caso 3: Simulación con Actuadores Hidráulicos y Masa de Amortiguamiento Activo

Final e igualmente, en este caso el sistema es estable (tabla 5), observable y controlable. En la figura 25 se observa que la frecuencia de resonancia con escalamiento máximo es $14,6165 \text{ rad/s}$, causando en el sistema un escalamiento promedio en las masas de $-10,6133 \text{ dB}$. Comparando con todos los casos anteriores, se observa que la inclusión de ambos esquemas de control activo (lazo cerrado) tienen el mejor desempeño en cuanto a la atenuación de las frecuencias de resonancia observadas en el *caso 0*. La reducción de magnitud promedio de escalamiento con respecto al sistema sin control es de $37,33 \text{ dB}$. En la figura 26 se observa que incluso antes del segundo 50 el sistema se estabiliza en oscilaciones menores a 0.4 pulgadas. En la tabla 6 se encuentra el resumen de las comparaciones de todos los casos.

Tabla 5. Valores propios del sistema del Caso 3.

λ
$-1,1637 \pm 94,8665i$
$-0,2401 \pm 56,2800i$
$-0,1739 \pm 38,8188i$
$-0,1154 \pm 14,6170i$

Tabla 6. Resumen de comparación de esquemas de control.

Esquema de Control	Frecuencia de escalamiento máximo (rad/s)	Escalamiento Máximo (dB)	Atenuación con respecto al <i>Caso 0</i> (dB)
Caso 0	14.6176	26.71	~
Caso 1	14.6174	-3.84	30.56
Caso 2	14.6168	-9.21	35.93
Caso 3	14.6165	-10.61	37.33

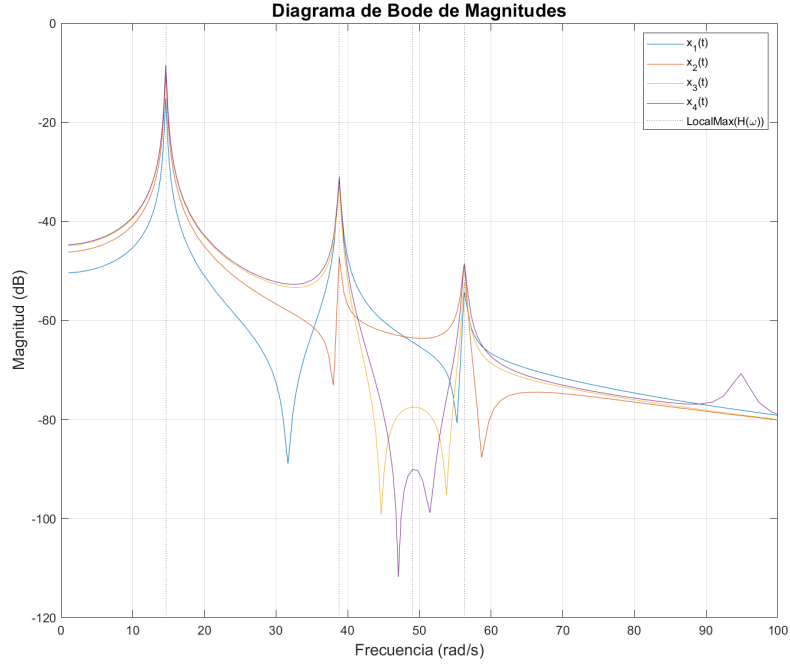


Figura 25. Gráfica de Magnitud de Bode para el Caso 3.

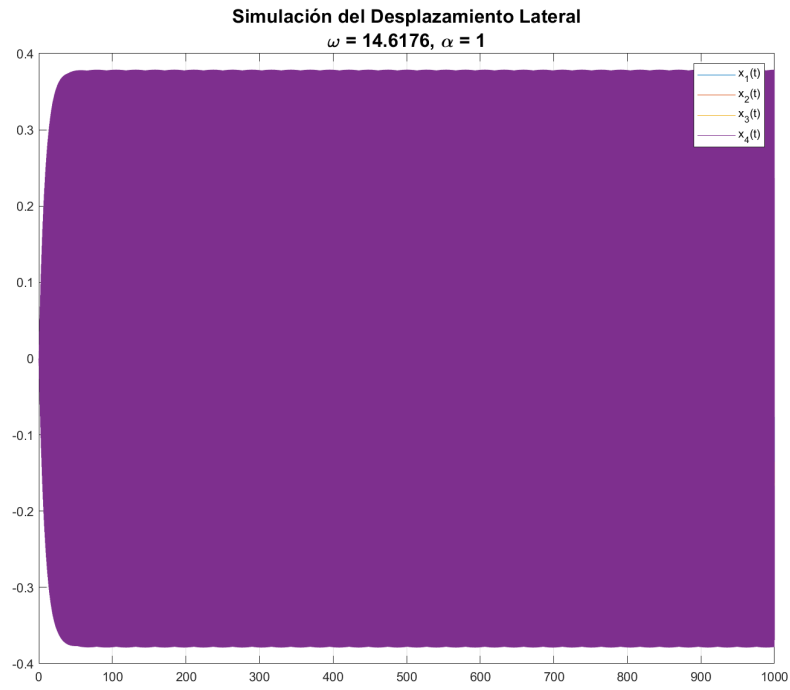


Figura 26. Simulación del Desplazamiento Lateral para el Caso 3.

5. CONCLUSIONES

El sistema modelado con tres masas sin control es estable interna y externamente, la frecuencia de resonancia que genera un escalamiento máximo es $14,6176 \text{ rad/s}$, produciendo una escalamiento con magnitud promedio en las masas de $26,71 \text{ dB}$. A pesar de que el sistema es estable interna y externamente, es decir, en el contexto

del presente, la amplitud de las oscilaciones no será infinita en tiempos infinitos, no significa que el edificio modelado no esté en riesgo de daño estructural total o parcial. Es por esto que se revisaron diferentes técnicas de control de lazo cerrado (o control activo) con el objetivo de reducir el efecto de estas resonancias en el sistema. Se estudiaron los esquemas de *Actuadores Hidráulicos* y *Masa de Amortiguamiento Activo* por separado y se propuso un modelado en conjunto, y se diseñó una ley de control con el *Algoritmo de Riccati de Control Óptimo*. Con las características de la masa de amortiguamiento activo, el esquema de control con mejores resultados (atenuación del efecto de la frecuencia de resonancia destacada) es aquel que combina ambas técnicas de control. Este esquema combinado logra reducir el escalamiento máximo en respuesta a la frecuencia de resonancia por 37,33 dB, manteniéndose estable en oscilaciones de amplitud menor a 0.4 pulgadas después de 50 segundos.

Las simulaciones generadas son a 1000 segundos para comparar la tendencia al estado estacionario en los sistemas generados. Independientemente de la duración promedio de los sismos en México, óptimamente se busca que las oscilaciones sean lo más cercanas a 0, en el menor tiempo posible. Bajo este criterio el caso 3 con los esquemas de control combinados resulta ser el que tiene el mejor desempeño. Sin embargo, existen muchas posibles soluciones y puntos de comparación al cambiar el diseño de la ley de control utilizada y el contexto al problema a tratar. En el presente se utilizó el *Algoritmo de Riccati de Control Óptimo*, con las matrices de ponderación \mathbf{G} \mathbf{R} definidas como matrices identidad con las dimensiones correspondientes. Sin embargo, con más contexto, como el costo del uso de actuadores, o las capacidades intrínsecas de estos para generar las fuerzas necesarias, se puede realizar una optimización más informada y calibrar los resultados de acuerdo a necesidades y limitaciones más reales. A su vez, esta ley de control también puede ser diseñada con otras estrategias clásicas como el método de *Selección de Polos*, igualmente bajo el contexto de los actuadores que generan la fuerza de control necesaria. Es por esto que los resultados presentados en este escrito son ingenuos en este sentido de aplicabilidad a casos reales, además de la linealidad del sistema y poca complejidad del mismo.

6. ANEXOS

El código fuente del material realizado para la elaboración del presente, además de otro material generado como las implementaciones en *Simulink* y animaciones se encuentran disponible al lector en la liga <https://adrianferrero.github.io/ModelacionMatematicaControlDeSismos/>.

REFERENCES

- [1] Protección Civil CDMX. *Situación Sísmica*. Secretaría de Protección Civil Del DF, 2017.
- [2] Servicio Geológico Mexicano. *Causas, características e impactos*. Gobierno de la Ciudad de México, 2017.
- [3] Servicio Sismológico Nacional. *Magnitud de un sismo Cálculo de la Magnitud - UNAM*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2015.
- [4] Servicio Sismológico Nacional. *Sismicidad*. Servicio Sismológico Nacional, 2022.
- [5] Castaldo, P. *Integrated Seismic Design of Structure and Control Systems*. Springer International Publishing, 2014.
- [6] Cheng, F. *Smart Structures*. CRC Press, 2008.
- [7] Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural, A.C. *NTC Diseño de Sismo*. Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural, A.C., 2022.
- [8] MILENIO. *¿Cómo cambió el reglamento de construcciones de la CDMX tras los sismos?*. YouTube, 2018.
- [9] Pin, J. *La Torre Ejecutiva Pemex*. SeismicKnowledge, 2018.
- [10] Jaqueline, C. *IV. Edificios a prueba de sismos*. Edificaciones de la CDMX, 2017.
- [11] Pérez, M., Hidalgo, A. & Berenguer, E. *Introducción a los Sistema de Control y Modelo Matemáticos para Sistema Lineales Invariantes en el Tiempo*. Universidad Nacional de San Juan, 2008.
- [12] CNN Español. *¿Por qué tiembla tanto en México?*. CNN Español, 2020.