

Descripción del Proyecto de Identificación de Sistemas

Prof. Adrián Josué Guel Cortéz

12 de noviembre de 2025

Resumen

Este documento presenta los pasos esenciales para obtener un modelo matemático lineal de un sistema mediante el método de mínimos cuadrados. El procedimiento aquí expuesto es una guía de alto nivel y no pretende ser un tratamiento exhaustivo; para mayor profundidad, consulte la bibliografía sugerida. El código de apoyo para este proyecto está disponible en:

<https://github.com/AdrianGuel/SystemIDExperimentation>

1. EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Considere la función de transferencia lineal en tiempo discreto

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_n z^{-n}}. \quad (1.1)$$

La expresión (1.1) es una representación discreta de un sistema lineal. Si bien la dinámica de sistemas lineales se describe a menudo mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, cuando el sistema se implementa o mide con dispositivos digitales es necesario un modelo discreto.

Al aplicar la transformada \mathcal{Z} inversa a (1.1) y realizar manipulaciones algebraicas estándar se obtiene la ecuación en diferencias

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n). \quad (1.2)$$

Sean las mediciones disponibles

$$\{u(0), u(1), \dots, u(N), y(0), y(1), \dots, y(N)\}. \quad (1.3)$$

Nuestro objetivo es estimar el vector de parámetros

$$\theta = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)^\top$$

que mejor ajuste la dinámica observada en (1.3). Empleando el método (offline) de mínimos cuadrados se obtiene

$$\theta = (\Phi^\top \Phi)^{-1} \Phi^\top Y, \quad (1.4)$$

donde

$$\begin{aligned} Y(N) &= [y(n), \dots, y(N)]^\top, \\ \Phi(N) &= [\phi(n), \dots, \phi(N)]^\top, \\ \varepsilon(N) &= [e(n), \dots, e(N)]^\top, \end{aligned}$$

y cada regresor $\phi(k)$ se define como

$$\phi(k) = [y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-n)]^\top.$$

De manera explícita, la matriz de datos Φ es

$$\Phi = \begin{bmatrix} y(n-1) & \cdots & y(0) & u(n-1) & \cdots & u(0) \\ y(n) & \cdots & y(1) & u(n) & \cdots & u(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-2) & \cdots & y(N-1-n) & u(N-2) & \cdots & u(N-1-n) \\ y(N-1) & \cdots & y(N-n) & u(N-1) & \cdots & u(N-n) \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Aquí, $\Phi \in \mathbb{R}^{(N-n+1) \times 2n}$. Para que $\Phi^\top \Phi$ sea invertible, Φ debe tener rango columna completo. Una condición necesaria (aunque no suficiente) es

$$N - n + 1 \geq 2n \implies N \geq 3n - 1,$$

es decir, al menos $3n - 1$ muestras.

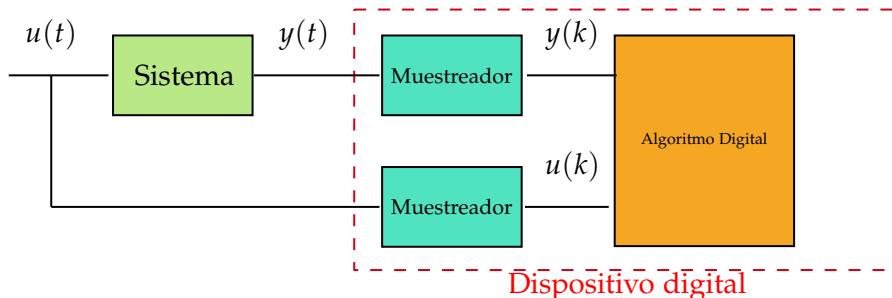


Figura 1.1: Esquema de procesamiento digital. Las señales continuas $u(t)$ y $y(t)$ se muestrean para producir las secuencias $u(k)$ y $y(k)$, que son procesadas por un algoritmo digital.

Ejemplo

Un *biorreactor* es un recipiente en el que ocurre una reacción biológica y se utiliza comúnmente para cultivar células aeróbicas o realizar inmovilización celular/enzimática. Desarrollar modelos de primera-principios de procesos en biorreactores puede ser complejo; por ello, la identificación de sistemas se emplea con frecuencia.

Considere el biorreactor de tanque agitado continuo de la Fig. 1.2, utilizado para cultivo celular general. La Tabla 1 reporta mediciones de la tasa de dilución d frente a la concentración de biomasa celular x , adquiridas con un periodo de muestreo $T_s = 1\text{ s}$.

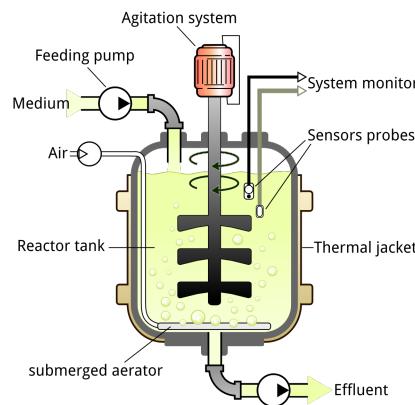


Figura 1.2: Estructura general de un biorreactor de tanque agitado continuo.

Cuadro 1: Tasa de dilución y concentración de biomasa celular muestreadas a $T_s = 1\text{ s}$.

Tasa de dilución d [volumen/tiempo]	Concentración de biomasa x [masa/volumen]
0.10	10.1
0.20	11.2
0.60	15.3
0.70	16.5
0.40	14.5
0.45	14.8
0.35	14.0
0.90	17.5

Usando los datos de la Tabla 1, supóngase que se estima una función de transferencia discreta de segundo orden mediante (1.4). El vector de parámetros es

$$\Theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = (\Phi^\top \Phi)^{-1} \Phi^\top \begin{bmatrix} 15,3 \\ 16,5 \\ 14,5 \\ 14,8 \\ 14,0 \\ 17,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,6555 \\ -1,98634 \\ -32,7455 \\ 11,9303 \end{bmatrix},$$

con

$$\Phi = \begin{bmatrix} 11,2 & 10,1 & 0,20 & 0,10 \\ 15,3 & 11,2 & 0,60 & 0,20 \\ 16,5 & 15,3 & 0,70 & 0,60 \\ 14,5 & 16,5 & 0,40 & 0,70 \\ 14,8 & 14,5 & 0,45 & 0,40 \\ 14,0 & 14,8 & 0,35 & 0,45 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la función de transferencia discreta de segundo orden que relaciona la tasa de dilución y la concentración celular es

$$H(z) = \frac{X(z)}{D(z)} = \frac{-32,7455 z^{-1} + 11,9303 z^{-2}}{1 - 3,6555 z^{-1} + 1,98634 z^{-2}}. \quad (1.6)$$

Dado que las muestras se tomaron con $T_s = 1$ s, puede obtenerse un modelo en tiempo continuo en MATLAB empleando

```
1 Ts = 1; % Periodo de muestreo (s)
2 H = tf([-32.7455, 11.9303], [1, -3.6555, 1.98634], Ts); % TF discreta
3 Hc = d2c(H, 'tustin'); % Transformacion bilineal (Tustin)
```

lo que produce la función de transferencia continua

$$H(s) = \frac{X(s)}{D(s)} = \frac{6,726 s^2 - 7,185 s - 12,54}{s^2 - 0,594 s - 0,403}.$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 0,594 \frac{dx(t)}{dt} - 0,403 x(t) = 6,726 \frac{d^2d(t)}{dt^2} - 7,185 \frac{dd(t)}{dt} - 12,54 d(t). \quad (1.7)$$

La ecuación (1.7) puede resolverse para determinar $x(t)$ y analizar cómo evoluciona la concentración a lo largo del tiempo.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

Aplique la metodología de mínimos cuadrados descrita arriba a los sistemas de las Figs. 2.1 y 2.2. Adquiera datos experimentalmente usando una plataforma Arduino (véase <https://www.arduino.cc/en/Guide/ArduinoUno>) con un periodo de muestreo lo suficientemente pequeño para capturar la dinámica dominante de cada sistema (regla práctica: muestrear al menos diez veces más rápido que la constante de tiempo dominante o por encima de la frecuencia del polo más alto significativo). Guarde los datos en un archivo y procéselos en MATLAB, Python, GNU Octave o similar para estimar los parámetros del modelo y obtener una función de transferencia en tiempo continuo. Finalmente, compare la respuesta simulada de la función de transferencia identificada contra nuevas mediciones para una entrada representativa (por ejemplo, escalón o seno) y discuta la calidad del ajuste.

Nota. Si la implementación experimental no es factible, puede realizar todo el flujo de trabajo mediante simulación (por ejemplo, en MATLAB/Simulink o con simuladores en Python), siempre que documente claramente el proceso de generación de datos y justifique el periodo de muestreo y las señales de excitación elegidas.

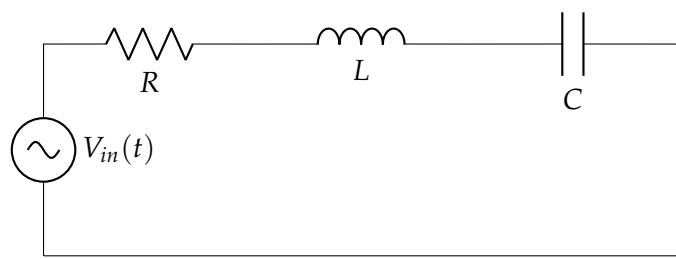


Figura 2.1: Circuito RLC en serie alimentado por una fuente de voltaje senoidal.

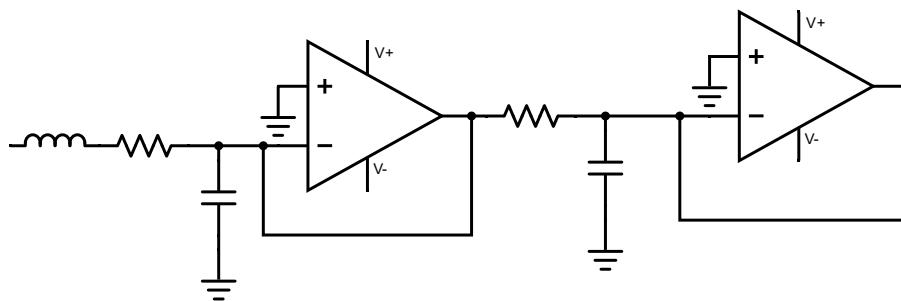


Figura 2.2: Circuito con amplificador operacional.