

Rapport til laboratorium i fysikk

K. Håkonsen^a, A. Kjøsberg^a, A. Langseth^a, E. Ydse^a

^aInstitutt for fysikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.

Sammendrag

Dette forsøket undersøker sammenligning av modell innen klassisk mekanikk basert på fysisk rammeverk med fysiske verdier fra gjennomføring av eksperiment. I forkant av eksperimentet ble tidsutviklingene $s(t)$, $v(t)$ og $a(t)$ numerisk tilnærmet. I eksperimentet ble slutfarten målt. Fra eksperimentet på en disk og en ring fikk vi slutfastigheter som avvok henholdsvis 14% og 17% fra de numeriske utregnede slutfastigheten.

1. Introduksjon

Vi ønsker å undersøke hvor godt vi kan simulere rotasjon av objekter i en berg og dalbane. Dette forsøket består av en numerisk del der numeriske verdier for rotasjonen blir beregnet, ved bruk av Newtons andre lov og energibevering. Deretter ble det fysiske eksperimentet gjennomført, der empiriske verdier ble målt. Vi benytter en disk og en ring i berg og dalbanen, da de har ulike treghetsmoment, for å teste flere omstendigheter enn bare ett enkelt tilfelle. Til slutt sammenliknes de empiriske verdiene for slutfarten og tidsutviklingen mot numeriske verdier.

Når ett objekt ruller i berg og dalbanen vil det kun være påvirket av tyngdekraft, friksjon og luftmotstand. Vi ønsker at objektene skal rulle og ikke skli, ettersom vi ønsker å studere rotasjon. Derfor har vi hatt fokus på velge en bane som ikke er for bratt. Dersom friksjonskraften er for lav vil objektene likevel skli i stedet for å rulle, derfor er det viktig å velge objekter og underlag på banen med høye nok friksjonsverdier.

2. Teori

Treghetsmomentet til et objekt med masse m og radius r kan uttrykkes ved $I_0 = cmr^2$, hvor c er treghetskoeffisienten til objektet. For ringen er $c = \frac{4349}{5000}$, og for disken er $c = \frac{1}{2}$. Det antas at objektene har en uniform massefordeling. Situasjonen som her blir beskrevet er illustrert i figur 1. Hvis vi antar at objektet starter med null hastighet i høyde $y(0) = y_0$ er total mekanisk energi $E = U_0 = mgy_0$ når vi velger $U = 0$ for $y = 0$. Hvis vi antar ren rulling er total kinetisk energi K lik:

$$\begin{aligned} K &= \frac{mv^2}{2} + \frac{cmv^2}{2} \\ &= \frac{(1+c)mv^2}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

Energibevarelse tilsier at energien i systemet er konstant til enhver tid. Dette defineres som

$$\Delta E = 0$$

Fra denne formelen medfører det at endringen i kinetisk energi er lik men omvendt av endringen i potensiell energi.

$$\begin{aligned} \Delta(K + P) &= 0 \\ \Rightarrow \Delta K + \Delta P &= 0 \\ \Rightarrow \Delta K &= -\Delta P \\ \Rightarrow K - K_0 &= P_0 - P \end{aligned}$$

Kunnskapen om at objektet starter fra ro, som medfører at $K_0 = 0$, settes inn i formelen. I tillegg brukes formelen for K funnet i formel 1. Dette gir følgende utvikling.

$$\begin{aligned} K - K_0 &= P_0 - P \\ \Rightarrow K &= mgy_0 - mgy \\ \Rightarrow \frac{(1+c)mv^2}{2} &= mg(y_0 - y) \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{2g(y_0 - y)}{(1+c)} \end{aligned}$$

Fra dette får vi funksjonen for fartsutviklingen $v(y)$:

$$v(y) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y)}{(1+c)}} \quad (2)$$

Hvis baneformen er kjent kan farten uttrykkes som en funksjon av x :

$$v(x) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y(x))}{1+c}}, \quad (3)$$

Banens krumning er

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad (4)$$

og sentripetalakselerasjonen er

$$a_{\perp} = v^2 \kappa \quad (5)$$

Hvis vi ser på Newtons 2. lov normalt på banen med normalkraften i positiv retning har vi

$$N = m(g \cos(\beta) + a_{\perp}) \quad (6)$$

hvor β er banens helningsvinkel.

For å finne frem til friksjonskraften f kan vi velge $\beta < 0$ når objektet ruller nedover og $\beta > 0$ når det ruller oppover. Da er $y' = \frac{dy}{dx} = \tan(\beta)$. f og tyngdens tangentialkomponent $-mg \sin(\beta)$ er kreftene som virker tangentielt til banen. Det gir

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = -m\vec{g} \sin(\beta) + \vec{f} \quad (7)$$

Rotasjonen om massesenter er gitt ved

$$fR = -I_0 \frac{d\omega}{dt} \quad (8)$$

Hvis $\omega = \frac{v}{R}$ og uttrykket for I_0 settes inn får vi

$$f = -cm \frac{dv}{dt} = -cma \quad (9)$$

Hvis vi setter f inn i formel 7 får vi

$$\begin{aligned} -mg \sin(\beta) + f &= ma \\ \Rightarrow -mg \sin(\beta) - cma &= ma \\ \Rightarrow -g \sin(\beta) - ca &= a \\ \Rightarrow -\frac{g \sin(\beta)}{1 + c} &= a, \end{aligned} \quad (10)$$

og fra formel 9 får vi:

$$f = -cma \quad (11)$$

$$= \frac{cmg \sin(\beta)}{1 + c} \quad (12)$$

De nevnte formlene kan brukes til å modellere hvordan disken og ringen vil bevege seg i baneformen med hensyn på fart, akselerasjon og posisjon over tid. Ved N gjentatte målinger er gjennomsnittet \bar{x} av en bestemt størrelse x for hver måling i :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (13)$$

En vanlig måte å måle usikkerhet på er ved å bruke standardavvik x , som er det gjennomsnittlige avviket fra den mest sannsynlige verdien:

$$\delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (14)$$

Standardfeil er et mål på usikkerheten i gjennomsnittet og er gitt ved

$$\delta \bar{x} = \frac{\delta x}{\sqrt{N}} \quad (15)$$

For å beregne $x(t)$ beregnet vi først gjennomsnittlig horisontalhastighet ved Eulers Metode:

$$\langle v_x \rangle_n = \frac{1}{2} (v_{x,n-1} + v_{x,n}) \quad (16)$$

hvor $v_{x,n}$ kommer fra formel 3. v_x på det n -te intervallet, gitt ved $v_{x,n}$ kan regnes som

$$v_{x,n} = v_n \cos(\beta_n) \quad (17)$$

for å finne v_n . Med gjennomsnittlig horisontalhastighet fra formel 16 kan vi finne ut hvor lang tid objektet har brukt på hvert intervall

$$\Delta t_n = \frac{\Delta x_n}{\langle v_x \rangle_n} \quad (18)$$

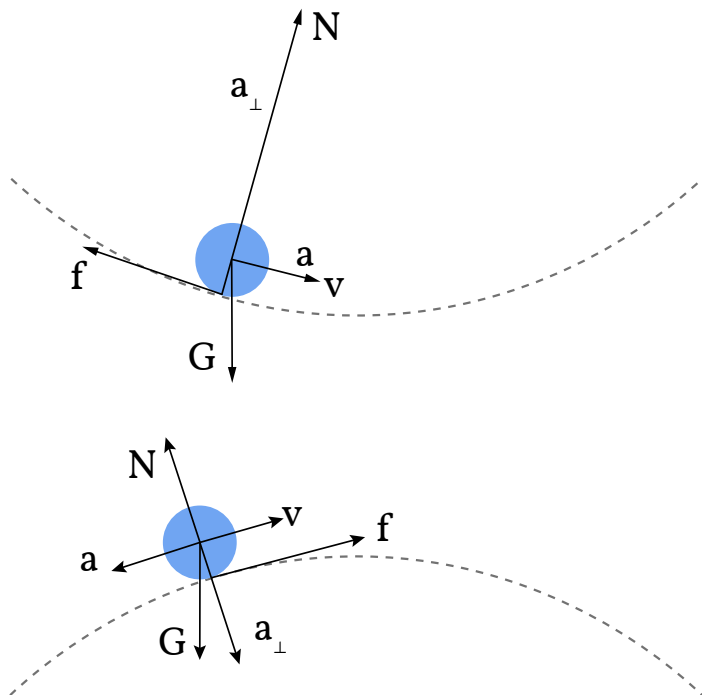
hvor $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ er konstant lik 1mm. Denne konstante Δx_n lar oss bruke $\langle v_x \rangle_n$ for enklere regning. Deretter kan kumulativ sum av t_n plottes sammen med v_n for å få hastighet over tid, og den samme kumulative tidssummen plottes sammen med x -ene for å få posisjon over tid.

3. Eksperimentell Metode

Banen settes opp i et labstativ som illustrert i figur 2. En bøyelig bane holdes oppe av åtte justerbare festepunkter med høyder som vist i figur 3. Disse høydene ble utledet en stund før selve forsøket ble utført.

I forkant av forsøket utførte vi en numerisk metode for å utlede en rekke verdier. For den numeriske metoden brukte vi en fysisk modell basert på Newtons 2. lov og energibevarelse. Denne modellen ble programmert i Python for å simulere utviklingen over tid. Vi begynte med å regne ut helningsvinkel fra figur 5. Ved hjelp av formlene 3, 16, 17 og 18 ble så farten i figurene 12 og 13 beregnet. Formlene 4, 5 og 6 ble brukt til å regne ut banekrumning, sentripetalakselerasjon og normalkraft som vist i figurene 4, 6, og 7.

Under forsøket ble det brukt to ulike objekter som skulle rulle nedover banen. Det ble brukt en ring på $(12.9 \pm 0.1)g$ som hadde en omkrets på $(2.4 \pm 0.05)cm$. Det andre objektet



Figur 1: Fysisk situasjon

var en disk på $(27.7 \pm 0.1)g$ som hadde en omkrets på $(2.4 \pm 0.05)cm$. Disse ble plassert på den første klemmen for å tilnærme $v_0 = 0m/s$. Hvert objekt ble rullet nedover banen 10 ganger.

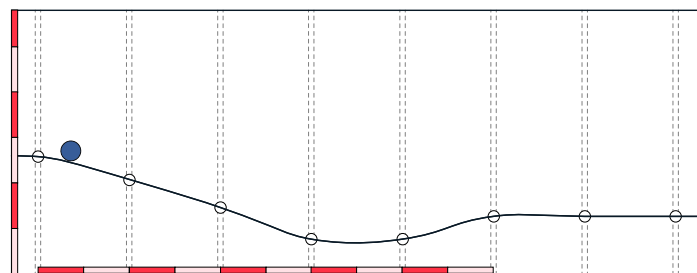
Tiden objektene brukte på forflytningen fra samme startpunkt til sluttunkt ble målt med et kamera, og analyseres i programmet "Tracker". Kameraet er et vanlig mobilkamera der en bildefrekvensen på 30 bilder per sekund ble brukt. For å sikre god belysning var det plassert to 2400 lumen LED-lyskastere mot veggen der forsøket ble utført.

Den empiriske tidsutviklingen $x(t)$ og $v(t)$ beregnes ved bruk av Tracker. Som illustrert i figur 2 ble en meterstokk brukt for å kalibrere lengdeskalaen i Tracker til eksperimentet. Denne bidrar til å se på tidsutviklingen $x(t)$ i det siste flate partiet. $v(t)$ utledes fra tidsutvikling og tidsendring mellom bilderammer.

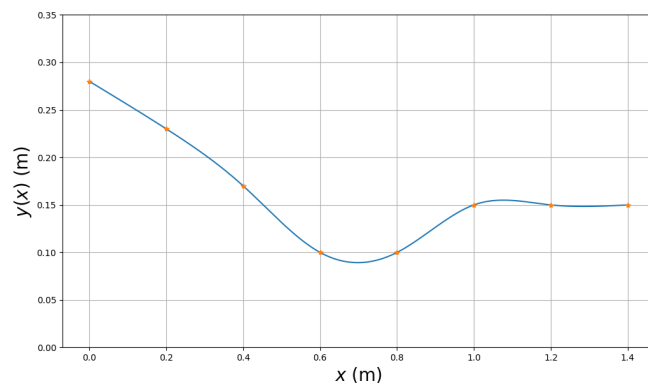
4. Resultater

Tabell 1 viser simulerte slutfarter for disk og ring, sammen med gjennomsnittlige empiriske verdier fra forsøket. Disse er basert på ti eksperimenter. Prosentavviket blant de empiriske verdiene er da på 1.50% og 1.80%. Dette ble beregnet ved å bruke formlene 14 og 15. Videre ble avviket mellom de simulerte verdiene og de målte verdiene fra forsøket 14.0% for disken og 17.2% for ringen.

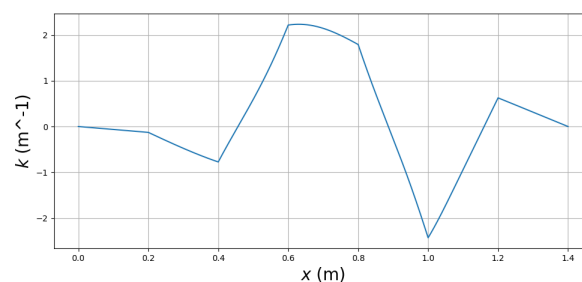
Figur 4 til 13 viser numeriske verdier beregnet fra koden. Figur 14 og 15 viser tidsutvikling for empiriske og numeriske verdier for henholdsvis ring og disk.



Figur 2: En bøyelig bane av plast er skrudd fast inntil en vegg ved hjelp av 8 ulike festepunkter med et mellomrom på 20 cm. Høyden på festepunktene kan justeres etter ønske. Et trilleobjekt plasseres så i venstre ende av banen, og triller så ned langs banen før objektet forlater banen på høyre side. Hendelsen tas opp ved hjelp av et kameraoppsett. Det er også plassert målestokker langs banen som vil brukes i analysen av videoklippene.



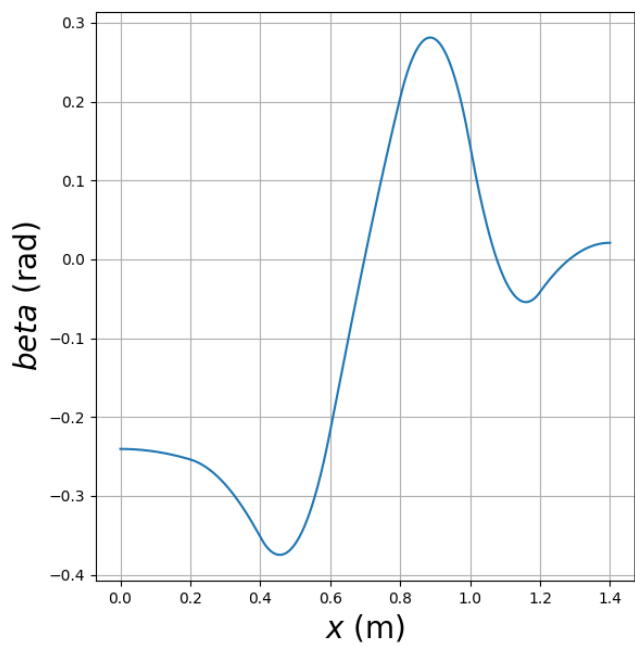
Figur 3: Plot av banens høyde mot dens lengde der punktene symboliserer klemmene.



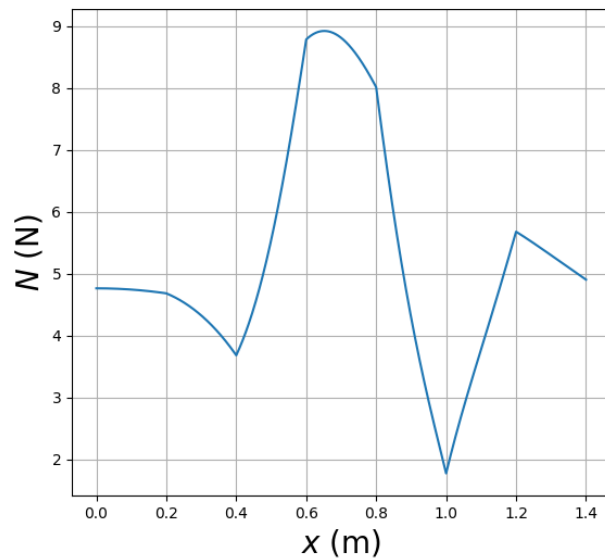
Figur 4: Plot av banens krumningsvinkel

Objekt	Simulert verdi	Gjennomsnittlig målt verdi
Disk	1.30 m/s	(1.14 ± 0.0171) m/s
Ring	1.17 m/s	(0.969 ± 0.00174) m/s

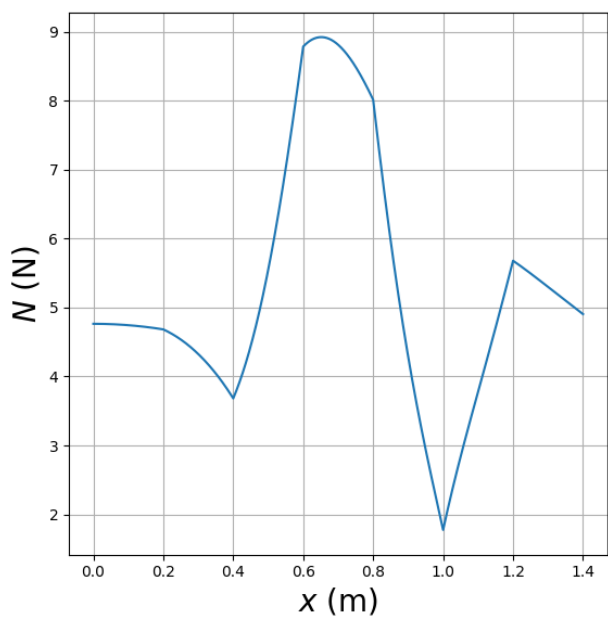
Tabell 1: Slutfastigheter



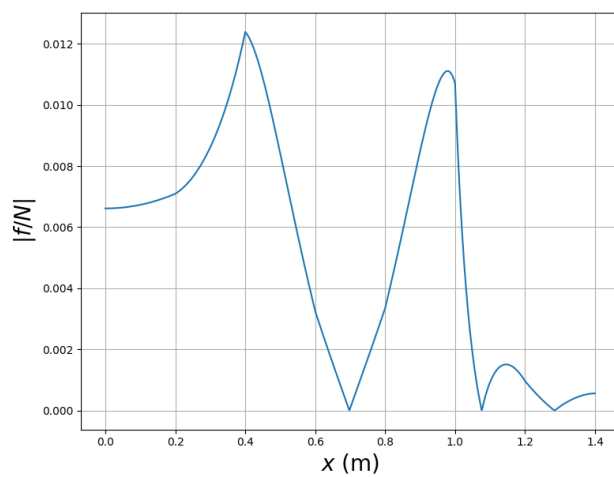
Figur 5: Plot av banens helningsvinkel



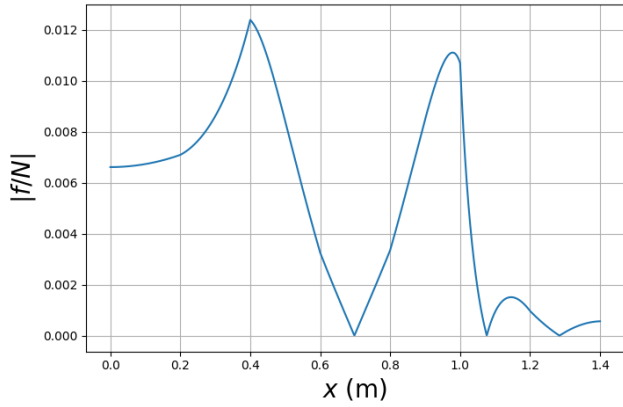
Figur 7: Plot av normalkraft for disk



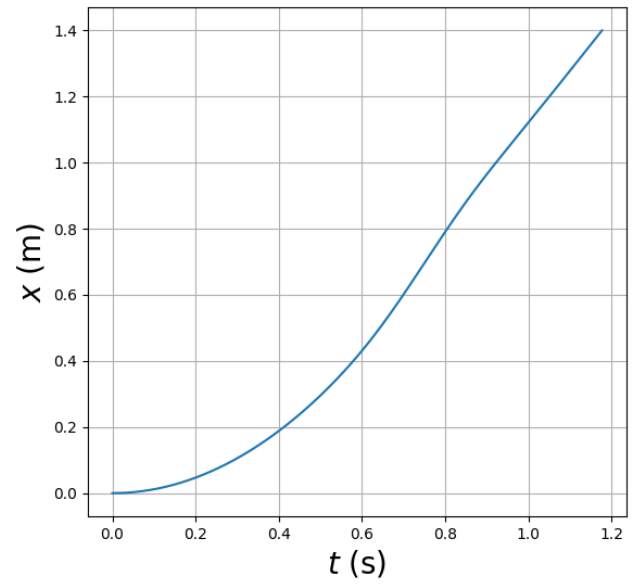
Figur 6: Plot av normalkraft for ring



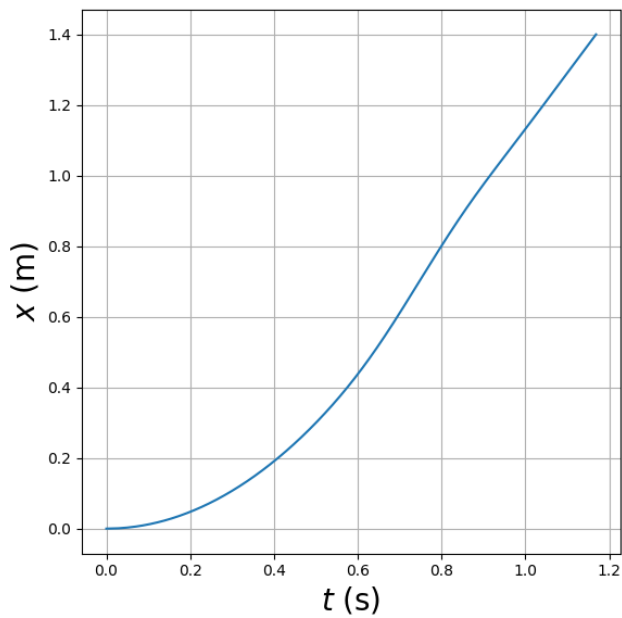
Figur 8: Plot av friksjonskraft over normalkraft for ring



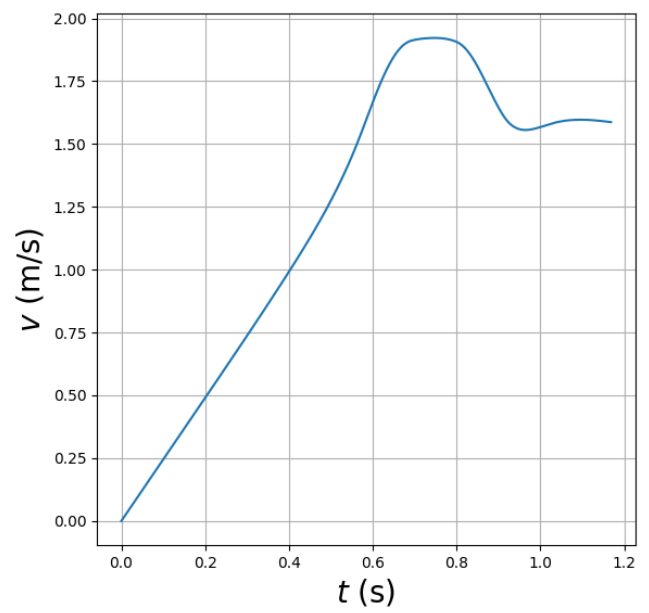
Figur 9: Plot av friksjonskraft over normalkraft for disk



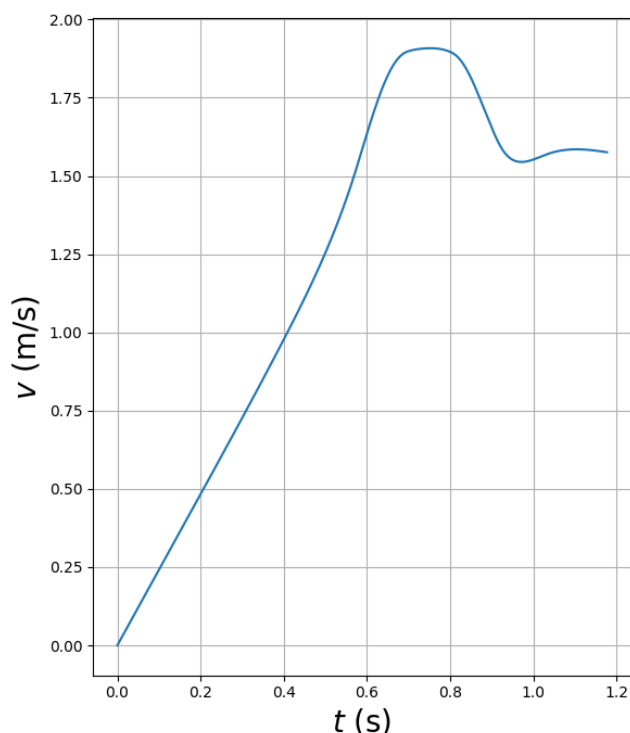
Figur 11: Plot av numerisk $x(t)$ for disk



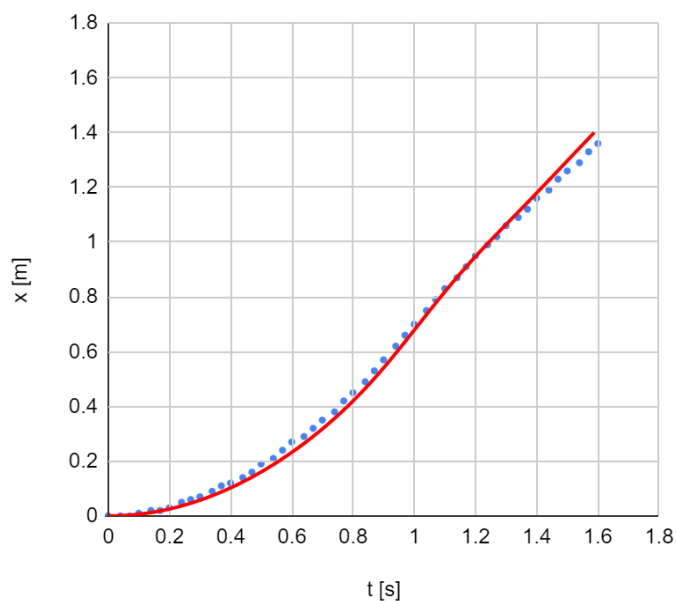
Figur 10: Plot av numerisk $x(t)$ for ring



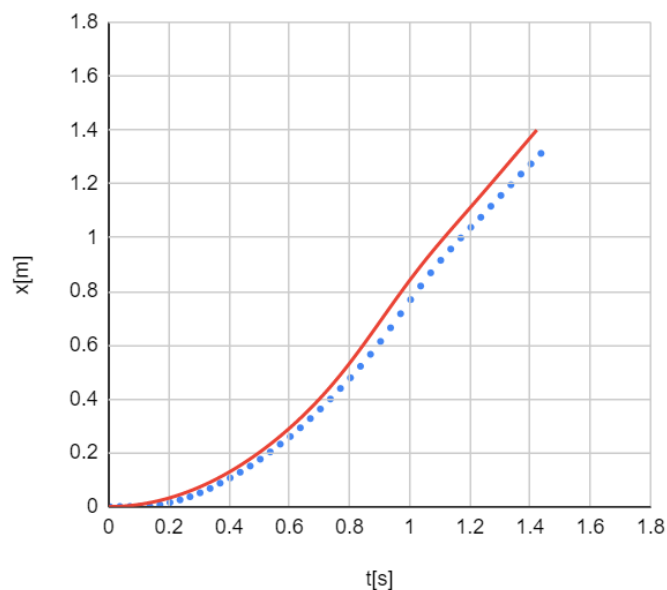
Figur 12: Plot av numerisk $v(t)$ for ring



Figur 13: Plot av numerisk $v(t)$ for disk



Figur 14: Plot av empirisk tidsutvikling i blå mot numerisk tidsutvikling i rød for ring.



Figur 15: Plot av empirisk tidsutvikling i blå mot numerisk tidsutvikling i rød for disk.

5. Diskusjon

Som vi kan se utifra tabell 1 samt figurene 14 og 15, er de simulerte slutfartene i nærheten av verdiene som ble målt i forsøkene, dog med noe avvik. Som nevnt i seksjon Resultater ligger det prosentvis avviket for måling av disk og ring på henholdsvis 14% og 17%, og utifra figurene 14 og 15 ser vi at de simulerte verdiene ofte var høyere enn de målte.

Disse avvikene kan ha flere mulige årsaker. Blant annet kan det ha ligget systematiske feil under de utførte forsøkene som følge av feil i måleredskapet. Dersom programvaren Tracker var kalibrert feil, kan dette ha forskøvet målingene våre vekk fra det reelle resultatet.

De empiriske verdiene har også en usikkerhet på 1 – 2%. Dette kan hinte mot både systematiske feil og stokastisk feil. Stokastiske feil kan være at trilleobjektene kan ha blitt tilført ekstra energi idet de ble sluppet ned på banen. For eksempel kan de ha fått et lite dytt eller blitt holdt igjen før de fikk lov å trille fritt. De kan også ha vært plassert på ulike punkter av banen ved hvert forsøk. I tillegg kan stokastiske feil ha blitt innført via unøyaktig tracking i Tracker.

Feilkildene fra selve eksperimentet er ikke nødvendigvis nok til å forklare avvikene vi ser i resultatene våre. Det finnes også andre faktorer som kan ha påvirket eksperimentet, deriblant eksterne krefter, som ikke har blitt inkludert i den numeriske modellen. De simulerte verdiene er utledet fra programmet vi beskrev i Eksperimentell Metode, og den fysiske modellen brukt av programmet tar hverken hensyn til friksjon eller luftmotstand. Spesielt luftmotstand vil potensielt ha mye å si for objekter med lav masse, slik som de som ble brukt i eksperimentet vårt. Luftmotstand

er også en kraft avhengig av hastigheten til det påvirkede objektet, noe som også kan være verdt å ta i betraktning. Dette er en mulig forklaring på det voksende avviket som blant annet er illustrert i figur 14.

Det er altså mange mulige årsaker til hvorfor målingene våre har et voksende avvik fra verdiene utledet gjennom den numeriske metoden. Dette kan skyldes feil i målinger, både tilfeldige og systematiske, samt variabler og faktorer som ikke har blitt tatt hensyn til. Mest sannsynlig har flere av disse feilkildene gitt utslag på ulikt vis, men man burde være forsiktig med å trekke noen videre konklusjon utenom det. Måledataen viser til et avvik, men sier derimot lite om hvordan avviket kan ha oppstått. For å fastslå grunnen til avviket burde det derfor gjøres videre testing fremfor å spekulere potensielle feilkilder.

6. Konklusjon

I dette forsøket har vi sammenliknet en numerisk modell basert på Newtons andre lov og energibevaring, med den fysiske verden, for rulling av en disk og en ring i en berg og dalbanen. Vi bestemte slutfarten til ringen og disken ved å beregne gjennomsnittet av 10 forsøk. Slutfarten til disken eksperimentelt var (1.14 ± 0.0171) m/s, og numerisk 1.30 m/s. Tilsvarende verdier for ringen var (0.969 ± 0.00174) m/s og 1.17 m/s. Basert på dette forsøket kan vi se at avviket mellom de simulerte verdiene og de empiriske verdiene for disken og ringen var på henholdsvis 14% og 17%. Dette er ett stort avvik, og det indikerer at friksjon og luftmotstand har stor påvirkning på rulling av objekter. Vi så også ett avvik innad blant de empiriske resultatene, noe som indikerer diverse feilkilder i forsøket. De viktigste av disse er usikkerhet knyttet til at vi manuelt slapp objektene ned på berg og dalbanene og upresis tracking i Tracker.

Referanser

<https://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/files/labligninger.pdf>