Analiza Matematyczna 2

Adrian Madajewski

Semestr II

Niniejszy plik jest w całości bazowany na wykładach

prof. UAM dr hab. Dariusza Bugajewskiego

z przedmiotu

Analiza Matematyczna 2

na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

UAM

UNIWERSYTET
IM. ADAMA MICKIEWICZA
W POZNANIU

8 Całka Riemanna

8.1 Definicja i podstawowe własności całki

Definicja 68. Niech $[a, b]$ będzie danym przedziałem. Przez podział P przedziału $[a, b]$ będziemy nazywali skończony zbiór punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$, gdzie

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Będziemy pisać $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Długość największego z odcinków $[x_{i-1}, x_i]$ nazywać będziemy średnicą podziału P i oznaczamy ją symbolem $\delta(P)$. $\delta(P) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$. Niech f będzie ograniczoną funkcją rzeczywistą określoną na $[a, b]$. W każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ wybierzmy dowolny punkt ξ_i $(i = 1, \ldots n)$ i utwórzmy sumę $R = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Sumę te nazywamy sumą Riemanna odpowiadającą podziałowi P, przy ustalonym wyborze punktów ξ_i. Przez $\mathfrak{R}(f, P)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich możliwych sum Riemanna odpowiadających podziałowi P. Utwórzmy teraz ciąg (P_k) podziałów przedziału $[a, b]$:

$$a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_{n(k)}^{(k)} = b;$$

$$\Delta_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)};$$

$$\delta(P_k) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n(k)} \Delta x_i^{(k)}, k = 1, 2, \ldots$$

Ciąg (P_k) nazywamy ciągiem normalnym podziałów, jeśli $\delta(P_k) \to 0$ przy $k \to \infty$. Oznaczmy przez $\mathfrak{R}(f, P_k)$ zbiór wszystkich sum Riemanna odpowiadających podziałowi P_k.

Definicja 69. Jeśli dla dowolnego ciągu normalnego podziałów (P_k) i dla dowolnych sum Riemanna $R_k \in \mathfrak{R}(f, P_k)$ istnieje skończona granica $I = \lim\limits_{k \to \infty} R_k$, to tę granicę nazywamy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy ją symbolem

$$\int_a^b f dx \text{ lub } \int_a^b f(x)dx$$

O funkcji f mówimy wówczas, że jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, lub że jest ona R-całkowalna na tym przedziale.

Powyższą definicję mozna sformułować w następujący równoważny sposób.

Definicja 70. Mówimy, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, jeśli istnieje liczba $I \in \mathbb{R}$ taka, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_P \forall_{R \in \mathfrak{R}(f, P)} \delta(P) < \delta \implies |R - I| < \varepsilon$$

Piszemy wówczas $I = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\delta(P) \to 0} R$.

Równoważność definicji 69 i 70 można pokazać analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 35.

Przykład 25. (a) Funkcja stała $f(x) = c, c \in \mathbb{R}, x \in [a, b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale. Niech P będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Dowolna suma Riemanna odpowiadającą podziałowi P ma postać:

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a),$$

$$(\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n)$$

Stąd wynika, że $\int_a^b f(x)dx = c(b - a)$.

(b) Roważmy ponownie funkcję Dirichleta z Przykładu 18 (a), zawężoną do przedziału $[a, b]$. Dla każdego podziału P przedziału $[a, b]$ można utworzyć sumę Riemanna równą zeru, jeśli wszystkie punkty ξ_i będą liczbami niewymiernymi, lub równą $(b - a)$, jeśli wszystkie punkty ξ_i będą liczbami wymiernymi. Jest więc jasne, że dla każdego ciągu normalnego podziałów (P_k) granica $\lim\limits_{k\to\infty} R_k$, gdzie $R_k \in \mathfrak{R}(f, P_k)$, $k \in \mathbb{N}$, nie istnieje.

Definicja 71. Niech f będzie ograniczoną funkcją rzeczywistą określona na $[a, b]$. Każdemu podziałowi P przedziału $[a, b]$ odpowiadają liczby:

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Liczby $U(f, P)$ i $L(f, P)$ nazywamy odpowiednio sumą górną i dolną lub sumami Darboux funkcji f przy podziale P przedziału $[a, b]$. Dalej,

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf_P U(f, P), \tag{36}$$

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} = \sup_P L(f, P), \tag{37}$$

gdzie kres górny i dolny są brane ze względu na wszystkie podziały P przedziału $[a, b]$. Lewe strony równości (36) i (37) nazywają się odpowiednio górną i dolną całką Darboux funkcji f na przedziale $[a, b]$.

Ponieważ funkcja f jest ograniczona, więc istnieją liczby rzeczywistę m i M takie, że

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{dla} \quad x \in [a,b]$$

Oznacza to, że przy dowolnym podziale P przedziału $[a,b]$ mamy

$$m(b-a) \leqslant L(f,P) \leqslant U(f,P) \leqslant M(b-a)$$

a zatem zbiory $\{L(f,P) : P\}$ i $\{U(f,P) : P\}$ są ograniczone. Wynika stąd, że całki górna i dolna są określone przy dowolnej funkcji ograniczonej f.

Definicja 72. Mówimy, że podział P^* przedziału $[a,b]$ jest rozdrobnieniem (lub zagęszczeniem) podziału P tego przedziału, jeśli $P \subset P^*$, to znaczy, jeśli każdy punkt przedziału P jest także punktem przedziału P^*. Jeśli dane są dwa podziały P_1,P_2, to podział $P^* = P_1 \cup P_2$ nazywać będziemy ich wspólnym rozdrobnieniem (lub wspólnym zagęszczeniem).

Twierdzenie 74. *Jeśli P^* jest rozdrobnieniem podziału P, to*

$$L(f,P) \leqslant L(f,P^*) \quad U(f,P) \leqslant U(f,P^*)$$

Dowód. Załóżmy wpierw, że P^* zawiera tylko o jeden punkt więcej niż P. Niech tym dodatkowym punktem będzie x^* i niech $x_{i-1} < x^* < x_i$, gdzie x_{i-1}, x_i są dwoma kolejnymi punktami przedziału P. Przyjmijmy

$$\omega_1 = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x^*} f(x), \quad \omega_2 = \inf_{x^* \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$$

Wtedy $\omega_1 \geqslant m_i$ i $\omega_2 \geqslant m_i$, gdzie $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$. Mamy więc

$$\begin{aligned} L(f,P^*) - L(f,P) &= \omega_1(x^* - x_{i-1}) + \omega_2(x_i - x^*) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= (\omega_1 - m_i)(x^* - x_{i-1}) + (\omega_2 - m_i)(x_i - x^*) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Jeśli P^* zawiera o k punktów więcej niż P, to powtarzając powyższe rozumowanie k razy otrzymamy pierwszą nierówność tezy. Dowód drugiej przebiega analogicznie.

Twierdzenie 75. *Jeśli f jest funkcją ograniczoną na przedziale $[a,b]$, to*

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} \leqslant \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

Dowód. Niech P^* będzie wspólnym rozdrobnieniem podziałów P_1 i P_2 przedziału $[a,b]$. Z Twierdzenia 75 wynika, że

$$L(f,P_1) \leqslant L(f,P^*) \leqslant U(f,P^*) \leqslant U(f,P_2)$$

Stąd $L(f,P_1) \leqslant U(f,P_2)$. Traktując P_2 jako ustalone i obliczając kres górny ze względu na wszystkie podziały P_1, wobec poprzedniej nierówności otrzymujemy

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} \leqslant U(f,P_2)$$

Przechodząc do kresu dolnego ze względu na wszystkie podziały P_2 otrzymujemy tezę dowodzonego twierdzenia.

Udowodnimy teraz dwa kryteria całkowalności funkcji w sensie Riemanna. W oparciu o drugie z tych kryteriów podamy równoważną definicję całki w sensie Riemanna.

Twierdzenie 76. *Na to, aby ograniczona funkcja f była całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$ potrzeba i wystarcza, aby dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istniał taki podział P przedziału $[a, b]$, że*

$$U(f, P) - L(f, P) \leqslant \varepsilon \tag{38}$$

Dowód. Załóżmy wpierw, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$. Wówczas dla każdego danego $\varepsilon > 0$ istnieje taki podział P przedziału $[a, b]$, że nierówność

$$|R - \int_a^b f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ czyli}$$
$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < R < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

jest spełniona przy dowolnym wyborze punktów ξ_i w każdym z przedziałów podziału. Ponieważ sumy Darboux są — przy danym podziale przedziału — odpowiednio kresem górnym i dolnym sum całkowych, zatem spełniają one nierówności

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant L(f, P) \leqslant U(f, P) \leqslant \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

a więc $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$. Załóżmy teraz, że (38) zachodzi. Dla dowolnego podziału P mamy

$$L(f, P) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant U(f, P)$$

Jeśli $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$, to wówczas

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ wynika, że $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Oznaczając ponadto $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = I$ mamy $L(f, P) \leqslant I \leqslant U(f, P)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech P bedzie danym podziałem przedziału $[a, b]$, dla którego (38) zachodzi. Jeśli przez R oznaczymy jedną z wartości sum Riemanna odpowiadającej podziałowi P, to

$$L(f, P) \leqslant R \leqslant U(f, P)$$

Ponieważ liczby R oraz I znajdują się w przedziale $[L(f,P),U(f,P)]$, zatem

$$|R-I|\leqslant\varepsilon$$

Wobec Twierdzenia 74 oraz Definicji 70 wnioskujemy, że $I=\int_a^b f(x)dx$

Jako wniosek z powyższego twierdzenia otrzymujemy następujące

Twierdzenie 77. *Na to by ograniczona funkcja f byla całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ potrzeba i wystarcza, by*

$$\underline{\int_a^b} f dx=\overline{\int_a^b} f dx \tag{39}$$

Dowód. W dowodzie Twierdzenia 76 pokazaliśmy, że (38) implikuje (39). Załóżmy teraz, że (39) zachodzi. Dla danej liczby $\varepsilon>0$ istnieją podziały P_1 i P_2 przedziału $[a,b]$ takie, że

$$\underline{\int_a^b} f dx-\frac{\varepsilon}{2}<L(f,P_1),\quad U(f,P_2)<\overline{\int_a^b} f dx+\frac{\varepsilon}{2}$$

Jeśli podział P jest wspólnym rozdrobniemiem podziałów P_1 i P_2, to na mocy Twierdzenia 74 otrzymujemy

$$U(f,P)\leqslant U(f,P_2)<\overline{\int_a^b} f dx+\frac{\varepsilon}{2}=\underline{\int_a^b} f dx+\frac{\varepsilon}{2}<L(f,P_1)+\varepsilon\leqslant L(f,P)+\varepsilon$$

Stąd $U(f,P)-L(f,P)\leqslant\varepsilon$, a zatem warunek (38) jest spełniony. Wobec Twierdzenia 76 dowód jest zakończony.

Definicja 73. Mówimy, że ograniczona funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna, jeśli

$$\overline{\int_a^b} f dx=\underline{\int_a^b} f dx$$

Wspólną wartość określoną powyższą równością nazywamy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a,b]$.

Zbadamy teraz całkowalność w sensie Riemanna pewnych klas funkcji.

Twierdzenie 78. *Funkcja ciągła na przedziale $[a,b]$ jest na tym przedziale całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Funkcja f jest jednostajnie ciągła na $[a,b]$ (por. Tw. 51), a zatem dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$ taka, że $|f(x)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ dla wszystkich $x,t\in[a,b]$, dla których $|x-t|<\delta$. Niech P będzie podziałem przedziału $[a,b]$, dla którego $\delta(P) < \delta$. Wtedy mamy $M_i - m_i \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$ dla $i = 1, \ldots, n$ i wobec tego

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon$$

Na mocy Twierdzenia 76 funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$.

Udowodnimy teraz następujące uogólnienie powyższego twierdzenia.

Twierdzenie 79. *Jeśli f jest funkcją ograniczoną i mającą tylko skończoną liczbę punktów nieciągłości na przedziale $[a,b]$, to jest ona całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Dowód. Ponieważ funkcja f jest ograniczona, więc istnieją liczby rzeczywiste m, M takie, że $m \leqslant f(x) \leqslant M$ dla wszystkich $x \in [a,b]$. Załóżmy, że f ma k punktów nieciągłości na przedziale $[a,b]$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{8(M-m)k}$ (oczywiście $M \neq m$). Rozważmy przedziały otwarte $(x_l - \delta_1, x_l + \delta_1)$, $l = 1, \ldots, k$, gdzie x_l są punktami nieciągłości funkcji f. Dopełnienie sumy tych przedziałów do przedziału $[a,b]$ składa się ze skończonej liczby przedziałów domkniętych, na których funkcja f jest ciągła, a więc i jednostajnie ciągła. Ponieważ tych przedziałów jest skończenie wiele, więc dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta_2 > 0$ taka, że dla dowolnych punktów x, t należacych do jednego z tych przedziałów, na których funkcja f jest ciągła i spełniająca nierówność $|x - t| < \delta_2$ mamy $|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Weźmy teraz liczbe $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Niech $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ będzię dowolnym podziałem przedziału $[a,b]$, dla którego $\delta(P) < \delta$. Ponadto rozbijmy zbiór indeksów $\{1, \ldots, n\}$ na dwa rozłącznę zbiory A i B w następujący sposób: do zbioru A zaliczymy te liczby i, dla których przedział $[x_{i-1}, x_i]$ nie ma punktów wspólnych z żadnym z skontruowanych powyżej otoczeń punktów x_l, $l = 1, \ldots, k$, a do zbioru B pozostałe przedziały powstające z podziału P przedziału $[a,b]$. Wówczas

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i \in A}(M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{i \in B}(M_i - m_i)\Delta x_i$$

Ponadto

$$\sum_{i \in A}(M_i - m_i)\Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i \in A}\Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Suma długości podprzedziałów przedziału $[a,b]$ indeksowanych przez liczby ze zbioru B jest nie większa niż

$$(\delta + 2\delta_i + \delta)k < 4\frac{\varepsilon}{8(M-m)k}k = \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$$

Dlatego

$$\sum_{i \in B}(M_i - m_i)\Delta x_i \leqslant (M-m)\sum_{i \in B}\Delta x_i < (M-m)\frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Dla podziału P o średnicy mniejszej niż δ otrzymujemy zatem

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon$$

co kończy dowód.

Uwaga 38. Twierdzenie 78 można istotnie uogólnić. Mianowicie dowodzi się, że jeśli f jest ograniczoną funkcją na przedziale $[a,b]$, to jest ona całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona ciągła prawie wszędzie ma $[a,b]$, to znaczy zbiór punktów nieciągłości funkcji f ma miarę Lebesgue'a równą zeru. (por. [7], s. 270). Przykładów takich funkcji dostarcza następujące

Twierdzenie 80. *Funkcja monotoniczna na przedziale $[a,b]$ jest na tym przedziale całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Załóżmy, że f jest funkcją niemalejącą. Niech będzie dane dowolne $\varepsilon > 0$. Weźmy podział P przedziału $[a,b]$ na n równych części o długości $\frac{b-a}{n}$. Ponieważ f jest niemalejącą zatem $M_i = f(x_i)$ oraz $m_i = f(x_{i-1})$ dla $i = 1,\dots,n$. Mamy więc

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}$$

Biorąc n tak duże, aby $(f(b)-f(a))\frac{b-a}{n} < \varepsilon$ i stosując twierdzenie 76 otrzymujemy tezę. W przypadku funkcji nierosnącej dowód jest analogiczny.

Twierdzenie 81. *Jeśli f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ dla $x \in [a,b]$ oraz ϕ jest funkcją ciągłą na $[m,M]$, to funkcja złożona $h = \phi \circ f$ jest R-całkowalna na $[a,b]$.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ funkcja ϕ jest jednostajnie ciągła na $[M,m]$, więc istnieje $\delta > 0$ taka, że $\delta < \varepsilon$ i $|\phi(s) - \phi(t)| < \varepsilon$, jeśli $|s-t| < \delta$. Ponieważ f jest R-całkowalna na $[a,b]$, więc istnieje podział $P = \{x_0,\dots,x_n\}$ przedziału $[a,b]$ taki, że $U(f,P) - L(f,P) < \delta^2$. Niech

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x),$$

$$M_i^* = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} h(x), \quad m_i^* = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} h(x)$$

dla $i = 1,\dots,n$. Podzielmy zbiór $\{1,\dots,n\}$ na dwa rozłącznę zbiory A i B w taki sposób, że $i \in A$, jeśli $M_i - m_i < \delta$ oraz $i \in B$ w przypadku przeciwnym. Wówczas wobec powyższego wyboru δ mamy $M_i^* - m_i^* < \varepsilon$ dla $i \in A$. Natomiast dla $i \in B$ mamy $M_i^* - m_i^* \leqslant 2K$, gdzie $K = \sup\{|\phi(t)| : m \leqslant t \leqslant M\}$. Stąd otrzymujemy

$$\delta \sum_{i\in B} (x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i\in B} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \delta^2, \quad \text{zatem} \sum_{i\in B} (x_i - x_{i-1}) < \delta$$

Mamy więc

$$U(h,P) - L(h,P) = \sum_{i\in A}(M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in B}(M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

a zatem

$$U(h,P) - L(h,P) \leqslant \varepsilon(a + b + 2K)$$

Ponieważ ε było dowolne, zatem na mocy twierdzenia 76 funkcja h jest R-całkowalna.

Następujące twierdzenie opisuję związek całki Riemanna z operacjami arytmetycznymi.

Twierdzenie 82. *Jeśli funkcje f i g są R-całkowalne na przedziale $[a,b]$, to również R-całkowalne są funkcje $f+g$, λf (λ jest dowolną stałą rzeczywistą) i fg oraz prawdziwe są równości:*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \tag{40}$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \tag{41}$$

Dowód. Jest jasne, że dla dowolnego $R \in \mathfrak{R}(f+g,P)$ mamy $R = R_f + R_g$, gdzie $R_f \in \mathfrak{R}(f,P)$, $R_g \in \mathfrak{R}(g,P)$. Niech $I_1 = \int_a^b f(x)dx$, $I_2 = \int_a^b f(x)dx$ oraz $I = I_1 + I_2$. Mamy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_P\forall_{R_f\in\mathfrak{R}(f,P)}\delta(P) < \delta \implies |R_f - I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oraz}$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_P\forall_{R_g\in\mathfrak{R}(g,P)}\delta(P) < \delta \implies |R_g - I_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{Stąd}$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_P\forall_{R\in\mathfrak{R}(f+g,P)}\delta(P) < \delta \implies |R - I| \leqslant |R_f - I_1| + |R_g - I_2| < \varepsilon$$

Wobec powyższego jest jasne, że funkcja $f+g$ jest R-całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz, że spełniony jest wzór 40. Dowód wzoru 41 jest analogiczny.

Dalej przyjmując $\phi(t) = t^2$ oraz stosując do ϕ poprzednie twierdzenie (81) otrzymujemy R-całkowalność funkcji f^2.

R-całkowalność iloczynu funkcji fg wynika z tożsamości

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

Twierdzenie 83. *(a) Jeśli funkcje f i g są R-całkowalne na przedziale $[a,b]$ oraz $f(x) \leqslant g(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$, to*

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

(b) Jeśli funkcja f jest R-całkowalna na przedziale $[a,b]$, to funkcja $|f|$ jest również R-całkowalna na tym przedziale oraz:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

Dowód. (a) Jeśli $m \leqslant f(x) \leqslant M$ dla $x \in [a,b]$, to

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

Stąd, jeśli $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in [a,b]$, to $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$. Wobec tego nierówność $f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in [a,b]$ implikuje

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

(b) Biorąc $\phi(t) = |t|$ w Twierdzeniu 81 otrzymujemy całkowalność funkcji $|f|$. Ponieważ $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ dla $x \in [a,b]$, zatem na mocy (a) otrzymujemy

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

Uwaga 39. (a) Punkt (a) Twierdzenia 83 można udowodnić bezpośrednio w oparciu o definicję całki Riemanna (Def. 69) oraz Wniosek 3 (b).

(b) Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 83 (b) nie jest prawdziwe, to znaczy z R-całkowalności $|f|$ nie wynika R-całkowalność funkcji f. Dla przykładu niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \cap [a,b], \\ -1 & \text{dla } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a,b]. \end{cases}$$

Oczywiście funkcja $|f|$ jest R-całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz $\int_a^b |f(x)|dx = b-a$. Z kolei $underline \int_a^b f(x)dx = -(b-a)$ oraz $\overline{\int_a^b f(x)dx} = b-a$, a zatem wobec Twierdzenia 77 funkcja f nie jest R-całkowalna na przedziale $[a,b]$.

Twierdzenie 84. *Jeśli dwie funkcje f i g są równe na przedziale $[a,b]$ z wyjątkiem skończonego zbioru punktów $\{x_1, \ldots, x_k\}$ i jedna z nich, na przykład g jest R-całkowalna na tym przedziale, to druga też jest na nim R-całkowalna i zachodzi równość*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Dowód. Ponieważ $f = g + (f-g)$, więc wystarczy udowodnić, że funkcja $\phi = f - g$ jest R-całkowalna na $[a,b]$ i $\int_a^b \phi(x)dx = 0$. Oznaczmy $N = \max\{|\phi(x_1), \ldots, \phi(x_k)\}$. Niech P będzie podziałem przedziału $[a,b]$ o średnicy

δ. Funkcja ϕ na co najwyżej $2k$ przedziałach podziału P nie jest tożsamościowo równa zeru. Dlatego mamy $U(\phi, P) \leqslant 2Nk\delta$ i $L(\phi, P) = 0$, zatem $U(\phi, P) - L(\phi, P) \leqslant 2Nk\delta$. Biorąc ϕ odpowiednio małe możemy uczynić różnicę $U(\phi, P) - L(\phi, P)$ dowolnie małą. To oznacza, że funkcja ϕ jest R-całkowalna. Ponadto jasne jest, że $\int_a^b \phi(x)dx = 0$.

Wniosek 18. *Niech funkcja f będzie określona i ograniczona na przedziale otwartym (a, b). Jeśli po nadaniu jej pewnych wartości $f(a)$ i $f(b)$ stanie się ona R-całkowalna na przedziale domkniętym $[a, b]$ — to taką pozostanie — gdy liczby $f(a)$ i $f(b)$ zmienimy w sposób dowolny. Wartość całki nie ulegnie przy tym zmianie.*

Następujący lemat pozwala przy przybliżaniu całki Riemanna sumami całkowymi ograniczyć się tylko do podziałów zawierających z góry ustalony punkt.

Lemat 2. *Niech $c \in [a, b]$ i niech Π^* oznacza zbiór wszystkich podziałów przedziału $[a, b]$ spełniających warunek:*

$$P = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \Pi^* \text{ wtedy i tylko wtedy } x_j = c \text{ dla pewnego } j.$$

Wówczas dla dowolnej funkcji f, ograniczonej na $[a, b]$ zachodzą równości:

$$\sup_{P\in\Pi^*} L(f, P) = \sup_P L(f, P), \quad \inf_{P\in\Pi^*} U(f, P) = \inf_P U(f, P)$$

Dowód. Ponieważ Π^* jest podzbiorem zbioru wszystkich podziałów przedziału $[a, b]$, więc

$$\sup_{P\in\Pi^*} L(f, P) \leqslant \sup_P L(f, P), \quad \inf_{P\in\Pi^*} U(f, P) \geqslant \inf_P U(f, P) \tag{42}$$

Zauważmy, że dla dowolnego podziału P przedziału $[a, b]$ istnieje podział od niego drobniejszy $P^* \in \Pi^*$. Istotnie, jeśli $P \in \Pi^*$, to przyjmujemy $P^* = P$. Jeśli natomiast $P \notin \Pi^*$, to przez dołączenie punktu c do układu punktów wyznaczających P otrzymujemy podział P^* o żądanych własnościach. Mamy więc

$$L(f, P) \leqslant L(f, P^*), \quad U(f, P) \geqslant U(f, P^*),$$

skąd otrzymujemy

$$L(f, P) \leqslant \sup_{P^*\in\Pi^*} L(f, P^*), \quad U(f, P) \geqslant \inf_{P^*\in\Pi^*} U(f, P^*).$$

Wobec dowolności podziału P mamy

$$\sup_P L(f, P) \leqslant \sup_{P^*\in\Pi^*} L(f, P), \quad \inf_P U(f, P) \geqslant \inf_{P^*\in\Pi^*} U(f, P)$$

Z powyższych nierówności i z (42) otrzymujemy tezę.

Twierdzenie 85. *Niech $a < c < b$. Funkcja f jest R-całkowalna na przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona R-całkowalna na przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$. Zachodzi przy tym równość*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(addytywność całki ze względu na przedział)

Dowód. Załóżmy, że funkcja f jest R-całkowalna na przedziale $[a, b]$. Na mocy powyższego lematu możemy ograniczyć się do podziałów przedziału $[a, b]$ zawierających punkt c. Jeśli P jest takim podziałem, to wówczas $P = P_1 \cup P_2$, gdzie P_1 jest podziałem przedziału $[a, c]$, a P_2 — podziałem przedziału $[c, b]$ oraz mamy

$$U(f, P) = U(f, P_1) + U(f, P_2), \quad L(f, P) = L(f, P_1) + L(f, P_2).$$

Niech będzie dane dowolne $\varepsilon > 0$ i niech

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd $U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $U(f, P_2) - L(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Funkcja f jest więc całkowalna na przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$ oraz zachodzą nierówności

$$U(f, P_1) < \int_a^c f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_a^c f(x)dx < L(f, P_1) + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$U(f, P_2) < \int_c^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_c^b f(x)dx < L(f, P_2) + \frac{\varepsilon}{2},$$

Wobec powyższego otrzymujemy $U(L, P) < \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \varepsilon$ i w konsekwencji $\int_a^b f(x)dx < \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \varepsilon$. Ponieważ $\varepsilon > 0$ było dowolne, zatem

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{43}$$

Analogicznie $\int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx < L(f, P) + \varepsilon$, skąd

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx, \tag{44}$$

bowiem $\varepsilon > 0$ jest dowolne. Z nierówności (43) i (44) otrzymujemy żądaną równość. Uzasadnienie implikacji odwrotnej jest analogiczne.

Rozszerzymy teraz zasięg Definicji 69.

Definicja 74. W przypadku gdy $b < a$ lub $b = a$, to całkę Riemanna z funkcji f określamy wzorami

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{lub odpowiednio} \quad \int_a^b f(x)dx = 0.$$

W całce $\int_a^b f(x)dx$ liczbę a nazywamy dolną granicą całkowania, liczbę b – górną granicą całkowania, bez względu na to, czy $b \geqslant a$, czy też $b < a$.