

# Analiza Matematyczna 2

Adrian Madajewski

Semestr II

## 8 Całka Riemanna

### 8.1 Definicja i podstawowe własności całki

**Definicja 68.** Niech  $[a, b]$  będzie danym przedziałem. Przez podział  $P$  przedziału  $[a, b]$  będziemy nazywali skończony zbiór punktów  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , gdzie

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Będziemy pisać  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Długość największego z odcinków  $[x_{i-1}, x_i]$  nazywać będziemy średnicą podziału  $P$  i oznaczamy ją symbolem  $\delta(P)$ .  $\delta(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ . Niech  $f$  będzie ograniczoną funkcją rzeczywistą określoną na  $[a, b]$ . W każdym z przedziałów  $[x_{i-1}, x_i]$  wybierzmy dowolny punkt  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) i utwórzmy sumę  $R = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ . Sumę tę nazywamy sumą Riemanna odpowiadającą podziałowi  $P$ , przy ustalonym wyborze punktów  $\xi_i$ . Przez  $\mathfrak{R}(f, P)$  oznaczać będziemy zbiór wszystkich możliwych sum Riemanna odpowiadających podziałowi  $P$ . Utwórzmy teraz ciąg  $(P_k)$  podziałów przedziału  $[a, b]$ :

$$a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \dots < x_{n(k)}^{(k)} = b;$$

$$\Delta_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)};$$

$$\delta(P_k) = \max_{1 \leq i \leq n(k)} \Delta x_i^{(k)}, k = 1, 2, \dots$$

Ciąg  $(P_k)$  nazywamy ciągiem normalnym podziałów, jeśli  $\delta(P_k) \rightarrow 0$  przy  $k \rightarrow \infty$ . Oznaczmy przez  $\mathfrak{R}(f, P_k)$  zbiór wszystkich sum Riemanna odpowiadających podziałowi  $P_k$ .

**Definicja 69.** Jeśli dla dowolnego ciągu normalnego podziałów  $(P_k)$  i dla dowolnych sum Riemanna  $R_k \in \mathfrak{R}(f, P_k)$  istnieje skończona granica  $I = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k$ ,

to tę granicę nazywamy całką Riemanna funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$  i oznaczamy ją symbolem

$$\int_a^b f dx \text{ lub } \int_a^b f(x) dx$$

O funkcji  $f$  mówimy wówczas, że jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale  $[a, b]$ , lub że jest ona R-całkowalna na tym przedziale.

Powyższą definicję można sformułować w następujący równoważny sposób.

**Definicja 70.** Mówimy, że funkcja  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale  $[a, b]$ , jeśli istnieje liczba  $I \in \mathbb{R}$  taka, że

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P \forall R \in \mathfrak{R}(f, P) \delta(P) < \delta \implies |R - I| < \epsilon$$

Piszemy wówczas  $I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} R$ .

Równoważność definicji 69 i 70 można pokazać analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 35.

**Przykład 25.** (a) Funkcja stała  $f(x) = c, c \in \mathbb{R}, x \in [a, b]$  jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale. Niech  $P$  będzie dowolnym podziałem przedziału  $[a, b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Dowolna suma Riemanna odpowiadającą podziałowi  $P$  ma postać:

$$R = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a),$$

$$(\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n)$$

Stąd wynika, że  $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$ .

(b) Roważmy ponownie funkcję Dirichleta z Przykładu 18 (a), zawężoną do przedziału  $[a, b]$ . Dla każdego podziału  $P$  przedziału  $[a, b]$  można utworzyć sumę Riemanna równą zeru, jeśli wszystkie punkty  $\xi_i$  będą liczbami niewymiernymi, lub równą  $(b - a)$ , jeśli wszystkie punkty  $\xi_i$  będą liczbami wymiennymi. Jest więc jasne, że dla każdego ciągu normalnego podziałów  $(P_k)$  granica  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k$ , gdzie  $R_k \in \mathfrak{R}(f, P_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , nie istnieje.

**Definicja 71.** Niech  $f$  będzie ograniczoną funkcją rzeczywistą określoną na  $[a, b]$ . Każdemu podziałowi  $P$  przedziału  $[a, b]$  odpowiadają liczby:

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

Liczby  $U(f, P)$  i  $L(f, P)$  nazywamy odpowiednio sumą górną i dolną lub sumami Darboux funkcji  $f$  przy podziale  $P$  przedziału  $[a, b]$ . Dalej,

$$(36) \quad \overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf_P U(f, P),$$

$$(37) \quad \underline{\int_a^b f(x)dx} = \sup_P L(f, P),$$

gdzie kres górny i dolny są brane ze względu na wszystkie podziały  $P$  przedziału  $[a, b]$ . Lewe strony równości (36) i (37) nazywają się odpowiednio górną i dolną całką Darboux funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$ .

Ponieważ funkcja  $f$  jest ograniczona, więc istnieją liczby rzeczywiste  $m$  i  $M$  takie, że

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{dla} \quad x \in [a, b]$$

Oznacza to, że przy dowolnym podziale  $P$  przedziału  $[a, b]$  mamy

$$m(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b-a)$$

a zatem zbiory  $\{L(f, P) : P\}$  i  $\{U(f, P) : P\}$  są ograniczone. Wynika stąd, że całki górna i dolna są określone przy dowolnej funkcji ograniczonej  $f$ .

**Definicja 72.** Mówimy, że podział  $P^*$  przedziału  $[a, b]$  jest rozdrobnieniem (lub zagęszczeniem) podziału  $P$  tego przedziału, jeśli  $P \subset P^*$ , to znaczy, jeśli każdy punkt przedziału  $P$  jest także punktem przedziału  $P^*$ . Jeśli dane są dwa podziały  $P_1, P_2$ , to podział  $P^* = P_1 \cup P_2$  nazywać będziemy ich wspólnym rozdrobnieniem (lub wspólnym zagęszczeniem). **Twierdzenie 74.** *Jeśli  $P^*$  jest rozdrobnieniem podziału  $P$ , to*

$$L(f, P) \leq L(f, P^*) \quad U(f, P) \leq U(f, P^*)$$

**Dowód.** Załóżmy wpierw, że  $P^*$  zawiera tylko o jeden punkt więcej niż  $P$ . Niech tym dodatkowym punktem będzie  $x^*$  i niech  $x_{i-1} < x^* < x_i$ , gdzie  $x_{i-1}, x_i$  są dwoma kolejnymi punktami przedziału  $P$ . Przyjmijmy

$$\omega_1 = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x^*} f(x), \quad \omega_2 = \inf_{x^* \leq x \leq x_i} f(x)$$

Wtedy  $\omega_1 \geq m_i$  i  $\omega_2 \geq m_i$ , gdzie  $m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ . Mamy więc

$$\begin{aligned} L(f, P^*) - L(f, P) &= \omega_1(x^* - x_{i-1}) + \omega_2(x_i - x^*) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= (\omega_1 - m_i)(x^* - x_{i-1}) + (\omega_2 - m_i)(x_i - x^*) \geq 0 \end{aligned}$$

Jeśli  $P^*$  zawiera o  $k$  punktów więcej niż  $P$ , to powtarzając powyższe rozumowanie  $k$  razy otrzymamy pierwszą nierówność tezy. Dowód drugiej przebiega analogicznie.

**Twierdzenie 75.** *Jeśli  $f$  jest funkcją ograniczoną na przedziale  $[a, b]$ , to*

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} \leq \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

**Dowód.** Niech  $P^*$  będzie wspólnym rozdrobnieniem podziałów  $P_1$  i  $P_2$  przedziału  $[a, b]$ . Z Twierdzenia 75 wynika, że

$$L(f, P_1) \leq L(f, P^*) \leq U(f, P^*) \leq U(f, P_2)$$

Stąd  $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$ . Traktując  $P_2$  jako ustalone i obliczając kres górny ze względu na wszystkie podziały  $P_1$ , wobec poprzedniej nierówności otrzymujemy

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} \leq U(f, P_2)$$

Przechodząc do kresu dolnego ze względu na wszystkie podziały  $P_2$  otrzymujemy tezę dowodzonego twierdzenia.

Udowodnimy teraz dwa kryteria całkowalności funkcji w sensie Riemanna. W oparciu o drugie z tych kryteriów podamy równoważną definicję całki w sensie Riemanna.

**Twierdzenie 76.** *Na to, aby ograniczona funkcja  $f$  była całkowalna w sensie Riemanna na przedziale  $[a, b]$  potrzeba i wystarcza, aby dla dowolnego  $\epsilon > 0$  istniał taki podział  $P$  przedziału  $[a, b]$ , że*

$$(38) \quad U(f, P) - L(f, P) \leq \epsilon$$

**Dowód.** Załóżmy wpierw, że funkcja  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale  $[a, b]$ . Wówczas dla każdego danego  $\epsilon > 0$  istnieje taki podział  $P$  przedziału  $[a, b]$ , że nierówność

$$|R - \int_a^b f(x)dx| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ czyli} \\ \int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < R < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

jest spełniona przy dowolnym wyborze punktów  $\xi_i$  w każdym z przedziałów podziału. Ponieważ sumy Darboux są — przy danym podziale przedziału — odpowiednio kresem górnym i dolnym sum całkowych, zatem spełniają one nierówności

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

a więc  $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ . Załóżmy teraz, że (38) zachodzi. Dla dowolnego podziału  $P$  mamy

$$L(f, P) \leq \underline{\int_a^b f(x) dx} \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} \leq U(f, P)$$

Jeśli  $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ , to wówczas

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} < \epsilon$$

Z dowolności  $\epsilon > 0$  wynika, że  $\underline{\int_a^b f(x) dx} = \overline{\int_a^b f(x) dx}$ . Oznaczając ponadto  $\underline{\int_a^b f(x) dx} = \overline{\int_a^b f(x) dx} = I$  mamy  $L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$ . Ustalmy  $\epsilon > 0$  i niech  $P$  będzie danym podziałem przedziału  $[a, b]$ , dla którego (38) zachodzi. Jeśli przez  $R$  oznaczmy jedną z wartości sum Riemanna odpowiadającej podziałowi  $P$ , to

$$L(f, P) \leq R \leq U(f, P)$$

Ponieważ liczby  $R$  oraz  $I$  znajdują się w przedziale  $[L(f, P), U(f, P)]$ , zatem

$$|R - I| \leq \epsilon$$

Wobec Twierdzenia 74 oraz Definicji 70 wnioskujemy, że  $I = \int_a^b f(x) dx$

Jako wniosek z powyższego twierdzenia otrzymujemy następujące

**Twierdzenie 77.** *Na to by ograniczona funkcja  $f$  była całkowalna w sensie Riemanna na przedziale  $[a, b]$  potrzeba i wystarcza, by*

$$(39) \quad \underline{\int_a^b f dx} = \overline{\int_a^b f dx}$$

**Dowód.** W dowodzie Twierdzenia 76 pokazaliśmy, że (38) implikuje (39). Załóżmy teraz, że (39) zachodzi. Dla danej liczby  $\epsilon > 0$  istnieją podziały  $P_1$  i  $P_2$  przedziału  $[a, b]$  takie, że

$$\underline{\int_a^b f dx} - \frac{\epsilon}{2} < L(f, P_1), \quad U(f, P_2) < \overline{\int_a^b f dx} + \frac{\epsilon}{2}$$

Jeśli podział  $P$  jest wspólnym rozdrobieniem podziałów  $P_1$  i  $P_2$ , to na mocy Twierdzenia 74 otrzymujemy

$$U(f, P) \leq U(f, P_2) < \overline{\int_a^b f dx} + \frac{\epsilon}{2} = \underline{\int_a^b f dx} + \frac{\epsilon}{2} < L(f, P_1) + \epsilon \leq L(f, P) + \epsilon$$

Stąd  $U(f, P) - L(f, P) \leq \epsilon$ , a zatem warunek (38) jest spełniony. Wobec Twierdzenia 76 dowód jest zakończony.

**Definicja 73.** Mówimy, że ograniczona funkcja  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna, jeśli

$$\overline{\int_a^b f dx} = \underline{\int_a^b f dx}$$

Wspólną wartość określoną powyższą równością nazywamy całką Riemanna funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$ .

Zbadamy teraz całkowalność w sensie Riemanna pewnych klas funkcji.

**Twierdzenie 78.** *Funkcja ciągła na przedziale  $[a, b]$  jest na tym przedziale całkowalna w sensie Riemanna.*

**Dowód.** Funkcja  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $[a, b]$  (por. Tw. 51), a zatem dla dowolnego  $\epsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że  $|f(x) - f(t)| < \frac{\epsilon}{b-a}$  dla wszystkich  $x, t \in [a, b]$ , dla których  $|x - t| < \delta$ . Niech  $P$  będzie podziałem przedziału  $[a, b]$ , dla którego  $\delta(P) < \delta$ . Wtedy mamy  $M_i - m_i \leq \frac{\epsilon}{b-a}$  dla  $i = 1, \dots, n$  i wobec tego

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \epsilon$$

Na mocy Twierdzenia 76 funkcja  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna na  $[a, b]$ .

Udowodnimy teraz następujące uogólnienie powyższego twierdzenia.

**Twierdzenie 79.** *Jeśli  $f$  jest funkcją ograniczoną i mającą tylko skończoną liczbę punktów nieciągłości na przedziale  $[a, b]$ , to jest ona całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

**Dowód.** Ponieważ funkcja  $f$  jest ograniczona, więc istnieją liczby rzeczywiste  $m, M$  takie, że  $m \leq f(x) \leq M$  dla wszystkich  $x \in [a, b]$ . Załóżmy, że  $f$  ma  $k$  punktów nieciągłości na przedziale  $[a, b]$ . Weźmy dowolne  $\epsilon > 0$  i  $\delta_1 < \frac{\epsilon}{8(M-m)k}$  (oczywiście  $M \neq m$ ). Rozważmy przedziały otwarte  $(x_l - \delta_1, x_l + \delta_1)$ ,  $l = 1, \dots, k$ , gdzie  $x_l$  są punktami nieciągłości funkcji  $f$ . Dopelnienie sumy tych przedziałów do przedziału  $[a, b]$  składa się ze skończonej liczby przedziałów domkniętych, na których funkcja  $f$  jest ciągła, a więc i jednostajnie ciągła. Ponieważ tych przedziałów jest skończenie wiele, więc dla danego  $\epsilon > 0$  istnieje liczba  $\delta_2 > 0$  taka, że dla dowolnych punktów  $x, t$  należących do jednego z tych przedziałów, na których funkcja  $f$  jest ciągła i spełniająca nierówność  $|x - t| < \delta_2$  mamy  $|f(x) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ . Weźmy teraz liczbe  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Niech  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  będzie dowolnym podziałem przedziału  $[a, b]$ , dla którego  $\delta(P) < \delta$ . Ponadto rozbijmy zbiór indeksów  $\{1, \dots, n\}$  na dwa rozłączne zbiory  $A$  i  $B$  w następujący sposób: do zbioru  $A$  zaliczymy te liczby  $i$ , dla których przedział  $[x_{i-1}, x_i]$  nie ma punktów wspólnych z żadnym z skontruowanych powyżej otoczeń punktów  $x_l$ ,  $l = 1, \dots, k$ , a do zbioru  $B$  pozostałe przedziały powstające

z podziału  $P$  przedziału  $[a, b]$ . Wówczas

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i \in A} (M_i - m_i) \Delta x_i + \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta x_i$$

Ponadto

$$\sum_{i \in A} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{i \in A} \Delta x_i \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\epsilon}{2}$$

Suma długości podprzedziałów przedziału  $[a, b]$  indeksowanych przez liczby ze zbioru  $B$  jest nie większa niż

$$(\delta + 2\delta_i + \delta)k < 4 \frac{\epsilon}{8(M-m)k} k = \frac{\epsilon}{2(M-m)}$$

Dlatego

$$\sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq (M-m) \sum_{i \in B} \Delta x_i < (M-m) \frac{\epsilon}{2(M-m)} = \frac{\epsilon}{2}$$

Dla podziału  $P$  o średnicy mniejszej niż  $\delta$  otrzymujemy zatem

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \epsilon$$

co kończy dowód.

**Uwaga 38.** Twierdzenie 78 można istotnie uogólnić. Mianowicie dowodzi się, że jeśli  $f$  jest ograniczoną funkcją na przedziale  $[a, b]$ , to jest ona całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona ciągła prawie wszędzie na  $[a, b]$ , to znaczy zbiór punktów nieciągłości funkcji  $f$  ma miarę Lebesgue'a równą zeru. (por. [7], s. 270). Przykładów takich funkcji dostarcza następujące

**Twierdzenie 80.** *Funkcja monotoniczna na przedziale  $[a, b]$  jest na tym przedziale całkowalna w sensie Riemanna.*

**Dowód.** Załóżmy, że  $f$  jest funkcją niemalejącą. Niech będzie dane dowolne  $\epsilon > 0$ . Weźmy podział  $P$  przedziału  $[a, b]$  na  $n$  równych części o długości  $\frac{b-a}{n}$ . Ponieważ  $f$  jest niemalejącą zatem  $M_i = f(x_i)$  oraz  $m_i = f(x_{i-1})$  dla  $i = 1, \dots, n$ . Mamy więc

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a)) \frac{b-a}{n}$$

Biorąc  $n$  tak duże, aby  $(f(b) - f(a)) \frac{b-a}{n} < \epsilon$  i stosując twierdzenie 76 otrzymujemy tezę. W przypadku funkcji nierosnącej dowód jest analogiczny.

**Twierdzenie 81.** *Jeśli  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale  $[a, b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M$  dla  $x \in [a, b]$  oraz  $\phi$  jest funkcją ciągłą na  $[m, M]$ , to funkcja złożona  $h = \phi \circ f$  jest R-całkowalna na  $[a, b]$ .*

**Dowód.** Ustalmy  $\epsilon > 0$ . Ponieważ funkcja  $\phi$  jest jednostajnie ciągła na  $[m, M]$ , więc istnieje  $\delta > 0$  taka, że  $\delta < \epsilon$  i  $|\phi(s) - \phi(t)| < \epsilon$ , jeśli  $|s - t| < \delta$ . Ponieważ  $f$  jest R-całkowalna na  $[a, b]$ , więc istnieje podział  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  przedziału  $[a, b]$  taki, że  $U(f, P) - L(f, P) < \delta^2$ . Niech

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x),$$

$$M_i^* = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} h(x), \quad m_i^* = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} h(x)$$

dla  $i = 1, \dots, n$ . Podzielmy zbiór  $\{1, \dots, n\}$  na dwa rozłączne zbiory  $A$  i  $B$  w taki sposób, że  $i \in A$ , jeśli  $M_i - m_i < \delta$  oraz  $i \in B$  w przypadku przeciwnym. Wówczas wobec powyższego wyboru  $\delta$  mamy  $M_i^* - m_i^* < \epsilon$  dla  $i \in A$ . Natomiast dla  $i \in B$  mamy  $M_i^* - m_i^* \leq 2K$ , gdzie  $K = \sup \{|\phi(t)| : m \leq t \leq M\}$ . Stąd otrzymujemy

$$\delta \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \delta^2, \quad \text{zatem} \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) < \delta$$

Mamy więc

$$U(h, P) - L(h, P) = \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

a zatem

$$U(h, P) - L(h, P) \leq \epsilon(a + b + 2K)$$

Ponieważ  $\epsilon$  było dowolne, zatem na mocy twierdzenia 76 funkcja  $h$  jest R-całkowalna.

Następujące twierdzenie opisuje związek całki Riemanna z operacjami arytmetycznymi.

**Twierdzenie 82.** *Jeśli funkcje  $f$  i  $g$  są R-całkowalne na przedziale  $[a, b]$ , to również R-całkowalne są funkcje  $f + g$ ,  $\lambda f$  ( $\lambda$  jest dowolną stałą rzeczywistą) i  $fg$  oraz prawdziwe są równości:*

$$(40) \quad \int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$(41) \quad \int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$



**Dowód.** Jest jasne, że dla dowolnego  $R \in \mathfrak{R}(f + g, P)$  mamy  $R = R_f + R_g$ , gdzie  $R_f \in \mathfrak{R}(f, P)$ ,  $R_g \in \mathfrak{R}(g, P)$ . Niech  $I_1 = \int_a^b f(x)dx$ ,  $I_2 = \int_a^b g(x)dx$  oraz  $I = I_1 + I_2$ . Mamy

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P \forall R_f \in \mathfrak{R}(f, P) \delta(P) < \delta \implies |R_f - I_1| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{oraz}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P \forall R_g \in \mathfrak{R}(g, P) \delta(P) < \delta \implies |R_g - I_2| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{Stąd}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P \forall R \in \mathfrak{R}(f + g, P) \delta(P) < \delta \implies |R - I| \leq |R_f - I_1| + |R_g - I_2| < \epsilon$$

Wobec powyższego jest jasne, że funkcja  $f + g$  jest R-całkowalna na przedziale  $[a, b]$  oraz, że spełniony jest wzór 40. Dowód wzoru 41 jest analogiczny.

Dalej przyjmując  $\phi(t) = t^2$  oraz stosując do  $\phi$  poprzednie twierdzenie (81) otrzymujemy R-całkowalność funkcji  $f^2$ .

R-całkowalność iloczynu funkcji  $fg$  wynika z tożsamości

$$fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2].$$