Analiza Matematyczna 2

Adrian Madajewski

Semestr II

8 Całka Riemanna

8.1 Definicja i podstawowe własności całki

Definicja 68. Niech $[a,b]$ będzie danym przedziałem. Przez podział P przedziału $[a,b]$ będziemy nazywali skończony zbiór punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$, gdzie

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Będziemy pisać $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Długość największego z odcinków $[x_{i-1}, x_i]$ nazywać będziemy średnicą podziału P i oznaczamy ją symbolem $\delta(P)$. $\delta(P) = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. Niech f będzie ograniczoną funkcją rzeczywistą określoną na $[a,b]$. W każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ wybierzmy dowolny punkt ξ_i $(i = 1, \ldots n)$ i utwórzmy sumę $R = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Sumę te nazywamy sumą Riemanna odpowiadającą podziałowi P, przy ustalonym wyborze punktów ξ_i. Przez $\mathfrak{R}(f, P)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich możliwych sum Riemanna odpowiadających podziałowi P. Utwórzmy teraz ciąg (P_k) podziałów przedziału $[a,b]$:

$$a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_{n(k)}^{(k)} = b;$$

$$\Delta_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)};$$

$$\delta(P_k) = \max_{1 \le i \le n(k)} \Delta x_i^{(k)}, k = 1, 2, \ldots$$

Ciąg (P_k) nazywamy ciągiem normalnym podziałów, jeśli $\delta(P_k) \to 0$ przy $k \to \infty$. Oznaczmy przez $\mathfrak{R}(f, P_k)$ zbiór wszystkich sum Riemanna odpowiadających podziałowi P_k.

Definicja 69. Jeśli dla dowolnego ciągu normalnego podziałów (P_k) i dla dowolnych sum Riemanna $R_k \in \mathfrak{R}(f, P_k)$ istnieje skończona granica $I = \lim\limits_{k \to \infty} R_k$, to tę granicę nazywamy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy ją symbolem

$$\int_a^b f dx \text{ lub } \int_a^b f(x) dx$$

O funkcji f mówimy wówczas, że jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, lub że jest ona R-całkowalna na tym przedziale.

Powyższą definicję mozna sformułować w następujący równoważny sposób.

Definicja 70. Mówimy, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, jeśli istnieje liczba $I \in \mathbb{R}$ taka, że

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_P \forall_{R \in \mathfrak{R}(f,P)} \delta(P) < \delta \implies |R - I| < \epsilon$$

Piszemy wówczas $I = \int_a^b f(x) dx = \lim\limits_{\delta(P) \to 0} R$.

Równoważność definicji 69 i 70 można pokazać analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 35.

Przykład 25. (a) Funkcja stała $f(x) = c, c \in \mathbb{R}, x \in [a, b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale. Niech P będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Dowolna suma Riemanna odpowiadającą podziałowi P ma postać:

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a),$$

$$(\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n)$$

Stąd wynika, że $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$.

(b) Roważmy ponownie funkcję Dirichleta z Przykładu 18 (a), zawężoną do przedziału $[a, b]$. Dla każdego podziału P przedziału $[a, b]$ można utworzyć sumę Riemanna równą zeru, jeśli wszystkie punkty ξ_i będą liczbami niewymiernymi, lub równą $(b - a)$, jeśli wszystkie punkty ξ_i będą liczbami wymiernymi. Jest więc jasne, że dla każdego ciągu normalnego podziałów (P_k) granica $\lim\limits_{k\to\infty} R_k$, gdzie $R_k \in \mathfrak{R}(f, P_k)$, $k \in \mathbb{N}$, nie istnieje.

Definicja 71. Niech f będzie ograniczoną funkcją rzeczywistą określona na $[a, b]$. Każdemu podziałowi P przedziału $[a, b]$ odpowiadają liczby:

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Liczby $U(f,P)$ i $L(f,P)$ nazywamy odpowiednio sumą górną i dolną lub sumami Darboux funkcji f przy podziale P przedziału $[a,b]$. Dalej,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P U(f,P), \tag{36}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P L(f,P), \tag{37}$$

gdzie kres górny i dolny są brane ze względu na wszystkie podziały P przedziału $[a,b]$. Lewe strony równości (36) i (37) nazywają się odpowiednio górną i dolną całką Darboux funkcji f na przedziale $[a,b]$.

Ponieważ funkcja f jest ograniczona, więc istnieją liczby rzeczywistę m i M takie, że

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{dla} \quad x \in [a,b]$$

Oznacza to, że przy dowolnym podziale P przedziału $[a,b]$ mamy

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a)$$

a zatem zbiory $\{L(f,P) : P\}$ i $\{U(f,P) : P\}$ są ograniczone. Wynika stąd, że całki górna i dolna są określone przy dowolnej funkcji ograniczonej f.

Definicja 72. Mówimy, że podział P^* przedziału $[a,b]$ jest rozdrobnieniem (lub zagęszczeniem) podziału P tego przedziału, jeśli $P \subset P^*$, to znaczy, jeśli każdy punkt przedziału P jest także punktem przedziału P^*. Jeśli dane są dwa podziały P_1,P_2, to podział $P^* = P_1 \cup P_2$ nazywać będziemy ich wspólnym rozdrobnieniem (lub wspólnym zagęszczeniem). **Twierdzenie 74.** *Jeśli P^* jest rozdrobnieniem podziału P, to*

$$L(f,P) \leq L(f,P^*) \quad U(f,P) \leq U(f,P^*)$$

Dowód. Załóżmy wpierw, że P^* zawiera tylko o jeden punkt więcej niż P. Niech tym dodatkowym punktem będzie x^* i niech $x_{i-1} < x^* < x_i$, gdzie x_{i-1}, x_i są dwoma kolejnymi punktami przedziału P. Przyjmijmy

$$\omega_1 = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x^*} f(x), \quad \omega_2 = \inf_{x^* \leq x \leq x_i} f(x)$$

Wtedy $\omega_1 \geq m_i$ i $\omega_2 \geq m_i$, gdzie $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$. Mamy więc

$$\begin{aligned} L(f,P^*) - L(f,P) &= \omega_1(x^* - x_{i-1}) + \omega_2(x_i - x^*) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= (\omega_1 - m_i)(x^* - x_{i-1}) + (\omega_2 - m_i)(x_i - x^*) \geq 0 \end{aligned}$$

Jeśli P^* zawiera o k punktów więcej niż P, to powtarzając powyższe rozumowanie k razy otrzymamy pierwszą nierówność tezy. Dowód drugiej przebiega analogicznie.

Twierdzenie 75. *Jeśli f jest funkcją ograniczoną na przedziale $[a, b]$, to*

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} \leq \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

Dowód. Niech P^* będzie wspólnym rozdrobnieniem podziałów P_1 i P_2 przedziału $[a, b]$. Z Twierdzenia 75 wynika, że

$$L(f, P_1) \leq L(f, P^*) \leq U(f, P^*) \leq U(f, P_2)$$

Stąd $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$. Traktując P_2 jako ustalone i obliczając kres górny ze względu na wszystkie podziały P_1, wobec poprzedniej nierówności otrzymujemy

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} \leq U(f, P_2)$$

Przechodząc do kresu dolnego ze względu na wszystkie podziały P_2 otrzymujemy tezę dowodzonego twierdzenia.

Udowodnimy teraz dwa kryteria całkowalności funkcji w sensie Riemanna. W oparciu o drugie z tych kryteriów podamy równoważną definicję całki w sensie Riemanna.

Twierdzenie 76. *Na to, aby ograniczona funkcja f była całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$ potrzeba i wystarcza, aby dla dowolnego $\epsilon > 0$ istniał taki podział P przedziału $[a, b]$, że*

$$U(f, P) - L(f, P) \leq \epsilon \tag{38}$$

Dowód. Załóżmy wpierw, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$. Wówczas dla każdego danego $\epsilon > 0$ istnieje taki podział P przedziału $[a, b]$, że nierówność

$$|R - \int_a^b f(x)dx| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ czyli}$$

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < R < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

jest spełniona przy dowolnym wyborze punktów ξ_i w każdym z przedziałów podziału. Ponieważ sumy Darboux są — przy danym podziale przedziału — odpowiednio kresem górnym i dolnym sum całkowych, zatem spełniają one nierówności

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

a więc $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. Załóżmy teraz, że (38) zachodzi. Dla dowolnego podziału P mamy

$$L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(f,P)$$

Jeśli $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$, to wówczas

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon$$

Z dowolności $\epsilon > 0$ wynika, że $\underline{\int_a^b f(x)dx} = \overline{\int_a^b f(x)dx}$. Oznaczając ponadto $\underline{\int_a^b f(x)dx} = \overline{\int_a^b f(x)dx} = I$ mamy $L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$. Ustalmy $\epsilon > 0$ i niech P bedzie danym podziałem przedziału $[a,b]$, dla którego (38) zachodzi. Jeśli przez R oznaczymy jedną z wartości sum Riemanna odpowiadającej podziałowi P, to

$$L(f,P) \leq R \leq U(f,P)$$

Ponieważ liczby R oraz I znajdują się w przedziale $[L(f,P), U(f,P)]$, zatem

$$|R - I| \leq \epsilon$$

Wobec Twierdzenia 74 oraz Definicji 70 wnioskujemy, że $I = \int_a^b f(x)dx$

Jako wniosek z powyższego twierdzenia otrzymujemy następujące

Twierdzenie 77. *Na to by ograniczona funkcja f byla całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ potrzeba i wystarcza, by*

$$\underline{\int_a^b} f dx = \overline{\int_a^b} f dx \tag{39}$$

Dowód. W dowodzie Twierdzenia 76 pokazaliśmy, że (38) implikuje (39). Załóżmy teraz, że (39) zachodzi. Dla danej liczby $\epsilon > 0$ istnieją podziały P_1 i P_2 przedziału $[a,b]$ takie, że

$$\underline{\int_a^b} f dx - \frac{\epsilon}{2} < L(f,P_1), \quad U(f,P_2) < \overline{\int_a^b} f dx + \frac{\epsilon}{2}$$

Jeśli podział P jest wspólnym rozdrobniemiem podziałów P_1 i P_2, to na mocy Twierdzenia 74 otrzymujemy

$$U(f,P) \leq U(f,P_2) < \overline{\int_a^b} f dx + \frac{\epsilon}{2} = \underline{\int_a^b} f dx + \frac{\epsilon}{2} < L(f,P_1) + \epsilon \leq L(f,P) + \epsilon$$

Stąd $U(f,P) - L(f,P) \leq \epsilon$, a zatem warunek (38) jest spełniony. Wobec Twierdzenia 76 dowód jest zakończony.

Definicja 73. Mówimy, że ograniczona funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna, jeśli

$$\overline{\int_a^b} f dx = \underline{\int_a^b} f dx$$

Wspólną wartość określoną powyższą równością nazywamy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a, b]$.

Zbadamy teraz całkowalność w sensie Riemanna pewnych klas funkcji.

Twierdzenie 78. *Funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ jest na tym przedziale całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Funkcja f jest jednostajnie ciągła na $[a, b]$ (por. Tw. 51), a zatem dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że $|f(x) - f(t)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ dla wszystkich $x, t \in [a, b]$, dla których $|x - t| < \delta$. Niech P będzie podziałem przedziału $[a, b]$, dla którego $\delta(P) < \delta$. Wtedy mamy $M_i - m_i \leq \frac{\epsilon}{b-a}$ dla $i = 1, \ldots, n$ i wobec tego

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \epsilon$$

Na mocy Twierdzenia 76 funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$.

Udowodnimy teraz następujące uogólnienie powyższego twierdzenia.

Twierdzenie 79. *Jeśli f jest funkcją ograniczoną i mającą tylko skończoną liczbę punktów nieciągłości na przedziale $[a, b]$, to jest ona całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Dowód. Ponieważ funkcja f jest ograniczona, więc istnieją liczby rzeczywiste m, M takie, że $m \leq f(x) \leq M$ dla wszystkich $x \in [a, b]$. Załóżmy, że f ma k punktów nieciągłości na przedziale $[a, b]$. Weźmy dowolne $\epsilon > 0$ i $\delta_1 < \frac{\epsilon}{8(M-m)k}$ (oczywiście $M \neq m$). Rozważmy przedziały otwarte $(x_l - \delta_1, x_l + \delta_1)$, $l = 1, \ldots, k$, gdzie x_l są punktami nieciągłości funkcji f. Dopełnienie sumy tych przedziałów do przedziału $[a, b]$ składa się ze skończonej liczby przedziałów domkniętych, na których funkcja f jest ciągła, a więc i jednostajnie ciągła. Ponieważ tych przedziałów jest skończenie wiele, więc dla danego $\epsilon > 0$ istnieje liczba $\delta_2 > 0$ taka, że dla dowolnych punktów x, t należacych do jednego z tych przedziałów, na których funkcja f jest ciągła i spełniająca nierówność $|x - t| < \delta_2$ mamy $|f(x) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Weźmy teraz liczbe $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Niech $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ będzię dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$, dla którego $\delta(P) < \delta$. Ponadto rozbijmy zbiór indeksów $\{1, \ldots, n\}$ na dwa rozłącznę zbiory A i B w następujący sposób: do zbioru A zaliczymy te liczby i, dla których przedział $[x_{i-1}, x_i]$ nie ma punktów wspólnych z żadnym z skontruowanych powyżej otoczeń punktów x_l, $l = 1, \ldots, k$, a do zbioru B pozostałe przedziały powstające z podziału P przedziału $[a,b]$. Wówczas

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i\in A}(M_i-m_i)\Delta x_i+\sum_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta x_i$$

Ponadto

$$\sum_{i\in A}(M_i-m_i)\Delta x_i\leq\frac{\epsilon}{2(b-a)}\sum_{i\in A}\Delta x_i\leq\frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\epsilon}{2}$$

Suma długości podprzedziałów przedziału $[a,b]$ indeksowanych przez liczby ze zbioru B jest nie większa niż

$$(\delta+2\delta_i+\delta)k<4\frac{\epsilon}{8(M-m)k}k=\frac{\epsilon}{2(M-m)}$$

Dlatego

$$\sum_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta x_i\leq(M-m)\sum_{i\in B}\Delta x_i<(M-m)\frac{\epsilon}{2(M-m)}=\frac{\epsilon}{2}$$

Dla podziału P o średnicy mniejszej niż δ otrzymujemy zatem

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\epsilon$$

co kończy dowód.

Uwaga 38. Twierdzenie 78 można istotnie uogólnić. Mianowicie dowodzi się, że jeśli f jest ograniczoną funkcją na przedziale $[a,b]$, to jest ona całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona ciągła prawie wszędzie ma $[a,b]$, to znaczy zbiór punktów nieciągłości funkcji f ma miarę Lebesgue'a równą zeru. (por. [7], s. 270). Przykładów takich funkcji dostarcza następujące

Twierdzenie 80. *Funkcja monotoniczna na przedziale $[a,b]$ jest na tym przedziale całkowalna w sensie Riemanna.*

Dowód. Załóżmy, że f jest funkcją niemalejącą. Niech będzie dane dowolne $\epsilon>0$. Weźmy podział P przedziału $[a,b]$ na n równych części o długości $\frac{b-a}{n}$. Ponieważ f jest niemalejącą zatem $M_i=f(x_i)$ oraz $m_i=f(x_{i-1})$ dla $i=1,\ldots,n$. Mamy więc

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\frac{b-a}{n}=(f(b)-f(a))\frac{b-a}{n}$$

Biorąc n tak duże, aby $(f(b)-f(a))\frac{b-a}{n}<\epsilon$ i stosując twierdzenie 76 otrzymujemy tezę. W przypadku funkcji nierosnącej dowód jest analogiczny.

Twierdzenie 81. *Jeśli f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$ dla $x \in [a, b]$ oraz ϕ jest funkcją ciągłą na $[m, M]$, to funkcja złożona $h = \phi \circ f$ jest R-całkowalna na $[a, b]$.*

Dowód. Ustalmy $\epsilon > 0$. Ponieważ funkcja ϕ jest jednostajnie ciągła na $[M, m]$, więc istnieje $\delta > 0$ taka, że $\delta < \epsilon$ i $|\phi(s) - \phi(t)| < \epsilon$, jeśli $|s - t| < \delta$. Ponieważ f jest R-całkowalna na $[a, b]$, więc istnieje podział $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ przedziału $[a, b]$ taki, że $U(f, P) - L(f, P) < \delta^2$. Niech

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x),$$

$$M_i^* = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} h(x), \quad m_i^* = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} h(x)$$

dla $i = 1, \dots, n$. Podzielmy zbiór $\{1, \dots, n\}$ na dwa rozłącznę zbiory A i B w taki sposób, że $i \in A$, jeśli $M_i - m_i < \delta$ oraz $i \in B$ w przypadku przeciwnym. Wówczas wobec powyższego wyboru δ mamy $M_i^* - m_i^* < \epsilon$ dla $i \in A$. Natomiast dla $i \in B$ mamy $M_i^* - m_i^* \leq 2K$, gdzie $K = \sup\{|\phi(t)| : m \leq t \leq M\}$. Stąd otrzymujemy

$$\delta \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \delta^2, \quad \text{zatem} \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) < \delta$$

Mamy więc

$$U(h, P) - L(h, P) = \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

a zatem

$$U(h, P) - L(h, P) \leq \epsilon(a + b + 2K)$$

Ponieważ ϵ było dowolne, zatem na mocy twierdzenia 76 funkcja h jest R-całkowalna.

Następujące twierdzenie opisuję związek całki Riemanna z operacjami arytmetycznymi.

Twierdzenie 82. *Jeśli funkcje f i g są R-całkowalne na przedziale $[a, b]$, to również R-całkowalne są funkcje $f + g$, λf (λ jest dowolną stałą rzeczywistą) i fg oraz prawdziwe są równości:*

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \tag{40}$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \tag{41}$$

Dowód. Jest jasne, że dla dowolnego $R \in \mathfrak{R}(f+g,P)$ mamy $R = R_f + R_g$, gdzie $R_f \in \mathfrak{R}(f,P)$, $R_g \in \mathfrak{R}(g,P)$. Niech $I_1 = \int_a^b f(x)dx$, $I_2 = \int_a^b f(x)dx$ oraz $I = I_1 + I_2$. Mamy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_P\forall_{R_f\in\mathfrak{R}(f,P)}\delta(P)<\delta \implies |R_f - I_1| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{oraz}$$

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_P\forall_{R_g\in\mathfrak{R}(g,P)}\delta(P)<\delta \implies |R_g - I_2| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{Stąd}$$

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_P\forall_{R\in\mathfrak{R}(f+g,P)}\delta(P)<\delta \implies |R - I| \le |R_f - I_1| + |R_g - I_2| < \epsilon$$

Wobec powyższego jest jasne, że funkcja $f+g$ jest R-całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz, że spełniony jest wzór 40. Dowód wzoru 41 jest analogiczny.

Dalej przyjmując $\phi(t) = t^2$ oraz stosując do ϕ poprzednie twierdzenie (81) otrzymujemy R-całkowalność funkcji f^2.

R-całkowalność iloczynu funkcji fg wynika z tożsamości

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

