四、决策树

主讲教师：周志华

决策树简史

- 第一个决策树算法：CLS (Concept Learning System)

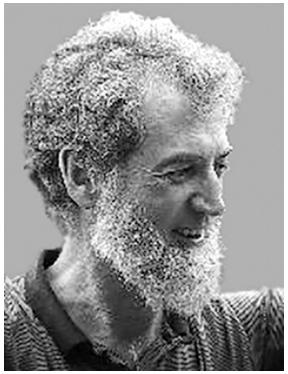
  [E. B. Hunt, J. Marin, and P. T. Stone's book "*Experiments in Induction*" published by Academic Press in 1966]

- 使决策树受到关注、成为机器学习主流技术的算法：ID3

  [J. R. Quinlan's paper in a book "*Expert Systems in the Micro Electronic Age*" edited by D. Michie, published by Edinburgh University Press in 1979]

- 最常用的决策树算法：C4.5

  [J. R. Quinlan's book "*C4.5: Programs for Machine Learning*" published by Morgan Kaufmann in 1993]



J. Ross Quinlan
(1943 -)

决策树简史(con’t)

- 可以用于回归任务的决策树算法： CART (Classification and Regression Tree)

  [L. Breiman, J. H. Friedman, R. A. Olshen, and C. J. Stone’s book “Classification and Regression Trees” published by Wadsworth in 1984]

- 基于决策树的最强大算法之一： RF (Random Forest)

  [L. Breiman’s MLJ’01 paper “Random Forest”]

  这是一种 “集成学习” 方法 → 第 8 章

Leo Breiman
(1928-2005)

信息增益

离散属性 a 的取值：$\{a^1, a^2, \ldots, a^V\}$

D^v：D 中在 a 上取值 = a^v 的样本集合

以属性 a 对 数据集 D 进行划分所获得的信息增益为：

$$\mathrm{Gain}(D,a) = \underbrace{\mathrm{Ent}(D)}_{\text{划分前的信息熵}} - \underbrace{\sum_{v=1}^{V} \boxed{\frac{|D^v|}{|D|}} \mathrm{Ent}(D^v)}_{\text{划分后的信息熵}}$$

第 v 个分支的权重，
样本越多越重要

ID3算法中使用

增益率 (gain ratio)

信息增益：对可取值数目较多的属性有所偏好

有明显弱点，例如：考虑将“编号”作为一个属性

增益率：

$$\mathrm{Gain\_ratio}(D,a)=\frac{\mathrm{Gain}(D,a)}{\mathrm{IV}(a)}$$

其中

$$\mathrm{IV}(a)=-\sum_{v=1}^{V}\frac{|D^v|}{|D|}\log_2\frac{|D^v|}{|D|}$$

属性 a 的可能取值数目越多 (即 V 越大)，则 $\mathrm{IV}(a)$ 的值通常就越大

启发式：先从候选划分属性中找出信息增益高于平均水平的，再从中选取增益率最高的

C4.5算法中使用

基尼指数 (gini index)

$$\mathrm{Gini}(D) = \sum_{k=1}^{|\mathcal{Y}|} \sum_{k' \neq k} p_k p_{k'}$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{|\mathcal{Y}|} p_k^2 \ .$$

反映了从 D 中随机抽取两个样例，其类别标记不一致的概率

Gini(D) 越小，数据集 D 的纯度越高

属性 a 的基尼指数： $\mathrm{Gini\_index}(D, a) = \sum_{v=1}^{V} \frac{|D^v|}{|D|} \mathrm{Gini}(D^v)$

在候选属性集合中，选取那个使划分后基尼指数最小的属性

划分选择 vs. 剪枝

研究表明：划分选择的各种准则虽然对决策树的尺寸有较大影响，但对泛化性能的影响很有限

例如信息增益与基尼指数产生的结果，仅在约 2% 的情况下不同

剪枝方法和程度对决策树泛化性能的影响更为显著

在数据带噪时甚至可能将泛化性能提升 25%

Why?

剪枝 (pruning) 是决策树对付“过拟合”的主要手段！

剪枝

为了尽可能正确分类训练样本，有可能造成分支过多 → 过拟合

可通过主动去掉一些分支来降低过拟合的风险

基本策略：

- 预剪枝 (pre-pruning)：提前终止某些分支的生长
- 后剪枝 (post-pruning)：生成一棵完全树，再 “回头” 剪枝

剪枝过程中需评估剪枝前后决策树的优劣 ⟶ 第 2 章

现在我们假定使用 “留出法”

数据集

表 4.2　西瓜数据集 2.0 划分出的训练集(双线上部)与验证集(双线下部)

训练集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
3	乌黑	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
10	青绿	硬挺	清脆	清晰	平坦	软粘	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	蜷缩	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否

预剪枝

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否

结点1：若不划分，则根结点为叶结点，类别标记为训练样例最多的类别，若选“好瓜”，则验证集中{4,5,8}被分类正确，验证集精度为 3/7 x 100% = 42.9%

1

好瓜

验证集精度

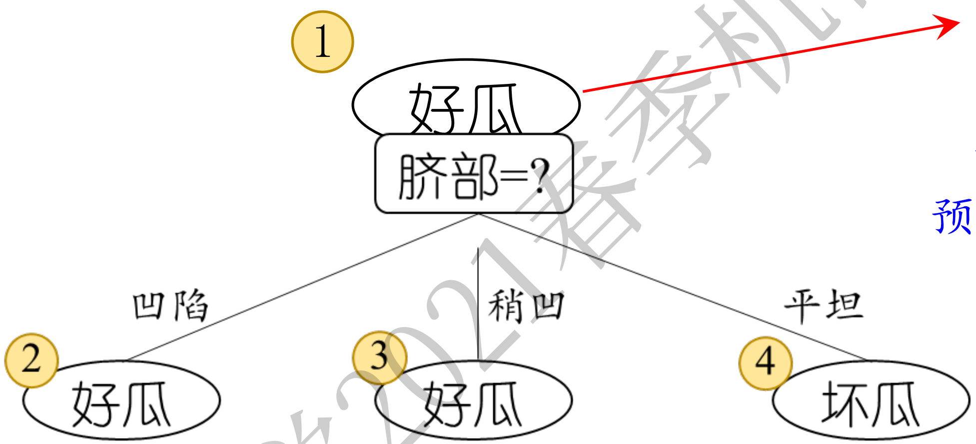
划分前：42.9%

预剪枝

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否

结点1：若不划分，则根结点为叶结点，类别标记为训练样例最多的类别，若选“好瓜”，则验证集中{4,5,8}被分类正确，验证集精度为 3/7 x 100% = 42.9%



验证集精度

划分前：42.9%

划分后：71.4%

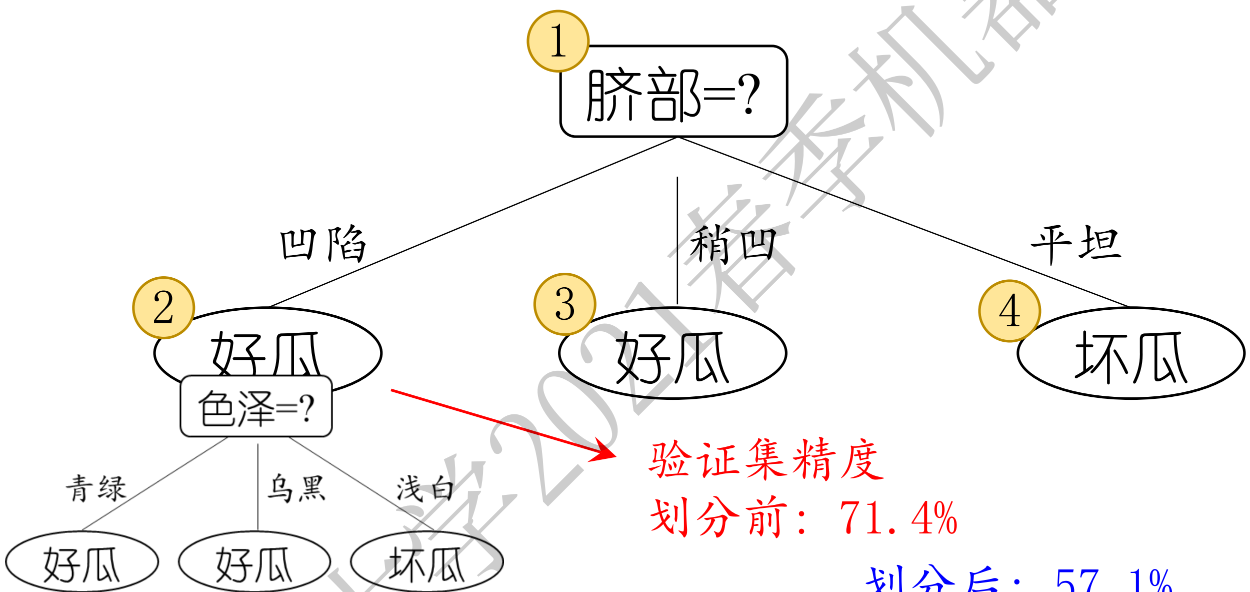
预剪枝决策：**划分**

结点1若划分，则根据划分后结点②③④的训练样例，它们将分别标记为“好瓜”“好瓜”“坏瓜”。此时，验证集中编号为{4,5,8,11,12}的样例被划分正确，验证集精度为 5/7 x 100% = 71.4%

预剪枝

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否



验证集精度
划分前：71.4%

划分后：57.1%

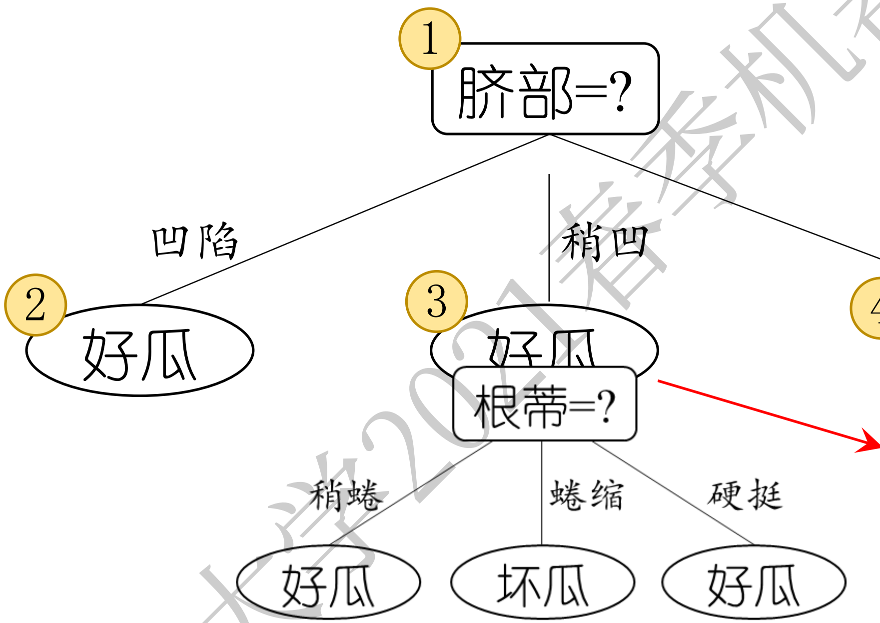
预剪枝决策：**禁止划分**

结点2：若划分，则验证集中{4,8,11,12}被分类正确，验证集精度为 4/7 x100% = 57.1%

预剪枝

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否



验证集精度

划分前：71.4%

划分后：71.4%

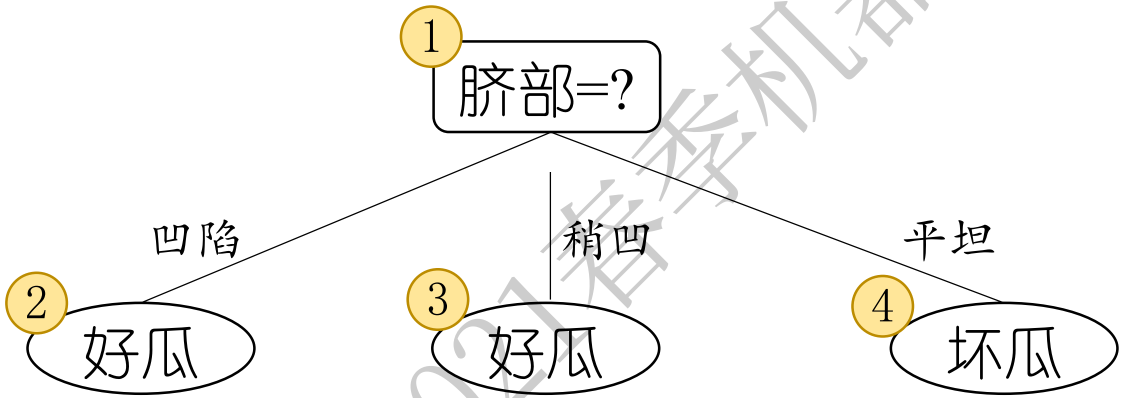
预剪枝决策：**禁止划分**

结点3：若划分，则验证集中{4,5,8,11,12} 被分类正确，验证集精度为 5/7 x100% = 71.4%

预剪枝

验证集

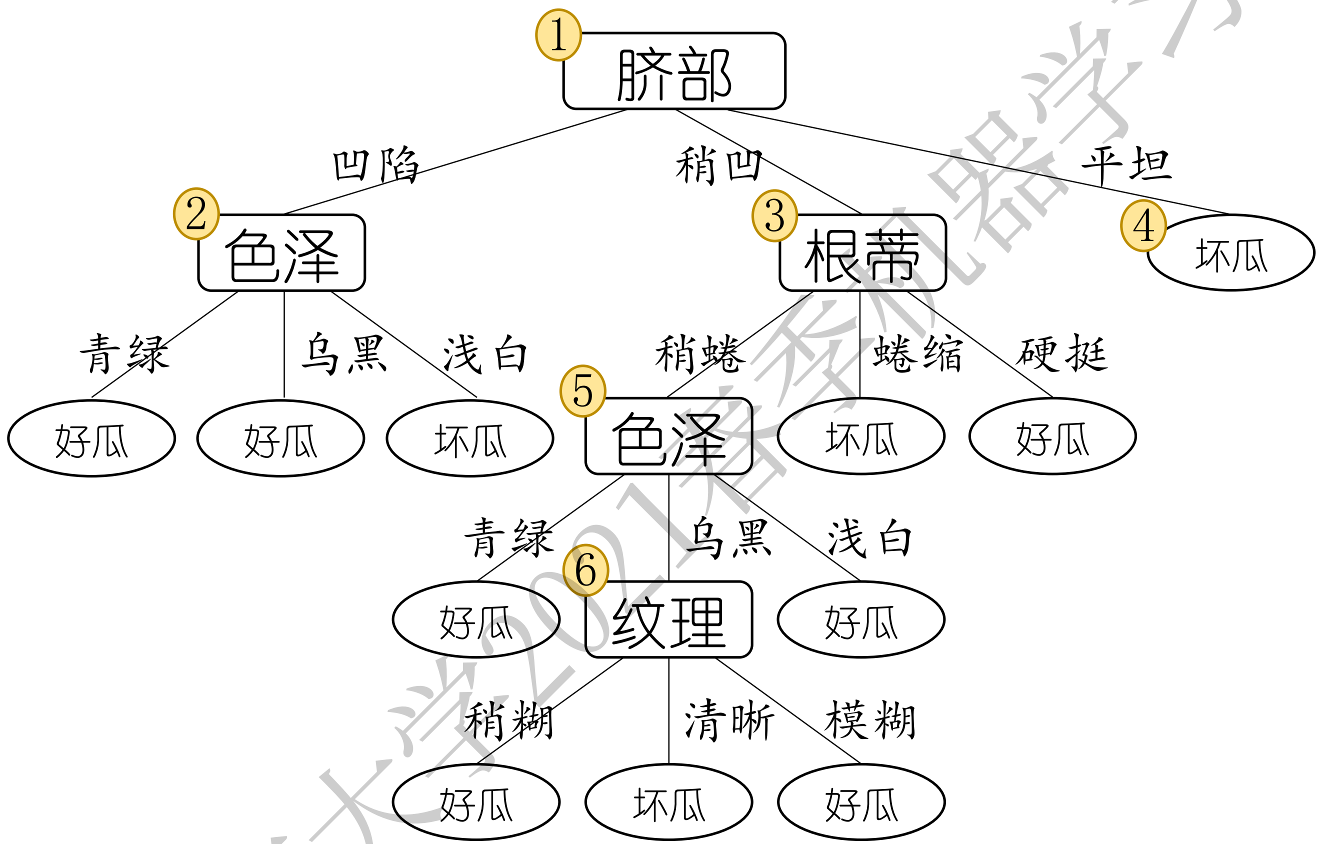
编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否



最终，预剪枝的得到的决策树

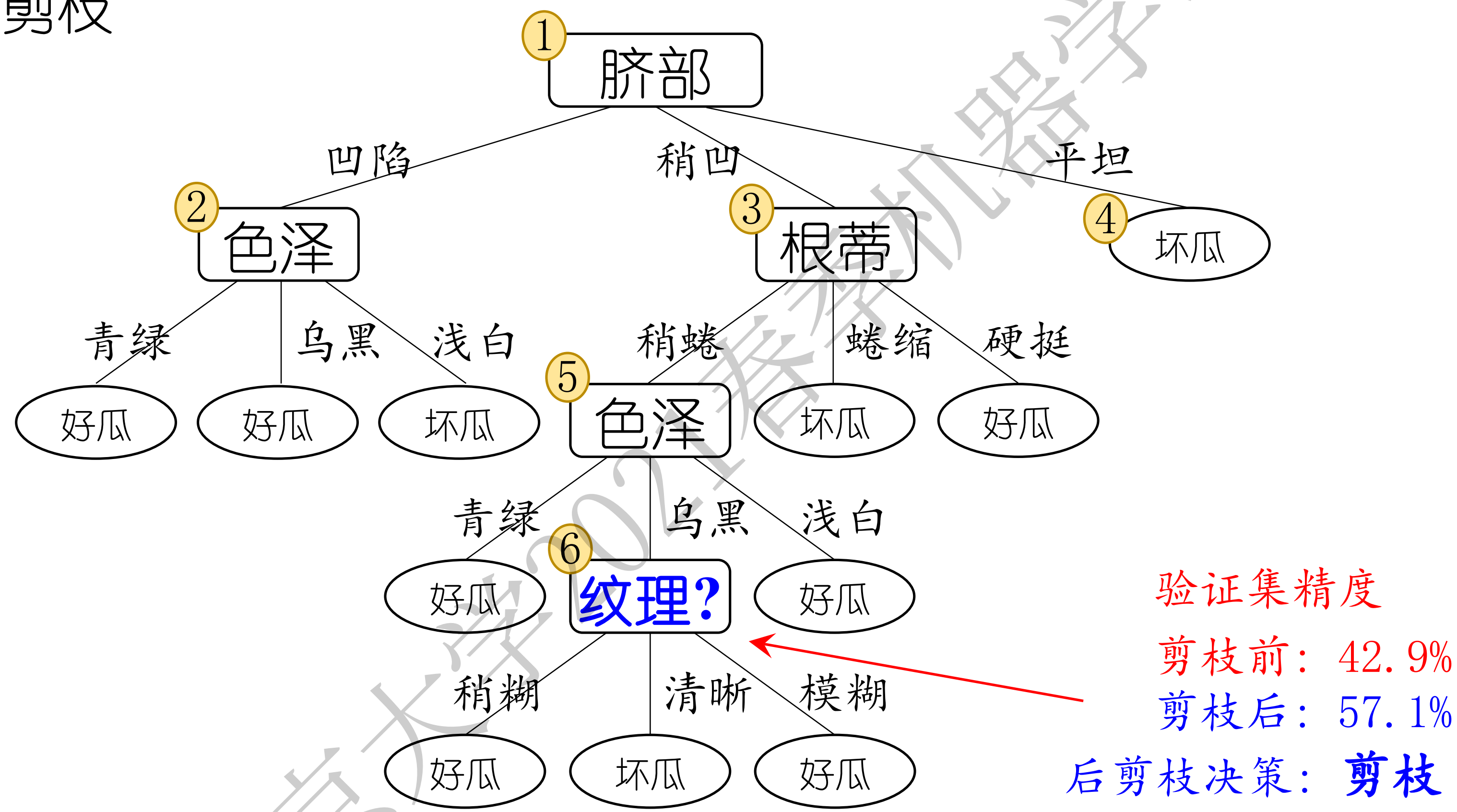
后剪枝

先生成一棵完整的决策树，其验证集精度测得为 42.9%



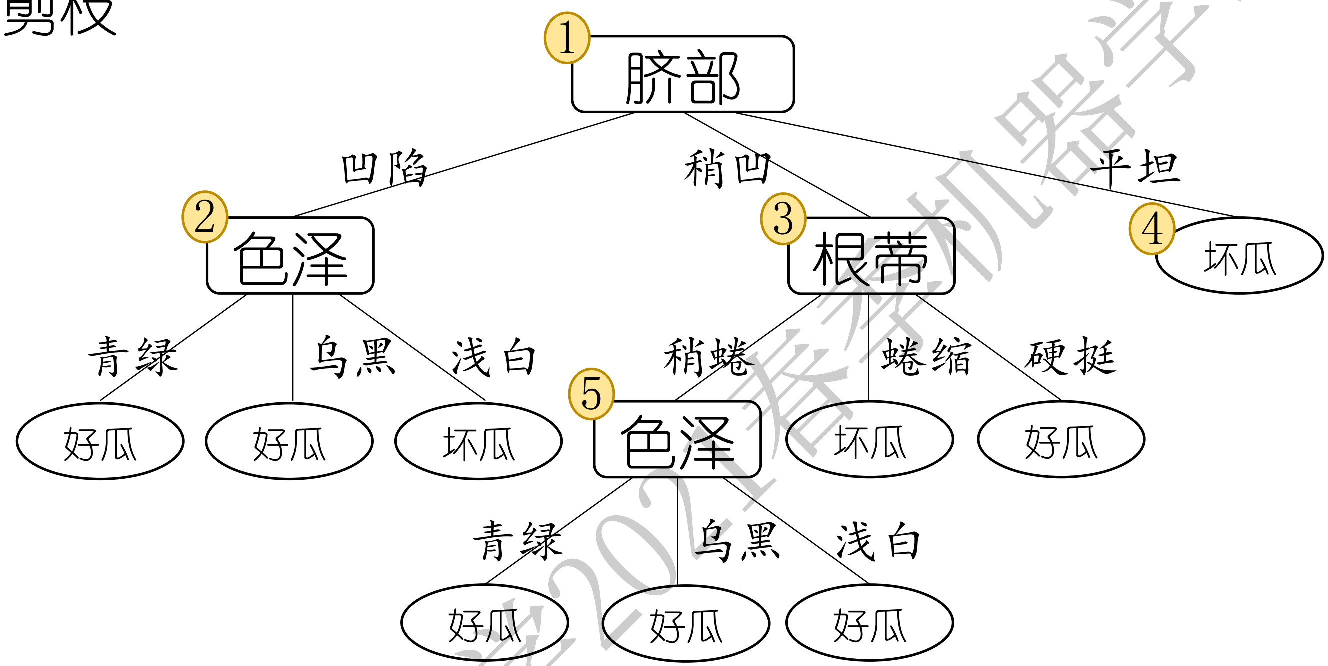
后剪枝 (续)

首先考虑结点⑥，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例 $\{7, 15\}$ 将其标记为“好瓜”，测得验证集精度提高至 57.1%，于是决定剪枝



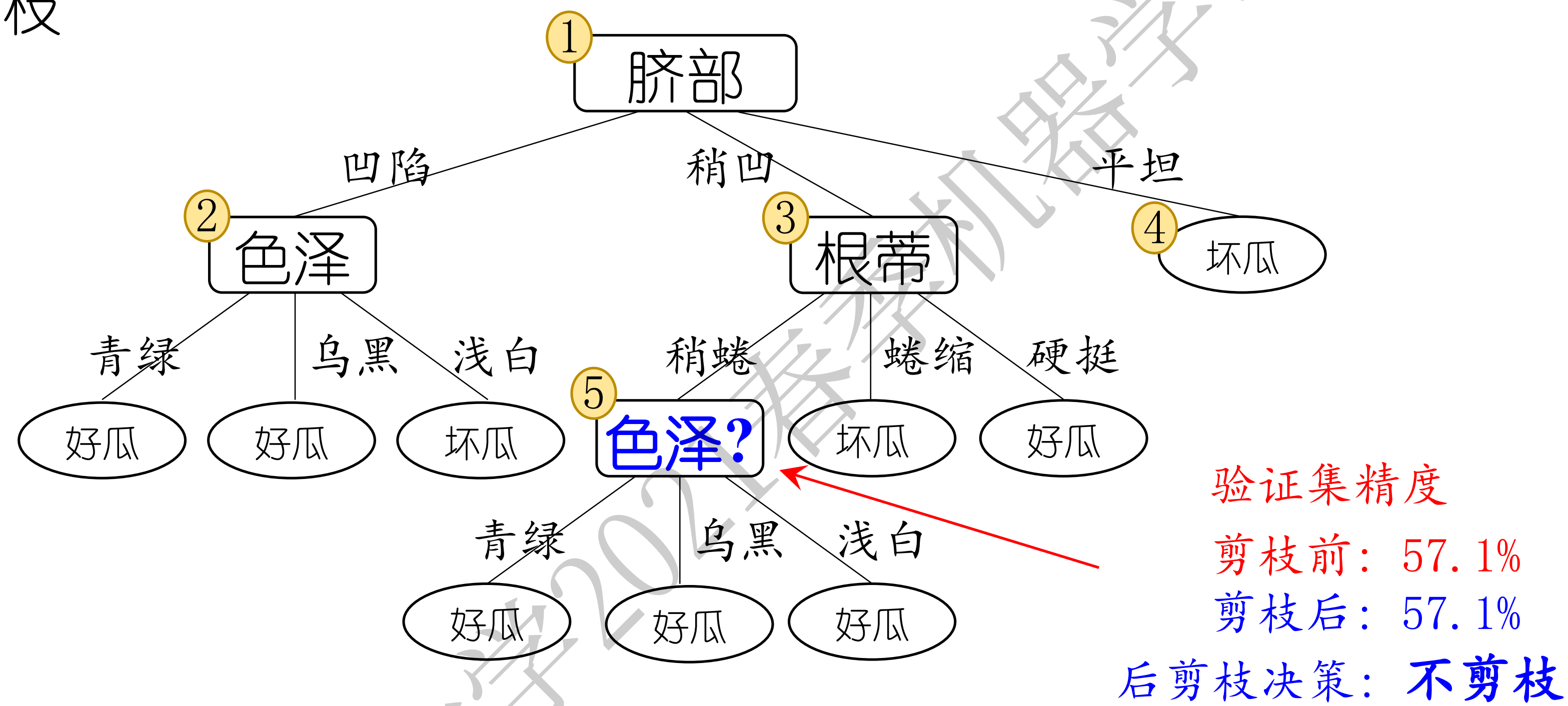
后剪枝 (续)

首先考虑结点⑥，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例 $\{7, 15\}$ 将其标记为“好瓜”，测得验证集精度提高至 57.1%，于是决定剪枝



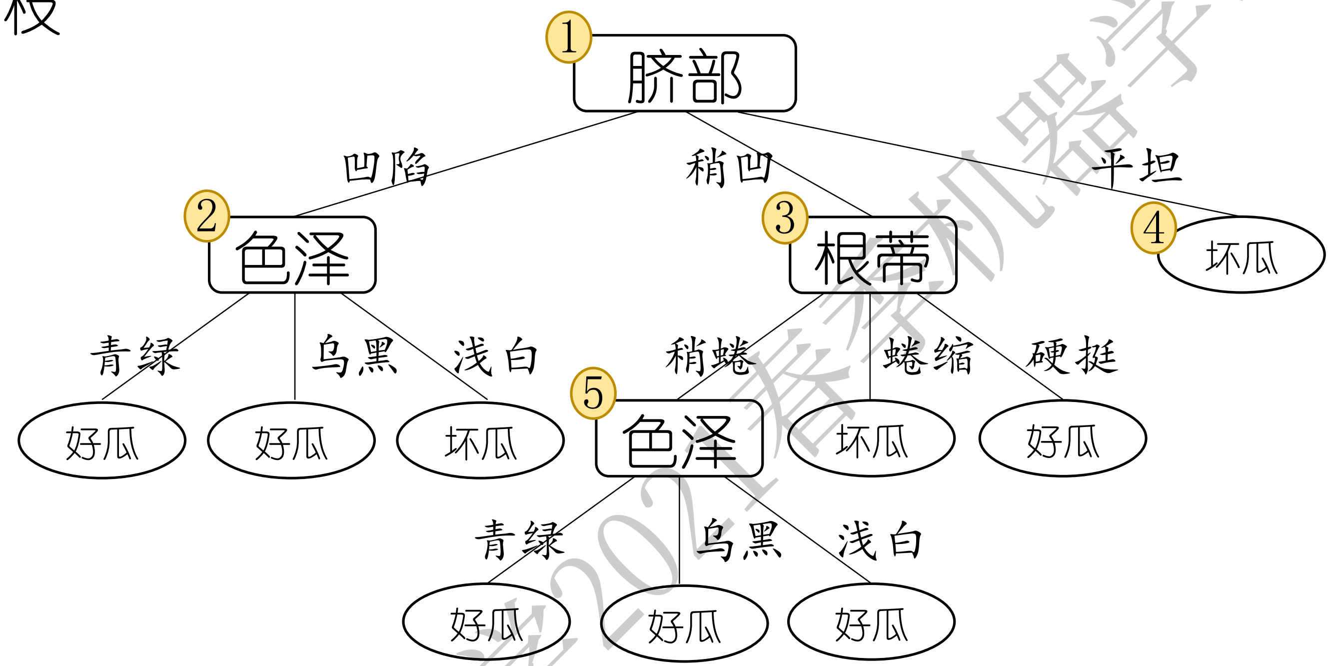
后剪枝 (续)

然后考虑结点⑤，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例 $\{6, 7, 15\}$ 将其标记为“好瓜”，测得验证集精度仍为 **57.1%**，可以不剪枝



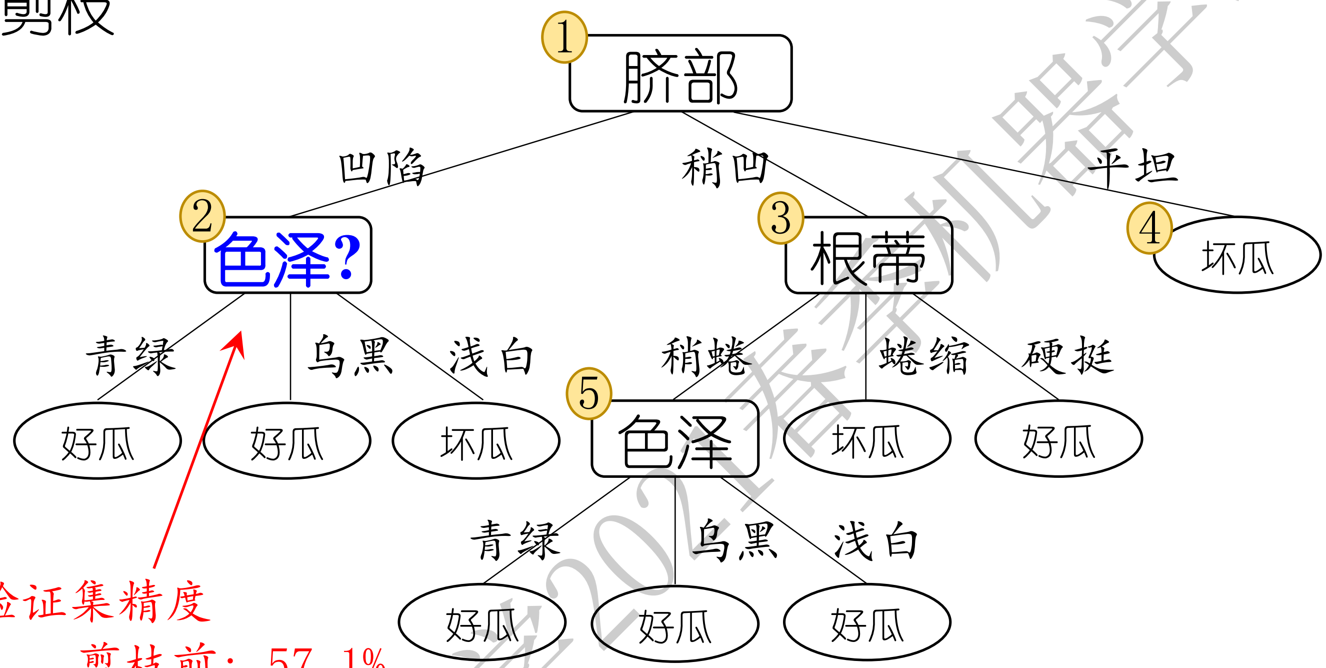
后剪枝 (续)

然后考虑结点⑤，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例 $\{6, 7, 15\}$ 将其标记为“好瓜”，测得验证集精度仍为 **57.1%**，可以不剪枝



后剪枝 (续)

对结点②，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例 $\{1, 2, 3, 14\}$，将其标记为“好瓜”，测得验证集精度提升至 71.4%，决定剪枝



验证集精度

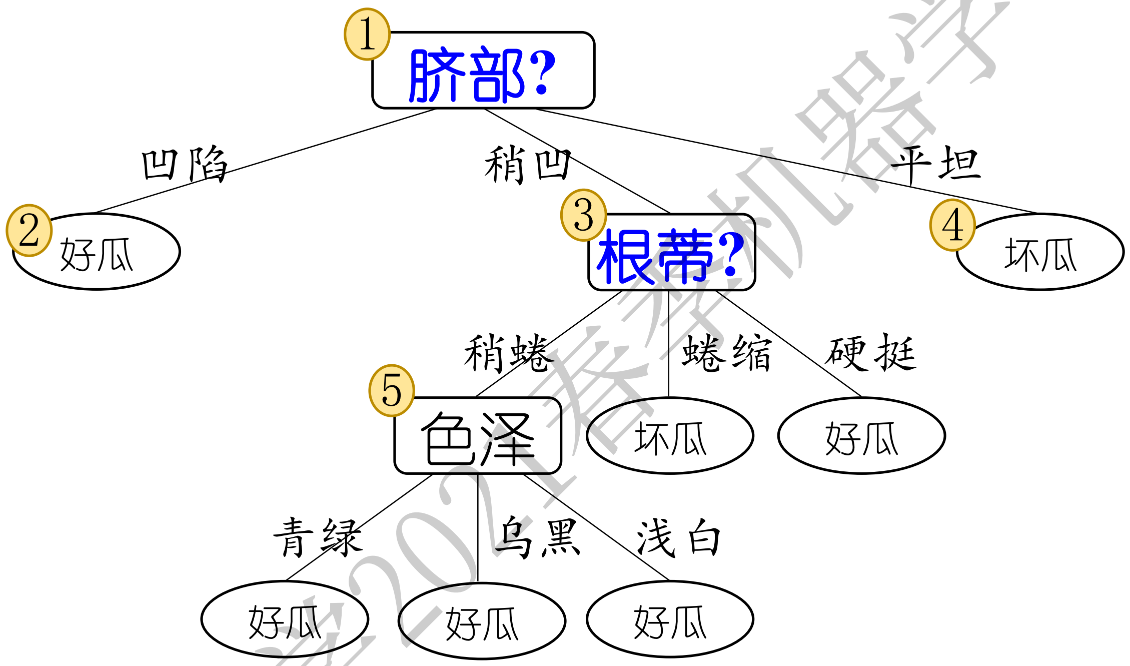
剪枝前：57.1%

剪枝后：71.4%

后剪枝决策：**剪枝**

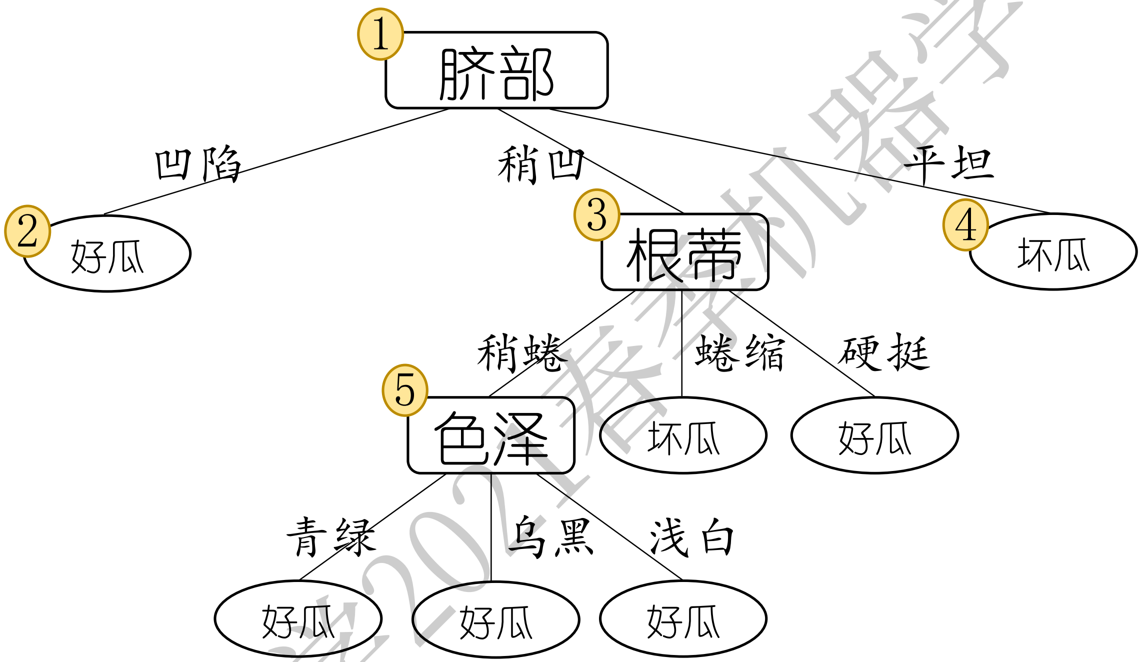
后剪枝 (续)

对结点③和①，先后替换为叶结点，均未测得验证集精度提升，于是不剪枝



后剪枝 (续)

最终，后剪枝得到的决策树：



预剪枝 vs. 后剪枝

- 时间开销：
  - 预剪枝：测试时间开销降低，训练时间开销降低
  - 后剪枝：测试时间开销降低，训练时间开销增加

- 过/欠拟合风险：
  - 预剪枝：过拟合风险降低，欠拟合风险增加
  - 后剪枝：过拟合风险降低，欠拟合风险基本不变

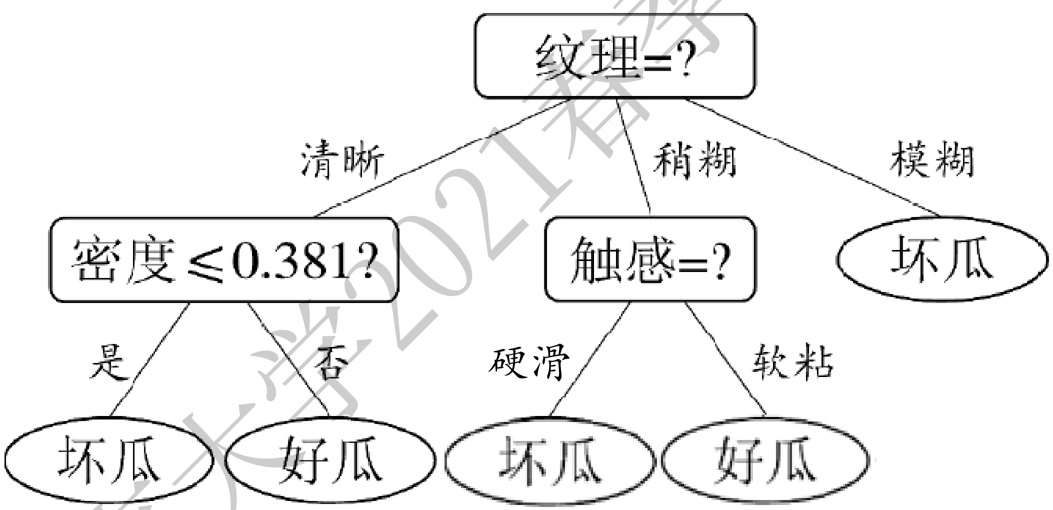
- 泛化性能：后剪枝 通常优于 预剪枝

连续值

基本思路：连续属性离散化

常见做法：二分法 (bi-partition)

- n 个属性值可形成 n-1 个候选划分
- 然后即可将它们当做 n-1 个离散属性值处理



缺失值

现实应用中，经常会遇到属性值“缺失”(missing)现象

仅使用无缺失的样例？ → 对数据的极大浪费

使用带缺失值的样例，需解决：

Q1：如何进行划分属性选择？

Q2：给定划分属性，若样本在该属性上的值缺失，如何进行划分？

基本思路：样本赋权，权重划分

一个例子

仅通过无缺失值的样例来判断划分属性的优劣

学习开始时，根结点包含样例集 D 中全部17个样例，权重均为 1

表 4.4 西瓜数据集 2.0α

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	–	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	–	是
3	乌黑	蜷缩	–	清晰	凹陷	硬滑	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	–	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	–	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	–	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	–	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
10	青绿	硬挺	清脆	–	平坦	软粘	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	–	否
12	浅白	蜷缩	–	模糊	平坦	软粘	否
13	–	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	–	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	–	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

以属性 “色泽” 为例，该属性上无缺失值的样例子集 $\tilde{D}$ 包含 14 个样例，信息熵为

$$\mathrm{Ent}(\tilde{D}) = -\sum_{k=1}^{2} \tilde{p}_k \log_2 \tilde{p}_k = -\left(\frac{6}{14}\log_2\frac{6}{14} + \frac{8}{14}\log_2\frac{8}{14}\right) = 0.985$$

一个例子

令 $\tilde{D}^1$, $\tilde{D}^2$, $\tilde{D}^3$ 分别表示在属性 “色泽” 上取值为 “青绿” “乌黑” 以及 “浅白” 的样本子集，有

$$\mathrm{Ent}(\tilde{D}^1) = -\left(\frac{2}{4}\log_2\frac{2}{4} + \frac{2}{4}\log_2\frac{2}{4}\right) = 1.000 \qquad \mathrm{Ent}(\tilde{D}^2) = -\left(\frac{4}{6}\log_2\frac{4}{6} + \frac{2}{6}\log_2\frac{2}{6}\right) = 0.918$$

$$\mathrm{Ent}(\tilde{D}^3) = -\left(\frac{0}{4}\log_2\frac{0}{4} + \frac{4}{4}\log_2\frac{4}{4}\right) = 0.000$$

因此，样本子集 $\tilde{D}$ 上属性 “色泽” 的信息增益为

$$\begin{aligned}\mathrm{Gain}(\tilde{D}, \text{色泽}) &= \mathrm{Ent}(\tilde{D}) - \sum_{v=1}^{3} \tilde{r}_v \mathrm{Ent}(\tilde{D}^v) \\ &= 0.985 - \left(\frac{4}{14} \times 1.000 + \frac{6}{14} \times 0.918 + \frac{4}{14} \times 0.000\right) \\ &= 0.306\end{aligned}$$

无缺失值样例中属性 a 取值为 v 的占比

于是，样本集 D 上属性 “色泽” 的信息增益为

$$\mathrm{Gain}(D, \text{色泽}) = \rho \times \mathrm{Gain}(\tilde{D}, \text{色泽}) = \frac{14}{17} \times 0.306 = 0.252$$

无缺失值样例占比

一个例子

类似地可计算出所有属性在数据集上的信息增益

$$\mathrm{Gain}(D,\text{色泽}) = 0.252 \qquad \mathrm{Gain}(D,\text{根蒂}) = 0.171$$
$$\mathrm{Gain}(D,\text{敲声}) = 0.145 \qquad \boxed{\mathrm{Gain}(D,\text{纹理}) = 0.424}$$
$$\mathrm{Gain}(D,\text{脐部}) = 0.289 \qquad \mathrm{Gain}(D,\text{触感}) = 0.006$$

进入“纹理=清晰”分支

进入“纹理=稍糊”分支

进入“纹理=模糊”分支

样本权重在各子结点仍为1

在“纹理”上出现缺失值，样本 8，10 同时进入三个分支，三分支上的权重分别为 7/15，5/15，3/15

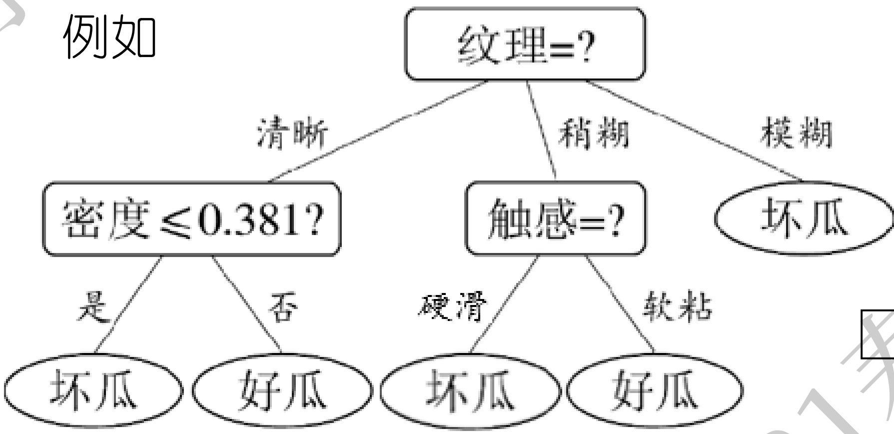
编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	–	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	–	是
3	乌黑	蜷缩	–	清晰	凹陷	硬滑	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	–	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	–	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	–	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	–	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
10	青绿	硬挺	清脆	–	平坦	软粘	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	–	否
12	浅白	蜷缩	–	模糊	平坦	软粘	否
13	–	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	–	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	–	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

权重划分

从“树”到“规则”

- 一棵决策树对应于一个“规则集”
- 每个从根结点到叶结点的分支路径对应于一条规则

例如



- IF (纹理=清晰) ∧ (密度≤0.381) THEN 坏瓜
- IF (纹理=清晰) ∧ (密度>0.381) THEN 好瓜
- IF (纹理=稍糊) ∧ (触感=硬滑) THEN 坏瓜
- IF (纹理=稍糊) ∧ (触感=软粘) THEN 好瓜
- IF (纹理=模糊) THEN 坏瓜

好处：

- 改善可理解性
- 进一步提升泛化能力

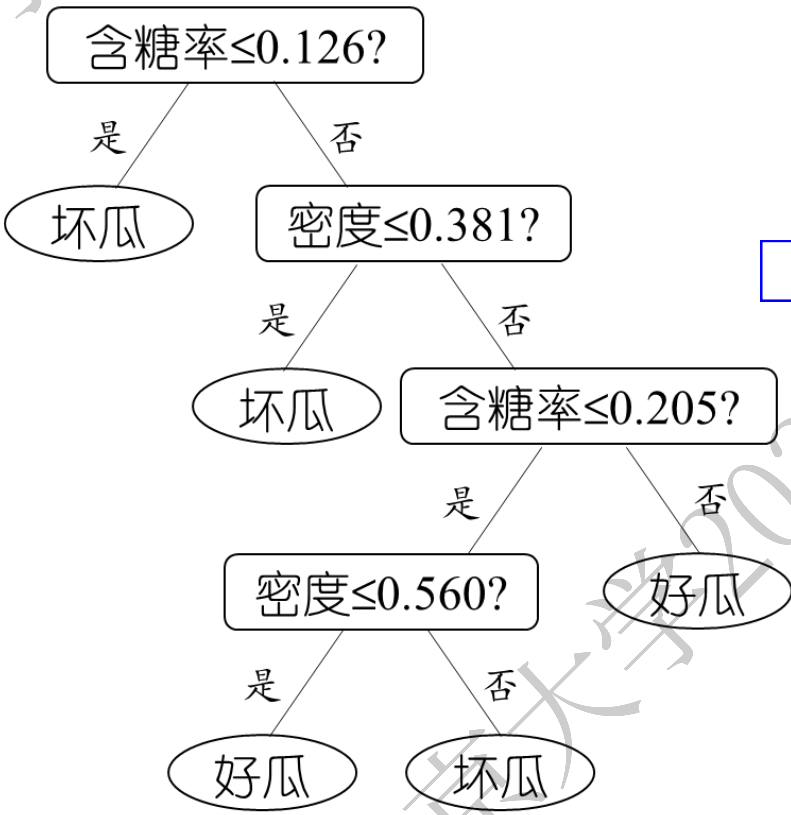
由于转化过程中通常会进行前件合并、泛化等操作

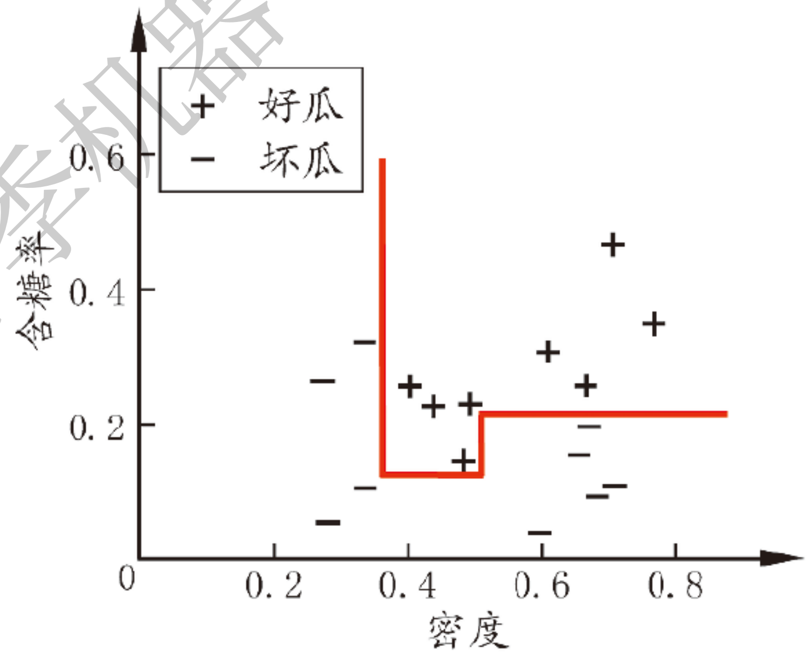
例如 C4.5Rule 的泛化能力通常优于 C4.5决策树

轴平行划分

单变量决策树：在每个非叶结点仅考虑一个划分属性

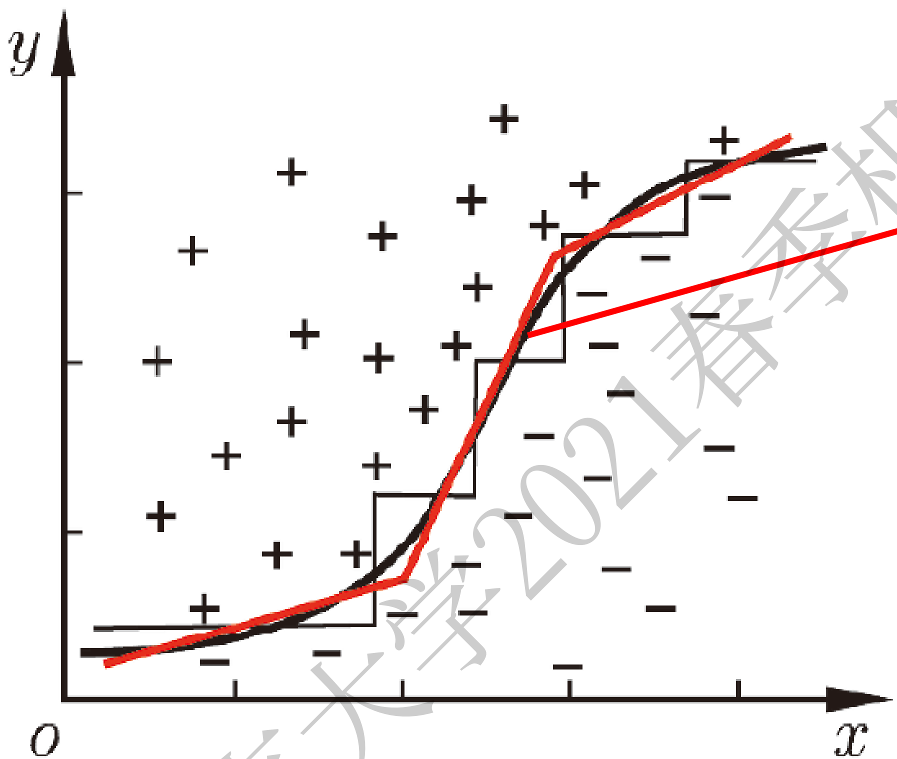
产生“轴平行”分类面





轴平行 vs. 倾斜

当学习任务所对应的分类边界很复杂时，需要非常多段划分才能获得较好的近似

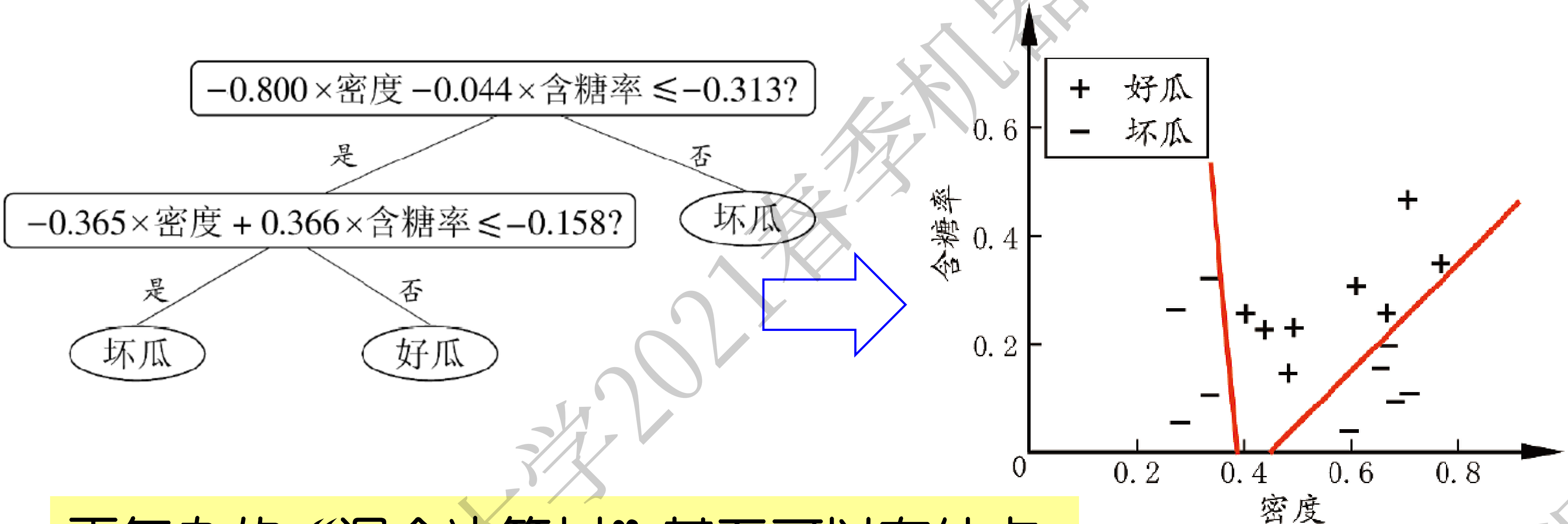


能否产生这样的分类边界？

多变量(multivariate)决策树

多变量决策树：每个非叶结点不仅考虑一个属性

例如 “斜决策树” (oblique decision tree) 不是为每个非叶结点寻找最优划分属性，而是建立一个线性分类器



更复杂的“混合决策树”甚至可以在结点嵌入神经网络或其他非线性模型

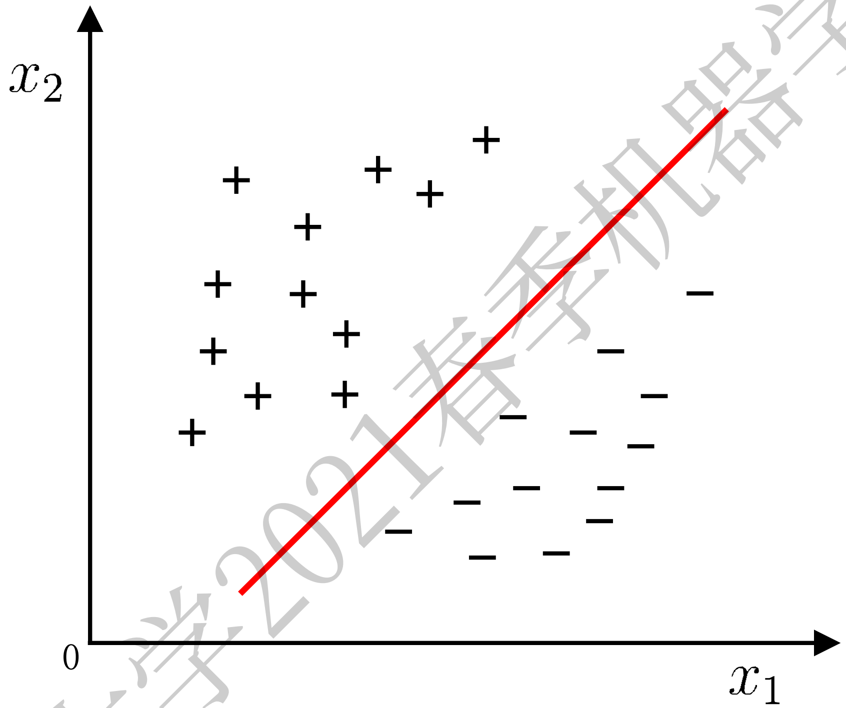
前往第五站……

六、支持向量机

主讲教师：周志华

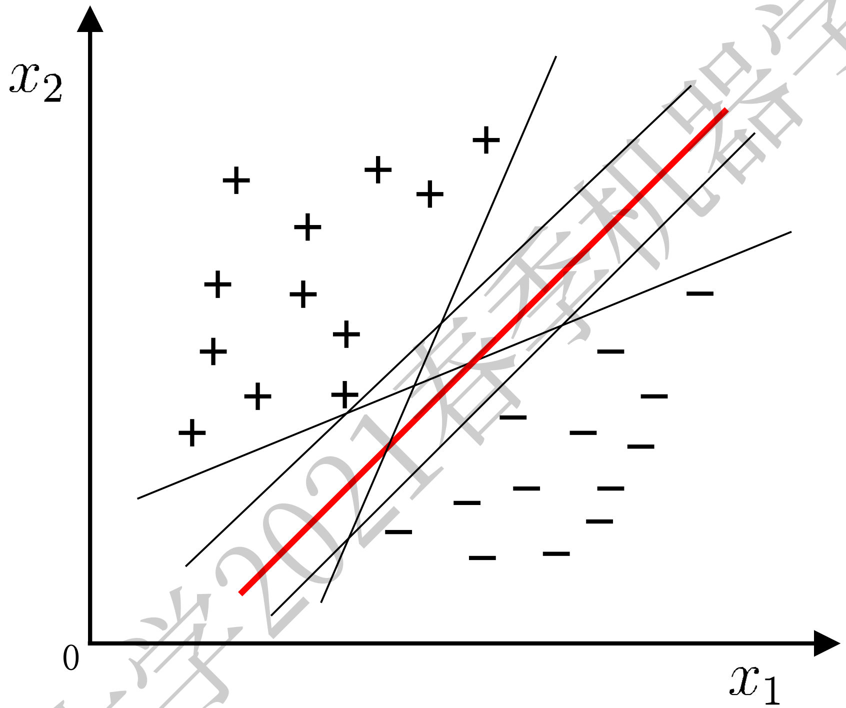
线性分类器回顾

在样本空间中寻找一个超平面，将不同类别的样本分开



线性分类器回顾

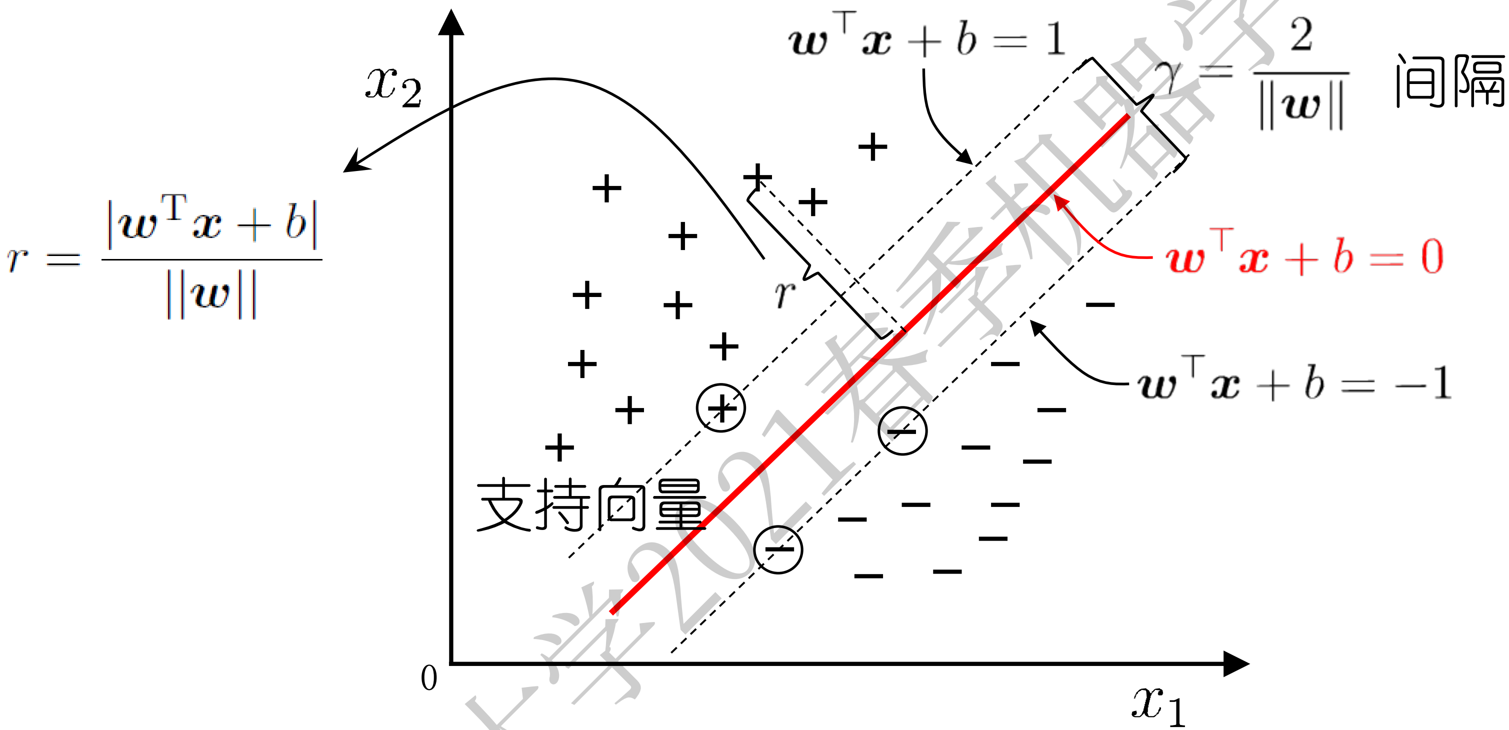
将训练样本分开的超平面可能有很多，哪一个更好呢？



"正中间"的：鲁棒性最好，泛化能力最强

间隔(margin)与支持向量(support vector)

超平面方程: $\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x} + b = 0$



支持向量机基本型

最大间隔：寻找参数 $\boldsymbol{w}$ 和 b，使得 γ 最大

$$\underset{\boldsymbol{w},b}{\arg\max} \quad \frac{2}{\|\boldsymbol{w}\|}$$
$$\text{s.t.} \quad y_i(\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}_i + b) \geq 1, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

$$\underset{\boldsymbol{w},b}{\arg\min} \quad \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2$$
$$\text{s.t.} \quad y_i(\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}_i + b) \geq 1, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

凸二次规划问题，能用优化计算包求解，但可以有更高效的办法

对偶问题

拉格朗日乘子法

- 第一步：引入拉格朗日乘子 $\alpha_i \geq 0$ 得到拉格朗日函数

$$L(\boldsymbol{w}, b, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(1 - y_i(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i + b)\right)$$

- 第二步：令 $L(\boldsymbol{w}, b, \boldsymbol{\alpha})$ 对 $\boldsymbol{w}$ 和 b 的偏导为零可得

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i \ , \quad 0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$$

- 第三步：回代可得

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = 0 \ , \quad \alpha_i \geqslant 0 \ , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

解的特性

最终模型： $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x} + b = \boxed{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{x}} + b$

KKT条件：

$$\begin{cases} \alpha_i \geq 0\,; \\ 1 - y_i f(\boldsymbol{x}_i) \leq 0\,; \\ \alpha_i \left(1 - y_i f(\boldsymbol{x}_i)\right) = 0\,. \end{cases} \Longrightarrow \text{必有 } \alpha_i = 0 \text{ 或 } y_i f(\boldsymbol{x}_i) = 1$$

解的稀疏性：训练完成后，最终模型仅与支持向量有关

支持向量机(Support Vector Machine, SVM) 因此而得名

求解方法 - SMO

基本思路：不断执行如下两个步骤直至收敛

- 第一步：选取一对需更新的变量 α_i 和 α_j
- 第二步：固定 α_i 和 α_j 以外的参数，求解对偶问题更新 α_i 和 α_j

仅考虑 α_i 和 α_j 时，对偶问题的约束 $0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$ 变为

$$\alpha_i y_i + \alpha_j y_j = c \ , \quad \alpha_i \geqslant 0 \ , \quad \alpha_j \geqslant 0$$

用 α_i 表示 α_j，代入对偶问题

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_j$$

有闭式解！

对任意支持向量 $(\boldsymbol{x}_s, y_s)$ 有 $y_s f(\boldsymbol{x}_s) = 1$，由此可解出 b

为提高鲁棒性，通常使用所有支持向量求解的平均值