# 凸优化第一次作业

## 191300020 黄彦骁

## Problem 1

（a）

- 反证法证明第一条性质，假设对于某一个$z \in \mathbb{R}^n, \|z\|_* \leq 0$,即说明有$sup\left\{z^T x \| \|x\| \leq 1\right\} \leq 0$,即此时取得的$x$会使$z^T x \leq 0$，但是此时如果我取$x_1 = -x$，则有$z^T(x_1) = z^T(-x) = -z^T x \geq 0 \geq z^T x$,则至少会有$sup\left\{z^T x \| \|x\| \leq 1\right\} \geq z^T x_1 \geq 0$.所以满足非负性质。
- 如果$\|z\|_* = 0$,也就等价于$sup\left\{z^T x \| \|x\| \leq 1\right\} = 0$，也就是说$for\ all\ x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1$,有$z^T x \leq 0$,但是对于其中任何一个$x_1$，$z^T x_1 + z^T(-x_1) = 0, z^T x_1 \leq 0, z^T(-x_1) \leq 0$,所以有$for\ all\ x \in \mathbb{R}^n, z^T x = 0$,也就只有$z = 0$的情况，故满足正定性。
- $\|tz\|_* = sup\left\{(tz)^T x \| \|x\| \leq 1\right\} = sup\left\{t(z^T x) \| \|x\| \leq 1\right\}$，由非负性可以算出$sup\left\{t(z^T x) \| \|x\| \leq 1\right\} = |t| sup\left\{z^T x \| \|x\| \leq 1\right\} = |t| \|z\|_*$。性质成立
- $\|z_1 + z_2\|_* = sup\left\{(z_1 + z_2)^T x \| \|x\| \leq 1\right\} = sup\left\{(z_1^T + z_2^T) x \| \|x\| \leq 1\right\}$，设$\|z_1\|_*$对应$sup$为$x_1$，$\|z_2\|_*$对应为$x_2$，故有$for\ all\ x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1$，有$(z_1^T + z_2^T) x \leq z_1^T x_1 + z_2^T x_2$，当且仅当$x_1 = x_2$取等，也就等价于$sup\left\{(z_1 + z_2)^T x \| \|x\| \leq 1\right\} \leq \|z_1\|_* + \|z_2\|_*$，也就是$\|z_1 + z_2\|_* \leq \|z_1\|_* + \|z_2\|_*$。性质成立

故得出范数的对偶也是范数。

（b）使用柯西-施瓦茨定理，$|z^T x| \leq \|z\|_2 \|x\|_2$，故对于欧几里得范数的对偶范数而言，当且仅当$\|x\|_2 = 1$时，$z^T x$取到最大值$\|z\|_2$，所以$\|z\|_* = sup\left\{z^T x \| \|x\| \leq 1\right\} = \|z\|_2$，所以欧几里得范数的对偶范数也就是欧几里得范数

## Problem 2

（a）凸集需要满足的上述条件等价于集合内任意两点连成的线段也在集合内

充分性：如果集合$T$是凸集，那么该集合与任何直线$L$的交集内所有的点都在该集合内，那么$T \wedge L$内任意两点之间的连线也会在$T$内，同时该连线也一定会在$L$上，也就是会在$T \wedge L$内，所以$T \wedge L$内任意两点的连线也在$T \wedge L$内，则可以得到$T \wedge L$是凸集。

必要性：如果集合$T$与任意直线$L$的交集$T \wedge L$是一个凸集，也就是说$T \wedge L$上任意两点连成的线段也在该$T \wedge L$内，那么也会在$T$内，所以对于$T$内任意两点，这两点连成的直线$L$与该集合$T$的交集中所有交点都会在该集合中，也就是说$T$内任意两点连成线段上所有的点也都会在$T$内，所以$T$为凸集。

所以结论成立

（b）1）是凸集

2）是凸集

3）不是凸集

4）是凸集

5）不是凸集

## Problem 3

（a）C是凸集当且仅当其与任何直线的交集是凸集，设某一直线为$\{x+tl|x,l\in\mathbb{R}^n,t\in\mathbb{R}\}$，其与集合C的交集为

$\left\{x+tl|(x+tl)^TA(x+tl)+b^T(x+tl)+c\le 0\right\}=\left\{x+tl|l^TAlt^2+(b^Tl+2x^TAl)t+(x^TAx+b^Tx+c)\le 0\right\}$
.

当$A\succeq 0$时，有$for\ all\ l,l^TAl\ge 0$，那么不等式解出$t$的范围就在一个闭区域内，也就对于着交集内任意两点连成线段也在交集内，那就有该交集为凸集，也就是集合C为凸集。

（b）是真的

我们用与第一问类似的方法来证明该命题成立

令$H=\left\{g^Tx+h=0\right\}$，则$C\cap H$是凸集当且仅当$C\cap H$与任何直线的交集为凸集。假设$x\in C\cap H$，那么直线$\{x+tl|t\in\mathbb{R}\}$与$C\cap H$的交集为：

$\left\{x+tl|l^TAlt^2+(b^Tl+2x^TAl)t+(x^TAx+b^Tx+c)\le 0,g^Tlt=0\right\}$，如果$g^Tl\ne 0$，那么一定有$t=0$
，直线与$C\cap H$的交集只有$\{x\}$，因为$x^TAx+b^Tx+c\le 0$，这种情况下无论如何$C\cap H$都是凸集，当$g^Tl=0$时，交集被简化为$\left\{x+tl|l^TAlt^2+(b^Tl+2x^TAl)t+(x^TAx+b^Tx+c)\le 0\right\}$，如果有$A+\lambda gg^T\succeq 0$，也就意味着$for\ all\ v,v^T(A+\lambda gg^T)v=v^TAv\ge 0$，那也就意味着上述交集为凸集，也就意味着$C\cap H$为凸集，所以命题成立

## Problem 4

$\Gamma(x)=\psi(\phi(x))=\psi(\frac{Ax+b}{c^Tx+d})=\frac{E\frac{Ax+b}{c^Tx+d}+f}{g^T\frac{Ax+b}{c^Tx+d}+h}=\frac{E(Ax+b)+f(c^Tx+d)}{g^T(Ax+b)+h(c^Tx+d)}=\frac{(EA+fc^T)x+(Eb+fd)}{(g^TA+hc^T)x+(g^Tb+hd)}$。其中$dom\Gamma=\left\{x|(g^TA+hc^T)x+g^Tb+hd>0\right\}=\{x\in dom\phi|\phi(x)\in dom\psi\}$。所以$\Gamma(x)$也是线性分式函数，为$\Gamma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$，对应矩阵为$\begin{bmatrix}EA+fc^T & Eb+fd\\ g^TA+hc^T & g^Tb+hd\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E & f\\ g^T & h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & b\\ c^T & d\end{bmatrix}$

## Problem 5

（a）$K^*$是一组包含原点为边界的半空间的交集，由于交集运算的保凸性，所以一定为凸锥

（b）有$y\in K_2^*$时，即有$\forall x\in K_2,x^Ty\ge 0$，由于$K_1\subseteq K_2$，也相当于$\forall x\in K_1,x^Ty\ge 0$，所以能推出$y\in K_1^*$，所以有$y\in K_2^*\Rightarrow\forall x\in K_2,x^Ty\ge 0\Rightarrow\forall x\in K_1,x^Ty\ge 0\Rightarrow y\in K_1^*$。最后推出$K_2^*\subseteq K_1^*$。