

Uniwersytet Śląski w Katowicach
Wydział Matematyki Fizyki i Chemii
Instytut Fizyki

Adrian Niewiadomski
NR ALBUMU 223876

Praca magisterska

Oscylacje i stabilność gwiazd

Promotor
Prof. dr hab. Ryszard Mańka - Marcisz

Rybnik, 24 sierpnia 2007

Wyrażam zgodę na udostępnienie mojej pracy magisterskiej do celów naukowo -
badawczych.

DATA

PODPIS AUTORA

Słowa kluczowe:

Oświadczenie autora pracy

Świadomy odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora pracy

Podziękowania

Pragnę złożyć serdeczne podziękowania mojemu promotorowi profesorowi Ryszardowi Mańce – Marciszowi za inspiracje do zajęcia się podjętym tematem, okazaną pomoc, cenne rady dotyczące mojej pracy, jak również ogromną cierpliwość.

Jestem głęboko wdzięczny doktorowi Markowi Biesiadzie, Pani doktor Ilonie Bednarek oraz doktorowi Jackowi Sysce za otrzymane rady, które były dla mnie cenną pomocą.

Chciałbym również podziękować mojej Mamie za nieocenione wsparcie podczas pisania pracy jak również w trakcie odbywania studiów.

Spis treści

Wstęp	5
1. Opis gwiazdy	10
1.1. Symetria sferyczna	10
1.2. Opis Newtonowski	11
1.3. Opis relatywistyczny	12
1.4. Skalowanie równań	13
2. Biały karzeł	17
2.1. Równanie stanu	20
2.2. Wyniki obliczeń	26
3. Gwiazda neutronowa	31
3.1. „Czysta” gwiazda neutronowa	34
3.2. Gwiazda neutronowa z uwzględnieniem elektronów i protonów	38
3.3. Wprowadzenie oddziaływań – model empiryczny	44
3.4. Wprowadzenie oddziaływań – parametryzacja Hartreego – Focka	53
4. Stabilność gwiazd	58
4.1. Masa krytyczna	59
4.2. Częstotliwości własne	60
4.3. Prędkość dźwięku	66
Podsumowanie	72
Uzupełnienie	76
Literatura	78

Wstęp

Niniejsza praca dotyczy oscylacji i stabilności gwiazd zwartych. Przez gwiazdy zwarte będziemy rozumieli białe karły oraz gwiazdy neutronowe. Istnieją także inne rodzaje gwiazd zwartych jak na przykład gwiazdy kwarkowe, jednakże nie będą one rozważane. Rozważanie równań opisujących gwiazdy zwarte jest ważnym krokiem do zrozumienia fizyki zwykłych gwiazd. Równania opisujące gwiazdy zwarte są prostsze gdyż w gwiazdach tych nie zachodzą procesy generacji energii, na przykład procesy fuzji. Ponadto zrozumienie fizyki gwiazd zwartych jest pomocne przy zrozumieniu procesów zachodzących w rotujących gwiazdach neutronowych czyli inaczej pulsarach. Wreszcie przyjmuje się, że wybuchowi supernowej towarzyszy utworzenie gwiazdy neutronowej. Wszystko to powoduje, że opis gwiazd zwartych jest ciekawym i ważnym zagadnieniem. Zanim jednak zajmiemy się opisem wspomnianych gwiazd zastanówmy się najpierw nad pochodzeniem białych karłów oraz gwiazd neutronowych.

Pochodzenie gwiazd wiąże się z materią międzygwiazdową a konkretniej z obłokami molekularnymi. Mechanizm formowania gwiazdy tłumaczy się za pomocą równań równowagi hydrodynamicznej, które sprowadzają się do twierdzenia o wiriale:

$$2 E_k + E_p = 0$$

gdzie E_k to energia kinetyczna zawarta w obłoku o temperaturze T , masie M oraz promieniu R . Natomiast E_p to energia potencjalna zawarta w obłoku. Dla prostoty przyjmować będziemy, że obłok składa się z jednoatomowego gazu doskonałego. Energia kinetyczna ruchów termicznych pojedynczego atomu jest dana wtenczas przez

$$\epsilon_k = \frac{3}{2} k T$$

Gdzie k to stała Boltzmana. Oznaczmy przez μm_H jednostkę masy, przy czym przez μ rozumieć będziemy średni ciężar molekularny, m_H to masa atomu wodoru. Wtenczas energia kinetyczna atomów na jednostkę masy wynosi

$$\frac{dE_k}{dM} = \frac{3}{2} \frac{k T}{\mu m_H}$$

Możemy scałkować powyższą zależność. Otrzymamy wtenczas relację łączącą energię kinetyczną obłoku z jego masą

$$E_k = \frac{3}{2} \frac{k T}{\mu m_H} M$$

Energia potencjalna elementu masy dM oddalonej o odległość r od środka masy jest dana przez zależność

$$dE_p = -\frac{G M}{r} dM$$

Jeżeli masę M oraz jej element dM połączymy odpowiednimi relacjami z gęstością materii w obłoku wyrażenie możemy scałkować i przy założeniu, że gęstość obłoku nie jest funkcją odległości od środka masy otrzymujemy

$$E_p = -\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R}$$

gdzie G to stała grawitacyjna a R to promień obłoku. Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy wielkość zwaną masą Jeansa. Jest to funkcja gęstości i temperatury owego obłoku:

$$M_J = 3,78 \cdot 10^{-9} M_0 \left(\frac{T}{\mu} \right)^{3/2} \rho^{-1/2}$$

W obłoku występują fluktuacje gęstości stąd obszary obłoku mogą mieć masę mniejszą lub większą od masy wyznaczonej z kryterium masy Jeansa. Jeżeli gęstość takiego obłoku jest większa od gęstości wynikającej z wartości masy Jeansa dla danego obłoku, to taki obłok będzie miał tendencje do zmniejszania swoich rozmiarów. Jeżeli natomiast gęstość obłoku jest mniejsza od gęstości granicznej wtenczas obłok będzie miał tendencje do zwiększania rozmiarów. Początkowo obłoki mają masy porównywalne do gromad gwiazd czyli $10^2 - 10^5 M_0$. Jednakże skoro masa graniczna zależy od gęstości, to coraz to mniejsze obszary będą spełniać kryterium masy Jeansa aż ich masy będą rzędu mas pojedynczych gwiazd. Początkowo proces kurczenia się odbywa się w dynamicznej skali czasu, mianowicie czasu porównywalnego ze spadkiem swobodnym z „powierzchni” obłoku do jego centrum. Są to czasy rzędu $10^6 - 10^7$ lat. Energia potencjalna jest wypromieniowywana z obłoku gdyż jest on prawie przezroczysty, gęstości są porównywalne z gęstością materii międzygwiazdowej $\rho \sim 10^{-15} \text{ g/cm}^3$ i dlatego temperatura obłoku rośnie bardzo nieznacznie. Jednakże od pewnej granicznej gęstości droga swobodna fotonów maleje na tyle, że nie są już one wypromieniowywane i zaczynają podnosić temperaturę obłoku. Obłoki składają się głównie z wodoru, który ulega dysocjacji na wodór atomowy przy temperaturze 2000 K . Dysocjacja pozwala na dalszy spadek swobodny materii ku środkowi obłoku ponieważ jest ona procesem wydajnie pochłaniającym energię. Kolejnym ważnym procesem zachodzącym w obłoku jest proces jonizacji wodoru atomowego. Proces ten zachodzi przy temperaturze 10^4 K .

Następnie jonizacji w obłoku ulega hel po czym ustala się równowaga ciśnień. Stąd następne procesy będą już przebiegały wolniej, mianowicie w termicznej skali czasowej. Przyjmuje się, że od tego momentu obłok nazywa się protogwiazdą. Warunki równowagi hydrostatycznej narzucają odpowiednią relację między promieniem i temperaturą efektywną dla ustalonej masy oraz jasności protogwiazdy. W przypadku niespełnienia przez protogwiazdę owych kryteriów warstwy zewnętrzne zaczynają zapadać się. Ciepło jest odprowadzane z gwiazdy dzięki procesom konwekcji, które są na tyle wydajne, że dalsze kurczenie się gwiazdy zachodzi przy praktycznie niezmienniej temperaturze efektywnej. Jasność gwiazdy maleje z powodu kurczenia się. W pewnym momencie w centrum gwiazdy powstaje obszar promienisty, który wzrasta wraz ze wzrostem gęstości gwiazdy. Protogwiazda przestaje być konwektywna, w związku z czym kurczeniu się towarzyszy wzrost temperatury centralnej, w gwieździe natomiast jasność pozostaje stała. Opisuując własności gwiazdy warto wspomnieć także o jej ujemnym cieple właściwym. Ujemne ciepło właściwe oznacza, że w celu podniesienia temperatury układu należy odprowadzać od niego ciepło, czyli w przypadku gwiazdy wydajnie ją chłodzić. Następnie podzielimy gwiazdy ze względu na ich masę gdyż właśnie od tego parametru zależą jej dalsze losy. Masa gwiazdy narzuca gęstość centralną a zatem i temperaturę panującą wewnątrz gwiazdy oraz determinuje jej budowę. Przeważnie w miarę wzrostu masy zwykłej gwiazdy maleje jej gęstość centralna i rośnie temperatura.

Jeżeli masa początkowa protogwiazdy nie przekracza $0,08 M_0$ to temperatura centralna gwiazdy nie dochodzi do granicznej temperatury $2 \cdot 10^6 K$ odpowiadającej zdegenerowanej materii przy gęstościach rzędu $500 g/cm^3$. A co za tym idzie temperatura centralna jest niewystarczająca do rozpoczęcia procesów fuzji. Takie ciała niebieskie nazywamy brązowymi karłami. Przykładem brązowego karła jest Jowisz, który jako jedyna planeta układu słonecznego emituje więcej energii niż jej pochłania od Słońca. Świecenie brązowych karłów polega na termicznym wyświecaniu się. Jowisz na przykład emituje fale głównie w podczerwieni. W brązowych karłach przyrost masy prowadzi do wzrostu gęstości centralnej oraz zmniejszania promienia.

Dla protogwiazd o masach większych niż $0,08 M_0$ temperatura centralna rośnie i kiedy osiąga $10^7 K$ rozpoczynają się procesy fuzji. Wspomniane reakcje fuzji to tak zwany cykl pp polegający na połączeniu czterech atomów wodoru w jeden atom helu. Skoro fotony w gwieździe oddziałują głównie z elektronami to cykl pp prowadzi do zwiększenia jasności gwiazdy. Wszystkie procesy zachodzą teraz w jądrowej skali czasowej dłuższej o kilka rzędów wielkości od skali termicznej, dlatego mówi się o meta stabilności gwiazdy.

Reakcje przemiany wodoru w hel odpowiadają najdłuższemu okresowi w życiu gwiazdy. Zapalenie wodoru zapewnia gwiazdzie tymczasową stabilność jednakże prędzej czy później następuje ponowne kurczenie się jądra gwiazdy. Jest to spowodowane wypalaniem się zapasów wodoru w jej wnętrzu. Gęstość może wzrosnąć do tego stopnia, że w centrum gwiazdy istotne stają się zjawiska kwantowe. Mianowicie największy wkład do ciśnienia w jądrze wnoszą zdegenerowane elektrony. Zdegenerowany gaz elektronowy jest dobrym przewodnikiem ciepła dlatego temperatura jądra rośnie nieznacznie. Rośnie temperatura otoczki co jest związane ze wzrostem jej rozmiarów. Od pewnego momentu jednak gwiazda staje się konwektywna, stąd energia jest skuteczniej odprowadzana. Takie gwiazdy nazywa się czerwonymi olbrzymami. Następuje podniesienie efektywności spalania wodoru w otoczce co owocuje podniesieniem jasności gwiazdy. W związku ze zwiększeniem tempa spalania wodoru rośnie jądro składające się z helu.

Zaczyna rosnąć także temperatura gdyż zdegenerowany gaz elektronowy nie jest już w stanie przekazywać odpowiedniej ilości ciepła do otoczki. Temperatura rośnie aż osiąga $10^8 K$, wtenczas następuje zapalenie helu. Zapalenie helu następuje w jądrze podczas gdy w otoczce nadal pali się wodór.

Zapalenie helu ma gwałtowny charakter dla gwiazd o masach mniejszych niż $8M_0$ gdyż proces fuzji helu zależy silnie od temperatury. Jeżeli temperatura wzrośnie do zbyt dużych wartości gaz elektronowy przestanie być zdegenerowany, w skutek czego wzrośnie ciśnienie. Następnie jądro pod wpływem ciśnienia zacznie się rozszerzać. Zwiększenie rozmiarów jądra spowoduje spadek temperatury, a co za tym idzie zatrzymanie procesów fuzji. Proces palenia helu jest w gwiazdach masywniejszych bardziej łagodny.

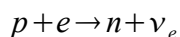
Kolejnym progiem który nałożymy na masę gwiazdy będzie wartość $1,5M_0$. Wartość tą przyjmuje się za kryterium, które oddziela gwiazdy o małych masach od dużych. Powyżej tej granicy gwiazdy osiągają temperatury centralne, potrzebne żeby wśród procesów generacji energii dominował cykl CNO. Gwiazdy, których masa początkowa przewyższa $1,5M_0$ są jasne i masywne, z kolei gwiazdy niespełniające tego kryterium mają mniejsze jasności absolutne. Cykl CNO zależy silniej od temperatury niż cykl pp. Nawet niewielki spadek temperatury wygasza cykl. Zatem cykl zachodzi jedynie w niewielkim obszarze w centrum gwiazdy. Energia jest odprowadzana z wnętrza dzięki procesom konwekcji. Dokładniejszy opis cyklu CNO czytelnik może znaleźć w [3].

Jeżeli masa początkowa gwiazdy nie przekracza $8M_0$ wtenczas temperatura centralna jest niewystarczająca żeby zainicjować palenie węgla. Po wypaleniu helu w centrum gwiazdy gwiazda składa się z węglowo – tlenowego jądra, otoczonego warstwą, w której

pali się hel oraz warstwą, w której nadal następuje fuzja wodoru. Jądro gwiazdy się kurczy natomiast otoczka zaczyna się rozszerzać. Strumień promieniowania wywiera na otoczkę ogromne ciśnienie. Otoczka może zostać całkowicie odrzucona lub utworzyć sferyczną mgławicę planetarną. Pozostaje zwarte jądro utrzymywane dzięki siłom zdegenerowanego gazu elektronowego. Takie ciała niebieskie nazywamy białymi karłami. Świecenie białych karłów polega na termicznym wyświecaniu. Zapasy energii w postaci ciepła wystarczają na 10^9 lat po czym gwiazda przestaje świecić i przechodzi w czarnego karła.

Jeżeli początkowa masa zawiera się między 8 a $40 M_{\odot}$, wczesna ewolucja gwiazdy wygląda podobnie jak w przypadku gwiazd mniej masywnych, jednakże zachodzi szybciej. Przyjmuje się, że im większa masa tym dynamiczniej następują opisane procesy. Następuje palenie do coraz to cięższych pierwiastków aż do żelaza, które jest najkorzystniejsze energetycznie.

Lżejsze pierwiastki palą się w kolejnych warstwach otoczki. To, z czego ostatecznie składać się będzie jądro gwiazdy zależy od jej masy początkowej. Wraz z upływem czasu jądro gwiazdy rośnie i kiedy osiąga masę równą maksymalnej masie gwiazdy neutronowej, jądro traci stabilność. Gęstość centralna osiąga 10^9 g/cm^3 i rozpoczyna się proces neutronizacji. Neutronizacja polega na wyłapywaniu elektronów przez protony i formowaniu neutronów przy emisji neutrin.



Proces ten powoduje zmniejszenie ciśnienia wewnątrz jądra. Jądro zapada się, otoczka natomiast zostaje odrzucona przez strumień neutrin. Zjawisko odrzucenia otoczki nazywane jest wybuchem supernowej. Po gwieździe pozostaje zwarte jądro składające się ze zdegenerowanego gazu neutronowego. Taką gwiazdę nazywa się gwiazdą neutronową.

Protogwiazdy o masach początkowych większych niż $40 M_{\odot}$ ewoluują w podobny sposób z tą jednak różnicą że ich stadium końcowym jest czarna dziura. Procesy zachodzą jeszcze szybciej niż dla poprzednich gwiazd. Reakcje palenia się kolejnych pierwiastków zachodzą mniej gwałtownie. Kiedy masa żelaznego jądra przekracza maksymalną masę gwiazdy neutronowej następuje utrata stabilności i zapadanie grawitacyjne jądra. Otoczka jest odrzucona w postaci wybuchu supernowej.

Oczywiście jest to jedynie pewien zarys teorii opisujących ewolucję gwiazd i ich powstawanie. Dokładniejszy opis ewolucji gwiazd czytelnik może znaleźć w [2] oraz [3]. Zarówno białe karły jak i gwiazdy neutronowe zostaną omówione dokładniej w późniejszej części pracy.

1. Opis gwiazdy

Stan gwiazdy opisujemy zwykle przy pomocy kilku następujących parametrów mianowicie: gęstości, ciśnienia, masy gwiazdy, jej temperatury, nieprzejrzystości, prędkości rozchodzenia się dźwięku wewnątrz gwiazdy czy energii emitowanej w jej wnętrzu.

Równania, dzięki którym znajdujemy owe parametry, różnią się w zależności od rodzaju gwiazdy, jej składu chemicznego oraz od tego czy dana gwiazda wykonuje ruchy rotacyjne jak również dokładności, z jaką chcemy daną gwiazdę zbadać.

1.1. Symetria sferyczna

Jeżeli gwiazda nie wykonuje ruchów rotacyjnych, to nie jest ona zdeformowana ze względu na siłę odśrodkową, która działa na wirujące gwiazdy. Gwiazda ma wtenczas symetrię sferyczną i możemy zapisać pierwsze równanie wiążące gęstość nierotującej gwiazdy z masą zawartą w sferze o promieniu r :

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r_1^2 \rho(r_1) dr_1 \quad (1.1.1)$$

gdzie $\rho(r)$ to gęstość materii w punkcie r . Należy zauważyć, że zachodzi:

$$M = \int_0^R 4\pi r_1^2 \rho(r_1) dr_1 \quad (1.1.2)$$

gdzie M to masa gwiazdy a R to jej promień. Równanie (1.1.1) możemy zapisać jako:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (1.1.3)$$

Pierwszym prostym opisem, który może przybliżyć nam stan gwiazdy jest podejście Newtonowskie opisane w punkcie 1.2. Podejście Newtonowskie może być używane do przybliżenia podstawowych zjawisk, jakie zachodzą w gwieździe i daje dobre wyniki dla gwiazd o małych gęstościach. Dokładniejszy opis polega na posłużeniu się równaniem Tolmana-Oppenheimera-Volkoffa (1.3.11). Owo równanie wyprowadzimy z równania Einsteina w rozdziale 1.3.

1.2. Opis Newtonowski

Poza równaniem (1.1.3) do opisu stanu gwiazdy będziemy wykorzystywać równanie opisujące gradient ciśnienia wewnątrz gwiazdy. Aby wyprowadzić takie równanie, możemy skorzystać z postaci siły Newtonowskiego oddziaływania grawitacyjnego dwóch ciał o masach m_1 oraz m_2 .

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.2.1)$$

Dla sferycznie symetrycznego układu powyższe równanie możemy zapisać w następującej postaci:

$$dF = -G \frac{dm m(r)}{r^2} \quad (1.2.2)$$

gdzie przez dm będziemy rozumieć:

$$dm = \rho(r) dV = \rho(r) S dr \quad (1.2.3)$$

Ciśnienie spełnia równanie:

$$dF = dP(r) S = (P(r+dr) - P(r)) S \approx \frac{dP(r)}{dr} S dr \quad (1.2.4)$$

Następnie narzucimy warunek równowagi gwiazdy, który przy spełnieniu warunku niewykonywania przez gwiazdę ruchów rotacyjnych sprowadza się do tego, że ciężar warstwy materii w gwieździe musi być zrównoważony przez siłę, z jaką owa warstwa jest wypychana z gwiazdy przez powstałe w środku ciśnienie. Stąd korzystając z uprzednio zapisanych związków (1.2.2), (1.2.3) oraz (1.2.4), otrzymujemy równanie:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{\rho(r) m(r)}{r^2} \quad (1.2.5)$$

Jeżeli powyższe równanie powiązać z równaniem (1.1.3) otrzymamy układ dwóch równań na trzy nieznane funkcje, mianowicie ciśnienie, gęstość i masę gwiazdy. Aby rozwiązać ów układ równań potrzebujemy jeszcze jednego równania, na przykład równania wiążącego ciśnienie z gęstością materii w gwieździe, takie równanie nazywa się zwykle równaniem stanu.

1.3. Opis relatywistyczny

W poprzednim rozdziale wymieniono równania opisujące konfigurację pozostającą w równowadze dla Newtonowskiej teorii grawitacji. Teoria Newtonowska jest opisem, który jest dobrze spełniony dla małych gęstości w gwiazdzie. Bardziej ogólny opis wymaga wprowadzenia pojęć, na których oparta jest ogólna teoria względności (OTW). Wprowadzone zostaną jedynie podstawowe pojęcia używane do opisu zakrzywionej czasoprzestrzeni. Więcej informacji na ten temat czytelnik może znaleźć w dowolnej literaturze poświęconej OTW. W celu uzyskania opisu zakrzywienia przestrzeni w obecności materii zdefiniujemy najpierw pojęcie czasoprzestrzeni. Teoria różni się od Newtonowskiej brakiem absolutnego układu odniesienia. Ponadto zapiszmy, że odległość między sąsiednimi punktami czasoprzestrzeni jest dana przez:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.3.1)$$

Gdzie $g_{\mu\nu}$ to tensor metryczny. Sumowanie przebiega od zera do trzech. Zerowa składowa jest składową czasową. Składowe przestrzenne odróżnia się od czasowych przez przyjęcie odpowiedniej sygnatury czasoprzestrzeni. W naszym przypadku postać sygnatury jest następująca $(+, -, -, -)$. Zatem możemy podzielić wektory na czasopodobne, przestrzeniopodobne oraz zerowe. Wektorami czasopodobnymi nazwiemy takie czterowektory, dla których kwadrat odległości jest dodatni. Na przykład jeżeli rozważanym wektorem jest wektor prędkości cząstki, przynależność wektora do grupy wektorów czasopodobnych oznacza, że cząstka porusza się z prędkością mniejszą od prędkości światła. Istnienie wspomnianej granicznej prędkości jest kolejną różnicą między OTW a teorią Newtonowską. Prędkość światła jest maksymalną prędkością z jaką można przekazywać informacje. W związku z tym faktem badana cząstka porusza się geodezyjnej czasowej $x(\tau)$, dla której zachodzi:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (1.3.2)$$

Gdzie τ jest czasem własnym natomiast $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ nazywana jest symbolem Christoffela danym przez następującą zależność

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \quad (1.3.3)$$

Interesuje nas jakie zakrzywienie czasoprzestrzeni powoduje obecność materii zatem należy wprowadzić następne charakterystyki zakrzywionej czasoprzestrzeni.

Jedną z takich charakterystyk jest tensor krzywizny Ricciego $R_{\mu\nu}$. Jest on powiązany z symbolem Christoffela poprzez zależność

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \quad (1.3.4)$$

Należy także zdefiniować skalar krzywizny Ricciego przez $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$. Możemy teraz wyprowadzić relację łączącą rozkład materii z krzywizną czasoprzestrzeni. Jednym ze sposobów wyprowadzenia takiej zależności jest rozpoczęcie rozważań od równania Eulera – Lagrange'a

$$\partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha g^{\mu\nu})} = \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (1.3.5)$$

oraz zapisania następującej postaci lagrangianu

$$L = \sqrt{-\bar{g}} (L_m + L_g) \quad (1.3.6)$$

gdzie \bar{g} oznacza wyznacznik z tensora metrycznego, przez L_m będziemy rozumieli wkład masy do lagrangianu, natomiast L_g oznaczać będzie człon odpowiadający grawitacji. Einstein zaproponował następującą postać L_g

$$L_g = C_0 + C_1 R \quad (1.3.7)$$

Podstawiając zależności (1.3.6) oraz (1.3.7) do równania Eulera – Lagrange'a (1.3.5) otrzymujemy następujące równanie

$$\frac{\partial \sqrt{-\bar{g}}}{\partial g^{\mu\nu}} (L_m + C_0 + C_1 R) + \sqrt{-\bar{g}} \left(\frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} + C_1 \frac{\partial R}{\partial g^{\mu\nu}} \right) = 0 \quad (1.3.8)$$

W celu dalszego przekształcenia powyższej zależności należy skorzystać z relacji

$$\frac{\partial \sqrt{-\bar{g}}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-\bar{g}} g_{\mu\nu} \quad (1.3.9)$$

oraz zapisać, że zachodzi $\frac{\partial R}{\partial g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}$. Wtenczas otrzymujemy następującą relację

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = H T_{\mu\nu} \quad (1.3.10)$$

gdzie $T_{\mu\nu}$ to tensor energii – pędu, który jest dany przez następującą relację

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} L_m \quad (1.3.11)$$

z kolei przez Λ będziemy rozumieć stałą kosmologiczną równą $-\frac{1}{2} \frac{C_0}{C_1}$ natomiast stała H wynosi $-\frac{1}{2C_1}$. Zależność (1.3.10) jest nazwana równaniem Einsteina. Jest to szukana przez nas relacja łącząca rozkład materii z zakrzywieniem czasoprzestrzeni.

Informacje na temat rozkładu materii zapisane są w tensorze energii – pędu $T_{\mu\nu}$, natomiast o zakrzywieniu czasoprzestrzeni informują nas tensor krzywizny $R_{\mu\nu}$ oraz skalar krzywizny R . Kolejnym krokiem w opisie relatywistycznym gwiazdy jest uzyskanie relacji opisującej gradient ciśnienia w gwiazdzie analogicznej do wyrażenia (1.2.5). Wyznamy jednak najpierw wartość stałej H . Pozbywamy się stałej kosmologicznej Λ z równania (1.3.10) poprzez przyjęcie za tensor energii – pędu tensora efektywnego

$$T_{\mu\nu}^{ef} = T_{\mu\nu} - H^{-1} \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.3.12)$$

Relację (1.3.10) możemy potem także przemnożyć przez tensor $g^{\mu\nu}$, otrzymamy wtedy

$$R = \frac{H}{2} T^{ef} \quad (1.3.13)$$

Dla tensora energii – pędu zachodzi $T_{00}^{ef} = \varepsilon = c^2 \rho$. Można pokazać także, że tensor krzywizny spełnia $R_{00} = \frac{1}{2} \Delta \phi$. Gdzie przez ϕ będziemy rozumieć potencjał grawitacyjny.

Potencjał grawitacyjny ϕ jest powiązany z gęstością materii poprzez równanie Poissona

$$\Delta \phi = 4 \pi G \rho \quad (1.3.14)$$

porównując te relacje otrzymujemy wartość stałej H

$$H = \frac{8 \pi G}{c^4} \quad (1.3.15)$$

Kiedy gwiazda nie wykonuje ruchów rotacyjnych, możemy przyjąć uogólnioną postać tensora metrycznego odpowiadającego symetrii sferycznej:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.3.16)$$

Metryka jest niezależna od czasu co odpowiada założeniu, że gwiazda jest statyczna jak również nie wykonuje ruchów rotacyjnych. Postać tensora energii - pędu $T_{\mu\nu}$ wyznaczmy z relacji znanej dzięki hydrodynamice:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + P) U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu} P \quad (1.3.17)$$

gdzie ε to gęstość energii, P jest ciśnieniem gazu a przez U_μ będziemy rozumieli czterowektor prędkości $U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$. Czterowektor prędkości jest czasowym wektorem jednostkowym, dla którego zachodzi $U^\mu U_\mu = 1$. Oznacza to, że U^μ jest wektorem stycznym, który jest przesuwany równolegle wzdłuż linii geodezyjnej.

Czterowektor prędkości U_μ wyznaczmy z warunku $U^\mu U_\mu = 1$, który przekształcimy do

$$g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu = 1 \quad (1.3.18)$$

Po przyjęciu za układ opisu układu spoczynkowego, jedynie U_0 pozostaje niezerowe.

Czterowektor prędkości U_μ sprowadza się do postaci:

$$U_\mu = (e^{v/2}, 0, 0, 0) \quad (1.3.19)$$

Stąd korzystając z postaci U_μ (1.3.19) widzimy, że tensor energii – pędu (1.3.17) ma następującą postać:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon e^{v(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.3.20)$$

Korzystając z postaci tensora metrycznego (1.3.16) oraz tensora energii - pędu (1.3.20), jak również przyjmując, że metryka nie zależy od czasu możemy przekształcić równanie Einsteina (1.3.10) do następujących równań [2]:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon \quad (1.3.21)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} P \quad (1.3.22)$$

Równanie (1.3.21) możemy scałkować i korzystając z równania (1.1.1) otrzymujemy:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \quad (1.3.23)$$

W celu dalszego analizowania zależności (1.3.22) należy zapisać następujące równanie

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.3.24)$$

gdzie przez D_μ będziemy rozumieć pochodną kowariantną. Spełnienie przez tensor energii – pędu tego warunku powoduje, że opisuje on zachowanie materii, która jest źródłem pola grawitacyjnego. Ponadto relacja (1.3.24) narzuca całkowalność równań Einsteina (1.3.10). Uzupełnimy relację (1.3.24) o zasadę zachowania liczby cząstek (równanie ciągłości), jest to relacja o następującej postaci

$$D_\mu (\eta U^\mu) = 0 \quad (1.2.25)$$

gdzie η oznacza gęstość liczby cząstek. Równania (1.3.24) oraz (1.3.25) można przekształcić w celu uzyskania następującej relacji

$$\frac{dv(r)}{dr} = - \frac{2}{\varepsilon(r) + P(r)} \frac{dP(r)}{dr} \quad (1.3.26)$$

Entropia układu jest zachowana wzdłuż linii świata cząstek, oznacza to że ruch jest adiabatyczny. Wynika to z faktu, że tensor energii – pędu uzyskiwany jest z relacji (1.3.17), która nie uwzględnia procesów tarcia ani przewodnictwa cieplnego. Korzystając z równań (1.3.23) oraz (1.3.26) możemy przekształcić równanie (1.3.22) do równania Tolmana – Oppenheimera - Volkoffa postaci:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{(\varepsilon + P) \left(m + \frac{4\pi}{c^2} r^3 P \right)}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right)} \quad (1.3.27)$$

Jest to szukana przez nas relacja opisująca gradient ciśnienia. Dla niewielkich gęstości możemy dokonać przejścia do granicy $c \rightarrow \infty$. Wtenczas powyższe równanie sprowadza się do zależności (1.2.5).

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{\rho(r)m(r)}{r^2} \quad (1.2.5)$$

Jak zostało to napisane w poprzednim rozdziale, równania (1.3.27) lub (1.2.5) oraz równanie opisujące $m(r)$ (1.1.3) powinny być uzupełnione o równie stanu np. postaci $P(\rho)$. Wtenczas układ mają jednoznaczne rozwiązanie dla zadanych warunków początkowych $P_c = P(\rho_c)$ oraz $m(0) = 0$. Gęstość centralna ρ_c będzie w dalszej części pracy parametrem ze względu, na który będziemy rozwiązywać ów układ równań.

2. Białe karzeł

Białe karły otrzymały swoją nazwę ze względów historycznych. Pierwsze białe karły zostały zaobserwowane jako obiekty o wysokiej temperaturze powierzchniowej. Wysokie temperatury odpowiadają barwie białej w urządzeniach pomiarowych takich jak pirometr optyczny. Dziś wiemy, że białe karły mają zróżnicowane temperatury powierzchniowe. Do stosunkowo dokładnie oszacowanych charakterystyk należą Syriusz B o temperaturze powierzchniowej 32000 K , masie $M \approx 1,05 M_0$ oraz promieniu $0,0078 R_0$, jak również Eri B dla, którego parametry są następujące: $T \approx 16900\text{ K}$, $M \approx 0,43 M_0$ oraz promień $0,0124 R_0$. Białe karły są zróżnicowane także pod względem składu chemicznego. W ich skład mogą wchodzić między innymi wodór, hel, węgiel, tlen jak również pierwiastki cięższe aż do żelaza. Przykładem węglowego białego karła jest Syriusz B. Natomiast Eri B składa się głównie z żelaza. Oczywiście wodór i inne stosunkowo lekkie pierwiastki powinny znajdować się w atmosferze gwiazdy, natomiast cięższe bliżej jej centrum. Nie wszystkie białe karły spełniają jednak tą regułę. Istnieją białe karły, których atmosfera zawiera wyłącznie hel. Fakt ten jak dotąd nie ma jednoznacznego wyjaśnienia i może być interesującym tematem rozważań. Jasność białych karłów jest niewielka. Najstarsze białe karły mają jasność około $L \sim 10^{-5} L_0$. Ich proces wyświecania trwa bardzo długo, nawet do 10^9 lat. Stąd karły o jasności $10^{-5} L_0$ uważa się za pozostałości po najstarszych gwiazdach w naszej galaktyce. Kolejnym zagadnieniem, o którym warto wspomnieć jest fakt, że skoro materia w gwieździe jest zjonizowana to jądra atomowe będą oddziaływać między sobą siłami elektrostatycznymi. Jeżeli energia kinetyczna jąder atomowych jest mniejsza od sił elektrostatycznych, jądra utworzą sieć krystaliczną. Jeżeli natomiast temperatura jest na tyle wysoka, aby energia kinetyczna przewyższyła potencjał wynikający ze wzajemnego oddziaływania jąder atomowych, jądra będą zachowywały się jak ciecz. Problem ten nie dotyczy elektronów, które zawsze zachowują się tutaj jak gaz, podobnie jak ma to miejsce w metalach. Przeciętne gęstości w białych karłach są rzędu $\rho \approx 10^5 - 10^7\text{ g/cm}^3$. Przy tak dużych gęstościach większość dozwolonych stanów energetycznych jest obsadzona, a co za tym idzie zderzenia elektronów z jądrami nie zmieniają ich prędkości. Należy zaznaczyć, że w gwieździe nie zachodzą reakcje jądrowe. Reakcje jądrowe podniosłyby temperaturę centralną i usunęłyby degenerację elektronów.

Świecenie białego karła nie polega także na emisji fotonów przez zdegenerowany gaz elektronowy. Emisja kwantu światła spowodowałaby przejście elektronu do niższego stanu energetycznego, nie jest to jednak możliwe gdyż niższe stany są już zajęte. Za emisję fotonów są więc odpowiedzialne elektrony znajdujące się blisko powierzchni gwiazdy. Elektrony te nie są zdegenerowane i mogą przejść do niższych stanów energetycznych. Elektrony znajdujące się blisko powierzchni gwiazdy mogą wymieniać energię z elektronami znajdującymi się w jej wnętrzu. Gwiazda wyświeca się w ten sposób i stygnie. Zastanówmy się nad warunkami, jakie muszą być spełnione aby doszło do uformowania białego karła oraz jakie warunki musi spełniać ów karzeł, żeby był on stabilny. Pierwsze kryterium zostało już wymienione we wstępie pracy, mianowicie masa początkowa gwiazdy, której jądro składa się z węgla nie powinna przekraczać $8M_0$. Bo nie zachodzą wtenczas dalsze procesy fuzji. Masa jądra wynosi około 0,1 całkowitej masy gwiazdy i nie jest w stanie zatrzymać otoczki. Stąd otoczka rozszerza się i gwiazda znajduje się teraz w fazie czerwonego olbrzyma. Gwiazda traci swoją masę z powodu niewielkiej masy jądra oraz ciśnienia promieniowania wywieranego na zewnętrznych warstwach. Okazuje się, że istnieją ograniczenia na procesy utraty masy przez gwiazdę aby końcowym etapem ewolucji był biały karzeł. Można to pokazać w stosunkowo prosty sposób. Białe karły są gwiazdami utrzymywanymi dzięki siłom zdegenerowanego gazu elektronowego. Opiszmy trochę lepiej właściwości takiej materii. Jako pierwszy opisem białych karłów zajmował się Chandrasekhar. Wprowadził on tak zwane równania politropy jako równania stanu dla materii znajdującej się w białych karłach. Równanie politropy dla zdegenerowanego gazu kwantowego składającego się z relatywistycznych elektronów występujących w białych karłach jest następujące:

$$P = K \left(\frac{Z}{A} \rho \right)^{4/3}$$

gdzie Z jest liczbą atomową, natomiast A to liczba masowa. Pochodzenie powyższego wyrażenia stanie się jasne w rozdziale 2.1. Następnie skorzystamy z wyrażenia opisującego konfigurację pozostającą w równowadze w teorii Newtona (1.2.5).

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{\rho m}{r^2} \quad (1.2.5)$$

dla gwiazd jednorodnych oraz pozostających w stanie równowagi hydrostatycznej możemy uzyskać przybliżone oceny stanu materii w ich wnętrzu. Przybliżenie takie będzie polegało na zastąpieniu gradientu ciśnienia przez następujący stosunek różnic skończonych.

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{P_c - P_{pow}}{R}$$

gdzie P_c jest ciśnieniem w centrum gwiazdy, natomiast P_{pow} jest ciśnieniem na powierzchni gwiazdy. Ponieważ jednak będziemy zakładać, że ciśnienie na powierzchni jest zaniedbywalne, będziemy korzystać z następującego przybliżenia

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{P_c}{R}$$

Stąd zależność (1.2.5) sprowadza się do postaci

$$\frac{P}{R} = -G \frac{\rho M}{R^2}$$

Przyjmujemy także, że zachodzi

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Korzystając z narzuconego równania stanu oraz powyższej zależności możemy przekształcić jeszcze bardziej relację (1.2.5) i otrzymujemy

$$\frac{K}{R} \left(\frac{Z}{A} \right)^{4/3} \left(\frac{3M}{4\pi R^3} \right)^{4/3} = -G \frac{M}{R^2} \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Upraszczając powyższe wyrażenie otrzymujemy masę Chandrasekhara:

$$M_{Ch} = \frac{K^{3/2}}{(4\pi/3)^{1/2} G^{3/2}} \left(\frac{Z}{A} \right)^2$$

Przez M_{Ch} oznaczamy maksymalną masę gwiazdy jaką może utrzymać zdegenerowany gaz elektronowy. Jest to tak zwana masa Chandrasekhara. Wyznaczona z powyższej zależności jest dość niedokładna, głównie z powodu przybliżenia zastosowanego w celu pozbycia się z równania gradientu ciśnienia. Dokładniejsze obliczenia pokazują wartość masy Chandrasekhara jako:

$$M_{Ch} = 5,75 \left(\frac{Z}{A} \right)^2 M_0$$

Kiedy $Z/A=2$ otrzymujemy $M_{Ch} \approx 1,44 M_0$. Widzimy zatem, że utworzenie białego karła zależy teraz od tego ile masy straci gwiazda będąc w fazie czerwonego olbrzyma. Jeżeli procesy utraty masy przez gwiazdę będą wystarczająco wydajne i masa gwiazdy nie przekracza masy Chandrasekhara, wtenczas zostanie utworzony biały karzeł. Jeżeli natomiast procesy nie będą odpowiednio wydajne gwiazda może zostać rozerwana, na przykład w postaci wybuchu supernowej. Zatem do najważniejszych własności białego karła możemy zaliczyć istnienie maksymalnej masy równej M_{Ch} , materia składa się z jąder atomowych oraz elektronów przy czym wkład do ciśnienia wnoszą prawie wyłącznie elektrony.

2.1. Równanie stanu

Równie stanu jest to relacja łącząca ciśnienie i gęstość materii. Postać równania stanu zależy od tego z jakiej materii zbudowana jest gwiazda. W przypadku białego karła materią tą są jądra atomowe oraz oderwane od jąder elektrony. Natomiast w przypadku gwiazd neutronowych będą to neutrony, oraz niewielka ilość elektronów i protonów. Jak zostało to zapisane wcześniej biały karzeł składa się z jąder atomowych oraz elektronów, zatem energia gwiazdy jest dana przez:

$$E = E_J + E_e \quad (2.1.1)$$

gdzie E_J to energia jąder atomowych natomiast E_e to wkład elektronów. Podobnie ciśnienie pochodzi od obu składników:

$$P = P_J + P_e \quad (2.1.2)$$

Wyznamy jednak najpierw gęstość energii gwiazdy. W tym celu musimy rozważyć wkład składników gwiazdy do jej energii. Zarówno dla elektronów jak i jąder spełniona jest relatywistyczna relacja łącząca energię cząstki z jej pędem:

$$E(k) = c \sqrt{(k^2 + m^2 c^2)} \quad (2.1.3)$$

Dla jąder atomowych należy zauważyć, że masa jądra jest wielokrotnością masy nukleonu $m_J = A \mu$ (podczas opisu białego karła przez μ będziemy rozumieć jednostkę masy atomowej, w części poświęconej gwiazdzie neutronowej μ będzie oznaczać potencjał chemiczny) z tego powodu prędkości, z którymi poruszają się jądra atomowe są niewielkie. Zatem w wyrażeniu na energię jąder atomowych możemy zaniedbać człon zależny od ich pędu:

$$E_J = N_J m_J c^2 \quad (2.1.4)$$

gdzie N_J oznacza liczbę jąder atomowych natomiast m_J to ich masa. Zapiszmy, że gwiazda jest neutralna elektrycznie co oznacza, że liczba protonów musi być równa liczbie elektronów:

$$N_p = N_e \quad (2.1.5)$$

Jak również: $N_p = Z N_J$ oraz $m_J = A \mu$. Stąd po odniesieniu E_J do objętości V otrzymujemy wkład jąder atomowych do gęstości energii:

$$\varepsilon_J = \frac{E_J}{V} = \frac{A}{Z} \mu c^2 \eta_e \quad (2.1.6)$$

Przy okazji możemy zapisać wyrażenie opisujące gęstość masy:

$$\rho = \rho_J + \rho_e = m_J \eta_J + m_e \eta_e = \frac{A}{Z} \mu \eta_e + m_e \eta_e \quad (2.1.7)$$

Ponieważ jednak $\mu \approx 2000 m_e$ zależność (2.1.7) sprowadza się do postaci:

$$\rho \approx \frac{A}{Z} \mu \eta_e \quad (2.1.8)$$

Następnie należy rozważyć wkład elektronów do energii gwiazdy. Elektrony są fermionami zatem ich funkcja gęstości rozkładu energii jest dana przez statystykę Fermiego-Diraca:

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp((E - \mu)/k_B T)} \quad (2.1.9)$$

gdzie μ to potencjał chemiczny, T to temperatura a k_B to stała Boltzmanna.

Energie, jakie posiadają elektrony są przy warunkach panujących w białych karłach tak duże, że możemy przyjąć, że temperatura jest bliska zeru. Wówczas rozkład Fermiego - Diraca sprowadza się do postaci:

$$f(E) = \begin{cases} 0 & \text{dla } E > \mu \\ 1 & \text{dla } E \leq \mu \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Z powyższego widać, że zachodzi następujący związek: $E_F = \mu$. Wyznamy teraz gęstość liczby elektronów η_e poprzez następujące wyrażenie:

$$\eta_e = \frac{N_e}{V} = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int f(E) d^3k = \frac{4\pi g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} k^2 dk \quad (2.1.11)$$

gdzie $(2\pi\hbar)^3$ to objętość komórki w przestrzeni fazowej a g to liczba cząstek mogąca mieć taki sam pęd (w przypadku elektronów $g=2$ co odpowiada dwóm możliwym spinom elektronów o takim samym pędzie). Zatem dla elektronów zachodzi:

$$\eta_e = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad (2.1.12)$$

Gęstość energii elektronów obliczamy rozwiązując następującą całkę:

$$\varepsilon_e = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} E(k) k^2 dk = \frac{c}{\pi^2\hbar^3} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 + m_e^2 c^2} k^2 dk \quad (2.1.13)$$

W celu obliczenia powyższej całki posłużymy się podstawieniem: $y = k/m_e c$ wtenczas powyższa całka jest postaci:

$$\varepsilon_e = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2\hbar^3} \int_0^{k_F/m_e c} \sqrt{y^2 + 1} y^2 dy \quad (2.1.14)$$

Powyższa zależność da się scałkować po skorzystaniu z zależności (2.1.3).

Otrzymujemy następujące wyrażenie dla gęstości energii elektronów:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_0 \left((2x^3 + x)(x^2 + 1)^{1/2} - \operatorname{arcsinh}(x) \right) \quad (2.1.15)$$

Gdzie:

$$x = k_F / m_e c \quad (2.1.16)$$

oraz:

$$\varepsilon_0 = \frac{m_e^4 c^5}{8 \pi^2 \hbar^3} \quad (2.1.17)$$

Otrzymaliśmy zatem :

$$\varepsilon = \frac{A}{Z} \mu c^2 \eta_e + \varepsilon_e \quad (2.1.18)$$

Następnie należy zastanowić się nad ciśnieniem panującym w gwiazdzie. Jak zostało to już zapisane wcześniej wkład do ciśnienia wnoszą jądra atomowe oraz elektrony. Jednakże ze względu na dużą masę jąder będą one poruszać się z niewielkimi prędkościami. Czyli ich wkład do ciśnienia panującego wewnątrz białego karła będzie nieznaczny. Należy zatem zapisać:

$$P \approx P_e \quad (2.1.19)$$

Zapiszmy wyrażenie dla izotropicznego rozkładu pędu, z którego uzyskamy ciśnienie w gwiazdzie:

$$P = \frac{1}{3 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F} k v k^2 dk \quad (2.1.20)$$

gdzie prędkość v wynosi $v = kc^2 / E(k)$ a czynnik $1/3$ pochodzi z izotropii. Stąd otrzymujemy wyrażenie:

$$P = \frac{c}{3 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_e^2 c^2}} dk \quad (2.1.21)$$

W celu rozwiązania całki posłużymy się tym samym podstawieniem co w przypadku gęstości energii: $y = k / m_e c$. Wówczas otrzymujemy następującą całkę:

$$P = \frac{m_e^4 c^5}{3 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F / m_e c} \frac{y^4}{\sqrt{y^2 + 1}} dy \quad (2.1.22)$$

Stąd ciśnienie w gwiazdzie jest dane następującą zależnością:

$$P = P_0 \left((2x^3 - 3x)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \operatorname{arcsinh}(x) \right) \quad (2.1.23)$$

Gdzie x jest dany zależnością (2.1.16). Natomiast P_0 oznacza:

$$P_0 = \frac{m_e^4 c^5}{24 \pi^2 \hbar^3} \quad (2.1.24)$$

Będziemy rozwiązywać zagadnienie białego karła przy zadaniu różnych wartości gęstości centralnej. Zatem następnym krokiem rozważań jest wyznaczenie relacji łączącej x z gęstością. Kiedy połączymy równania (2.1.8) oraz (2.1.12) a następnie podstawimy je do równania (2.1.16) otrzymamy następującą relację:

$$x = \frac{1}{m_e c} \left(\frac{3 \pi^2 \hbar^3}{\mu} \frac{Z}{A} \rho \right)^{1/3} \quad (2.1.25)$$

Otrzymaliśmy równania stanu dla białego karła. Równania (2.1.18) oraz (2.1.23) można zamienić prostszymi równaniami jeżeli całkę (2.1.22) obliczymy nie analitycznie a dzięki przybliżeniu np:

$$x \ll 1 \quad (2.1.26)$$

Co zachodzi jeżeli $k_F \ll m_e c$ oznacza to, że elektrony są rozważane jak zdegenerowany gaz kwantowy występujący dla $\rho < 1,96 \cdot 10^6 \text{ g/cm}^3$. Całka (2.1.22) ma wtenczas postać:

$$P = \frac{m_e^4 c^5}{3 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/m_e c} \frac{y^4}{\sqrt{y^2+1}} dy \approx \frac{m_e^4 c^5}{3 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/m_e c} y^4 dy = \frac{k_F^5}{15 \pi^2 \hbar^3 m_e} \quad (2.1.27)$$

Co po wstawieniu równań (2.1.12) oraz (2.1.8) daje następującą relację:

$$P = K_{nrel} \rho^{5/3} \quad (2.1.28)$$

Gdzie przez K_{nrel} oznaczmy następującą wielkość:

$$K_{nrel} = \frac{\hbar^2}{15 \pi^2 m_e} \left(\frac{3 \pi^2}{\mu} \frac{Z}{A} \right)^{5/3} \quad (2.1.29)$$

Elektrony, dla których zachodzi $k_F \ll m_e c$ nazwiemy nierelatywistycznymi, natomiast jeżeli zachodzi $k_F \gg m_e c$ elektrony nazwiemy relatywistycznymi. Stąd gdy zachodzi:

$$x \gg 1 \quad (2.1.30)$$

Wtenczas całka (2.1.22) sprowadza się do postaci:

$$P = \frac{m_e^4 c^5}{3 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/m_e c} \frac{y^4}{\sqrt{y^2+1}} dy \approx \frac{m_e^4 c^5}{3 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/m_e c} y^3 dy = \frac{c k_F^4}{12 \pi^2 \hbar^3} \quad (2.1.31)$$

Co po postępowaniu analogicznym jak z wyrażeniem (2.1.27) owocuje następującym równaniem:

$$P = K_{rel} \rho^{4/3} \quad (2.1.32)$$

Gdzie:

$$K_{rel} = \frac{\hbar c}{12 \pi^2} \left(\frac{3 \pi^2}{\mu} \frac{Z}{A} \right)^{4/3} \quad (2.1.33)$$

Można zauważyć, że równania (2.1.28) oraz (2.1.32) to równania politropy wprowadzone w rozdziale 1.4.

Równania politropowe stanowią najprostsze realistyczne przybliżenie równań stanu materii w gwiazdach zwartych. Dokładniejszy opis wymaga jednak analitycznego rozwiązania równań stanu. Różnice między kolejnymi równaniami stanu zostały zobrazowane na wykresie Rys.1. Następnie zastanówmy się nad podobnymi przybliżeniami w wyrażeniu opisującym gęstość energii. Dla elektronów masa jest niewielka ($m_p \approx 2000 m_e$) więc wkład elektronów do energii gwiazdy jest znaczący jedynie dla bardzo dużych gęstości centralnych w gwiazdzie. Wtenczas energia kinetyczna elektronów zaczyna odgrywać ważną rolę. Wiedząc, że masa spoczynkowa jąder jest wielokrotnością mas spoczynkowych nukleonów $m_J = A \mu$ dla małych gęstości możemy zaniedbać pęd elektronów w wyrażeniu na energię całkowitą gwiazdy. Otrzymujemy wtenczas:

$$\varepsilon \approx \rho c^2 = \frac{A}{Z} \mu \eta_e c^2 \quad (2.1.34)$$

Co jest spełnione dla obu przypadków elektronów wymienionych powyżej.

Jeżeli natomiast warunki panujące w gwiazdzie odpowiadają następującej relacji:

$$x > 10 \quad (2.1.35)$$

Czyli $\rho > 1,96 \cdot 10^9 \text{ g/cm}^3$. Dla ciśnienia skorzystamy z wyznaczona już relacji (2.1.31):

$$P = \frac{c k_F^4}{12 \pi^2 \hbar^3} \quad (2.1.36)$$

Natomiast dla gęstości energii możemy zaniedbać wkład protonów:

$$\varepsilon \approx \varepsilon_e \quad (2.1.37)$$

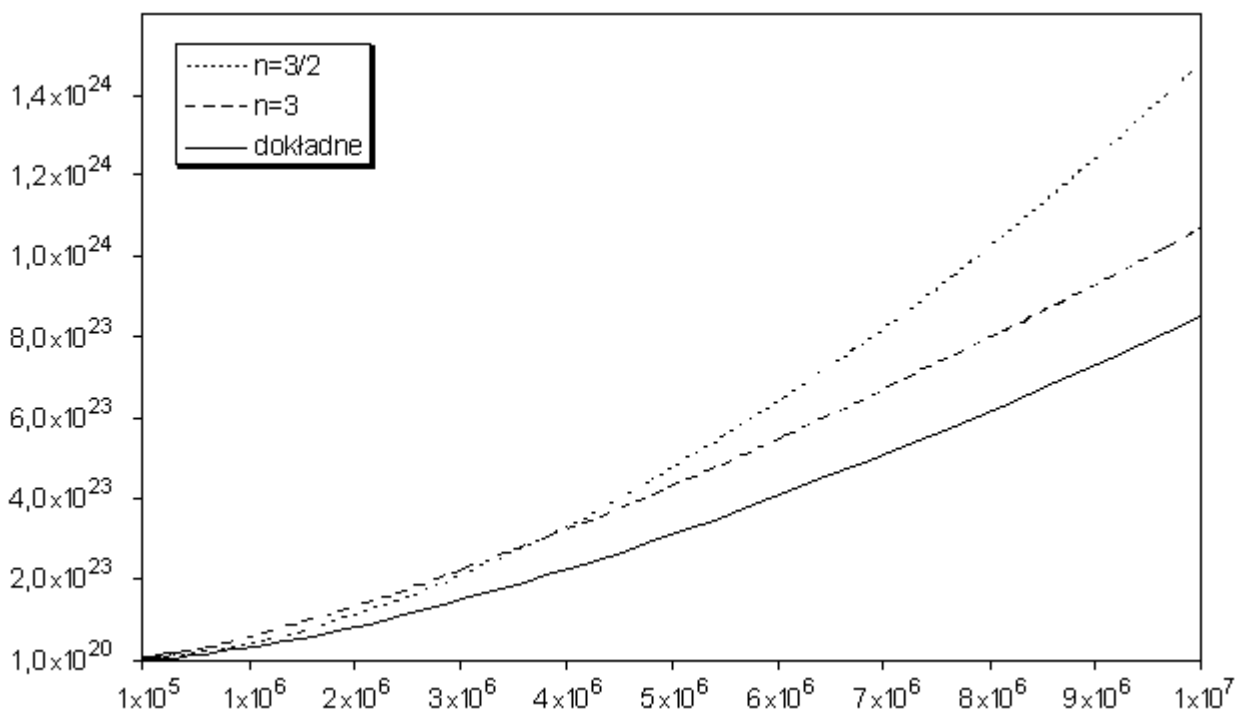
Stąd gęstość energii obliczamy z wyrażenia (2.1.14) poprzez następujące przybliżenie:

$$\varepsilon = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/m_e c} \sqrt{y^2 + 1} y^2 dy \approx \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/m_e c} y^3 dy = \frac{c k_F^4}{4 \pi^2 \hbar^3} \quad (2.1.38)$$

Zatem zachodzi:

$$P = \frac{1}{3} \varepsilon \quad (2.1.39)$$

Jednakże gwiazdy takie są niefizyczne gdyż gwiazda zapada się dla tak wysokich gęstości jak to zostanie omówione później. W dalszych rozważaniach porównamy wyniki uzyskane dzięki przybliżonym metodom z wynikami uzyskanymi dzięki rozwiązaniu dokładnych równań uwzględniających zarówno wkład jąder atomowych jak i elektronów.

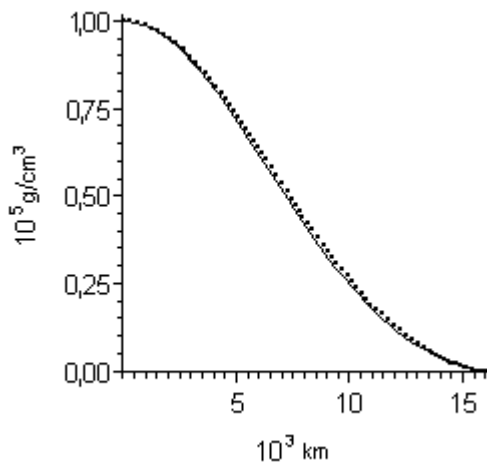


Rys. 1. Różnice między równaniami stanu. Oś pionowa przedstawia ciśnienie wyrażone w Pa . Oś pozioma przedstawia gęstość w g/cm^3 . Politropowymi dla wykładnika $n=3/2$ oraz $n=3$. Jak również równania stanu wyznaczonego analitycznie (1.4.24). Widać lepszą zgodność nierelatywistycznego przybliżenia dla małych gęstości oraz relatywistycznego dla gęstości powyżej $\rho \approx 2 \cdot 10^6 g/cm^3$.

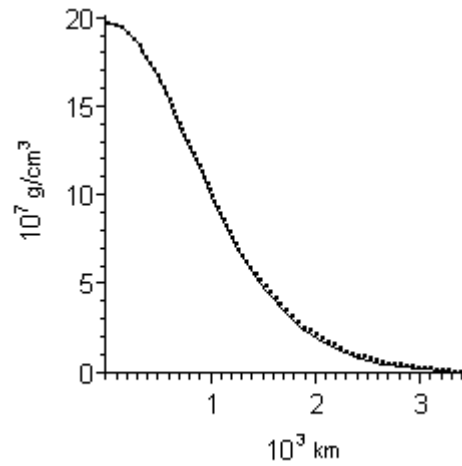
Na wykresie Rys. 1. widzimy trzy równania stanu. Pierwsza linia dla wykładnika politropy $n=3/2$ odpowiada nierelatywistycznemu równaniu stanu. Druga dla $n=3$ odpowiada równaniu relatywistycznemu. Trzecia odpowiada dokładnemu równaniu wyznaczonemu analitycznie. Wszystkie równania narzucają, że ciśnienie rośnie wraz ze wzrostem gęstości. Na wykresie widzimy jednak lepszą zbieżność przybliżenia równania nierelatywistycznego do postaci analitycznej równania stanu dla małych gęstości. Dla gęstości powyżej $\rho \approx 2 \cdot 10^6 g/cm^3$ sytuacja się zmienia. Ciśnienie wynikające z przybliżenia nierelatywistycznego zaczyna rosnąć zbyt szybko w porównaniu do jego analitycznej postaci. Powyżej gęstości około $\rho \approx 4 \cdot 10^6 g/cm^3$ efekt zbyt dużego przyrostu ciśnienia nierelatywistycznego jest już wyraźnie widoczny. Ciśnienie $\rho \approx 2 \cdot 10^6 g/cm^3$ jest granicą między elektronami nierelatywistycznymi i relatywistycznymi. Kiedy przyjmimy postać równania stanu możemy rozwiązać układ równań opisujących stan gwiazdy np. białego karła.

2.2. Wyniki obliczeń

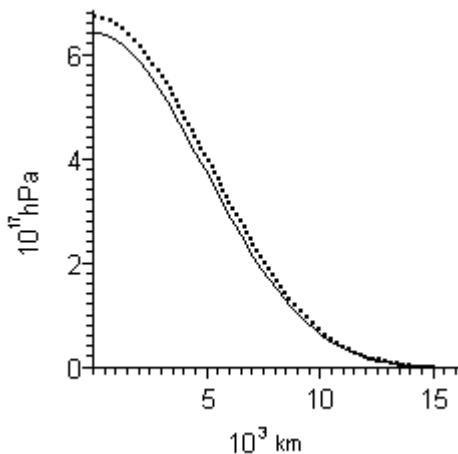
W niniejszym rozdziale porównamy wyniki obliczeń w zależności od tego czy obraliśmy do opisu równanie Oppenheimera-Volkoffa (1.3.11) oraz dokładne równanie stanu (równania (2.1.22) oraz (2.1.24)) czy też przybliżenie nierelatywistyczne (1.2.5) oraz odpowiednie politropowe równanie stanu (równanie (2.1.17) lub (2.1.19)). Wykresy obrazujące rozwiązania równań opisujących gęstość, ciśnienie i masę gwiazdy odpowiednio dla zadanej gęstości centralnej znajdują się poniżej. Na wykresach linią ciągłą przedstawiono rozwiązania wynikające z dokładnych równań. Kropki przedstawiają wspomniane wcześniej przybliżenia.



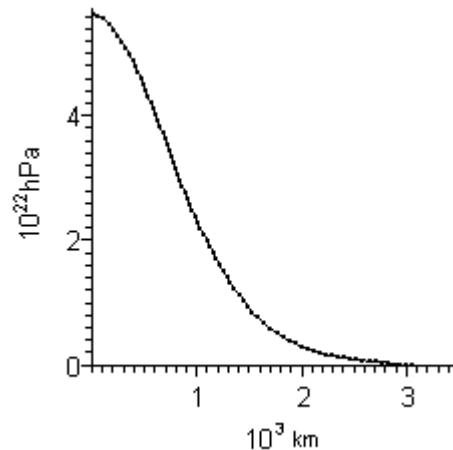
Rys. 2. Profil gęstości dla gwiazdy o gęstości centralnej $\rho_c = 10^5 \text{ g/cm}^3$.



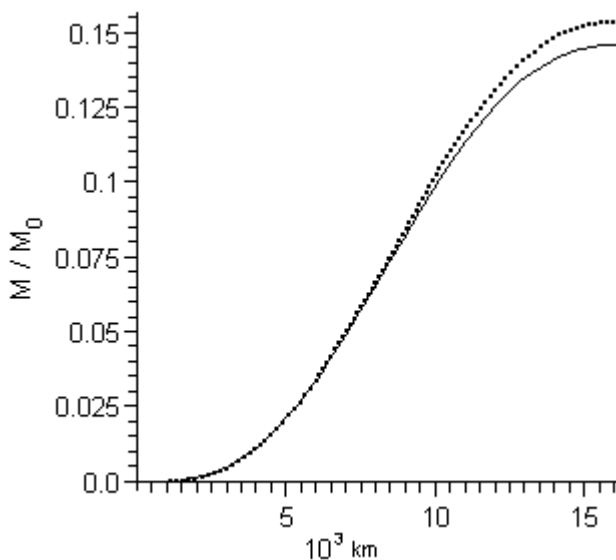
Rys. 3. Profil gęstości dla gwiazdy o gęstości centralnej $\rho_c = 2 \cdot 10^8 \text{ g/cm}^3$.



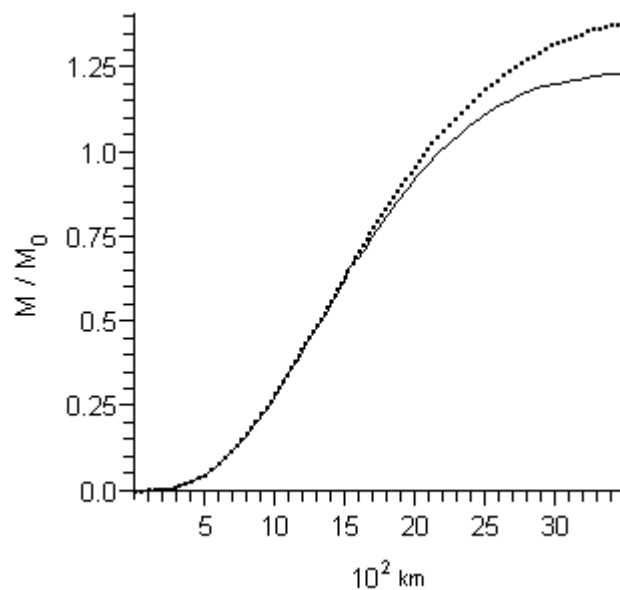
Rys. 4. Profil ciśnienia dla gwiazdy o gęstości centralnej $\rho_c = 10^5 \text{ g/cm}^3$.



Rys. 5. Profil ciśnienia dla gwiazdy o gęstości centralnej $\rho_c = 2 \cdot 10^8 \text{ g/cm}^3$.



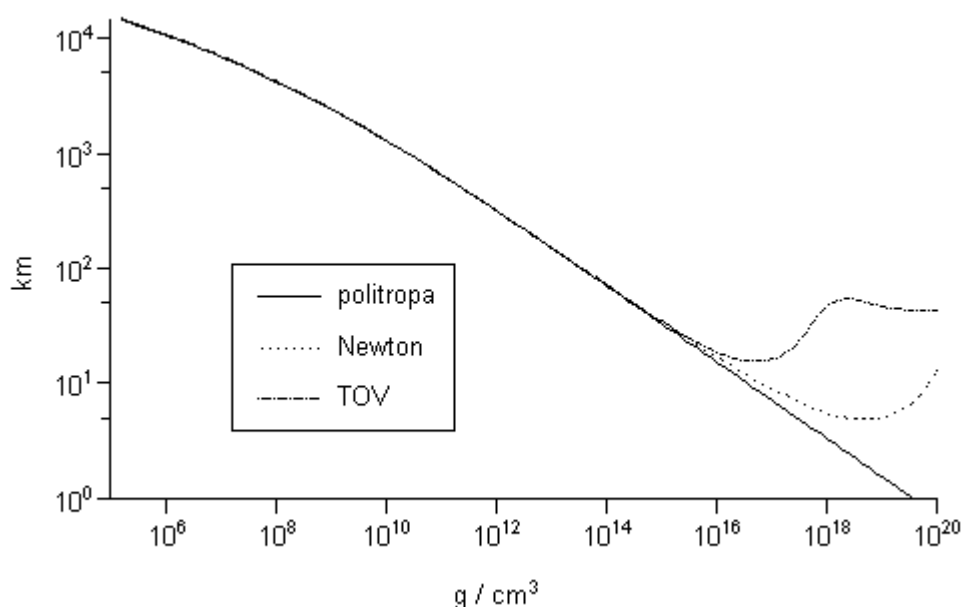
Rys. 6. Masa $m(r)$ dla gwiazdy o gęstości centralnej $\rho_c = 10^5 \text{ g/cm}^3$.



Rys. 7. Masa $m(r)$ dla gwiazdy o gęstości centralnej $\rho_c = 2 \cdot 10^8 \text{ g/cm}^3$.

Na powyższych wykresach zobrazowano jak zmienia się gęstość $\rho(r)$, ciśnienie $P(r)$ oraz masa $m(r)$ wraz z promieniem wewnątrz gwiazdy. Wykresy Rys.2. - Rys. 7. porównują wyniki dla odpowiednich równań politropy z wynikami dla równań wyznaczonych analitycznymi metodami. Oczywiście gęstość $\rho_c = 10^5 \text{ g/cm}^3$ odpowiada nierelatywistycznemu przybliżeniu, natomiast $\rho_c = 2 \cdot 10^8 \text{ g/cm}^3$ relatywistycznemu. Na wykresach Rys. 2. i Rys.3. przedstawiono gęstość w gwiazdach o gęstościach centralnych odpowiednio $\rho_c = 10^5 \text{ g/cm}^3$ oraz $\rho_c = 2 \cdot 10^8 \text{ g/cm}^3$. Wykresy Rys. 4 oraz Rys 5. przedstawiają wykresy ciśnienia dla gęstości tych samych gęstości centralnych co wykresy gęstości wcześniej. Widzimy, że zarówno gęstość jak i ciśnienie maleje z promieniem wewnątrz gwiazdy czego można się było spodziewać. Kolejną ważną rzeczą jest fakt, że dla wszystkich czterech wykresów równania przybliżone dały stosunkową zgodność wyników z równaniami wyznaczonymi analitycznie. Nieco inaczej sprawa ta wygląda dla wykresów Rys. 6. oraz Rys. 7. Wykresy te przedstawiają masę w środku gwiazdy. Jak można się tego spodziewać masa rośnie wraz z promieniem. Masa dla obu gęstości rośnie do różnych wartości zależnie od tego czy korzystamy z równań przybliżonych czy wyznaczonych analitycznie. Przy czym dla większej gęstości centralnej różnice są większe. Możemy spodziewać się także, że różnice dalej będą rosły wraz z gęstością centralną jaką narzucamy na gwiazdę.

Kolejnym krokiem w opisie białego karła jest otrzymanie wartości masy oraz promienia przy różnych wartościach gęstości centralnej. Przy obliczaniu masy białego karła warto pamiętać, że masa karła nie powinna przekraczać masy Chandrasekhara czyli w naszym modelu $1,44M_0$. Wykresy Rys. 8. oraz Rys. 9. przedstawiają odpowiednio zależności $R(\rho_c)$ i $M(\rho_c)$ dla trzech białych karłów o różnych równaniach struktury i stanu. Pierwsza linia nazwana „politropa” odpowiada Newtonowskiemu przybliżeniu równań struktury. Równania stanu odpowiadają analitycznej postaci ciśnienia, natomiast w gęstości energii zaniedbano wkład elektronów. Druga linia nazwana „Newton” odpowiada Newtonowskim równaniom struktury, natomiast w równaniach stanu uwzględniono wkład elektronów do gęstości energii. Linia oznaczona „TOV” dotyczy analitycznych równań stanu natomiast jako równanie struktury użyte zostało równanie Tolmana – Oppenheimera – Volkoffa.

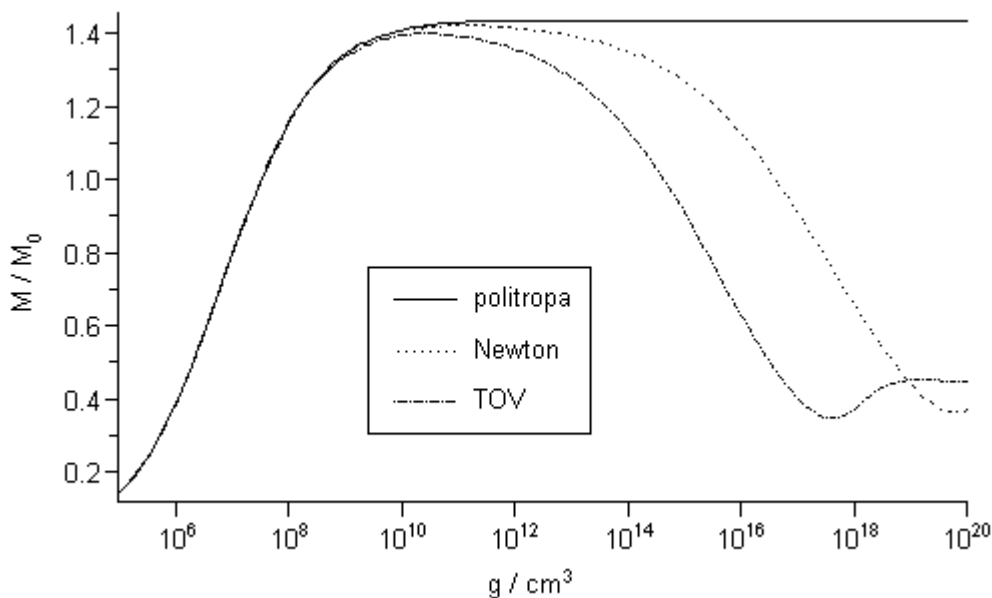


Rys. 8. Wykres promienia białego karła przy zmianie gęstości centralnej otrzymany dla różnych równań struktury i stanu.

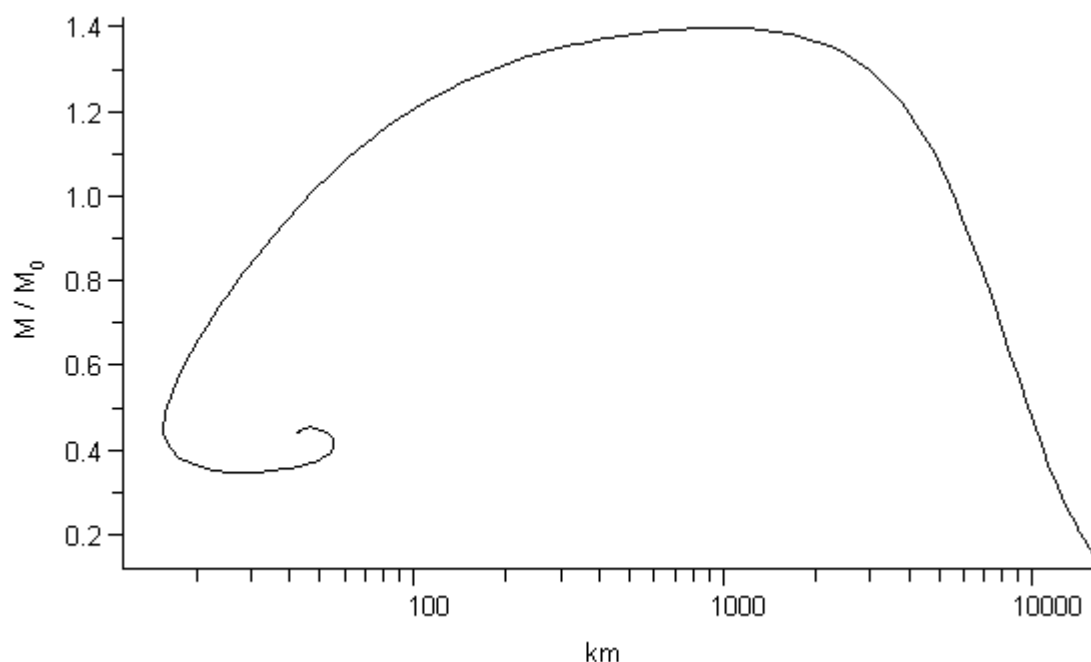
Na powyższym wykresie widzimy zgodność w wynikach wszystkich trzech modeli dla gęstości poniżej gęstości 10^{14} g/cm^3 . Powyżej tej gęstości modele zaczynają się od siebie różnić. W modelu „TOV” przy gęstości około $5 \cdot 10^{16} \text{ g/cm}^3$ promień gwiazdy osiąga minimum wysokości $15,6 \text{ km}$ a następnie zaczyna rosnąć wraz ze wzrostem gęstości. Dzieje się tak aż do gęstości około $4 \cdot 10^{18} \text{ g/cm}^3$ gdzie $R(\rho_c)$ osiąga maksimum w wysokości $55,3 \text{ km}$, następnie promień zaczyna ponownie maleć do $42,7 \text{ km}$.

W modelu nazwanym „Newton” promień maleje do gęstości około $6 \cdot 10^{18} \text{ g/cm}^3$ gdzie promień osiąga wartość $4,92 \text{ km}$ a następnie zaczyna rosnąć. Promień w modelu „politropa” zawsze maleje wraz ze wzrostem gęstości centralnej.

Kolejnym otrzymanym wykresem jest Rys. 9. zamieszczony poniżej. Rys. 9. jest wykresem otrzymanej zależności $R(\rho_c)$ dla wspomnianych trzech modeli. Modele nie różnią się znacznie do gęstości około $5 \cdot 10^8 \text{ g/cm}^3$. Powyżej tej gęstości dla modelu „politropa” obserwujemy przyrost masy do wartości $1,436 M_0$. W Modelu „Newton” masa ma maksimum dla gęstości 10^{11} g/cm^3 w wysokości $1,42 M_0$ po czym zaczyna maleć do wartości $0,364 M_0$, którą osiąga przy gęstości około 10^{20} g/cm^3 . Maksymalna masa dla modelu „TOV” wynosi $1,399 M_0$ przy gęstości $2,5 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$. Następnie masa zaczyna maleć i w końcu osiąga minimum $0,349 M_0$ dla gęstości $5 \cdot 10^{17} \text{ g/cm}^3$. Masa znowu zaczyna rosnąć i dla gęstości $\rho \approx 10^{19} \text{ g/cm}^3$ osiąga drugie maksimum $0,453 M_0$. Dla większych gęstości masa nie zmienia się znacznie i dąży do wartości $0,443 M_0$.



Rys. 9. Wykres masy białego karła przy zmianie gęstości centralnej otrzymany dla różnych równań struktury i stanu.



Rys. 10. Wykres masa / promień dla białego karła.

Rys. 10. Przedstawia relację masę promień dla białego karła. Są to wyniki dla modelu „TOV”, który daje najdokładniejsze rezultaty obliczeń. Początkowo masa gwiazdy rośnie wraz z rosnącą gęstością, promień natomiast maleje. Jak zostało to już wcześniej napisane maksymalna masa wynosi $1,399 M_0$. Gwiazda osiąga tą masę dla gęstości $2,5 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$ i ma wtenczas promień około 1000 km . Następnie masa gwiazdy zaczyna maleć. Kolejny interesujący punkt obserwujemy przy gęstości $5 \cdot 10^{16} \text{ g/cm}^3$ gdzie promień osiąga minimum $15,6 \text{ km}$. Masa ma wtedy wartość $0,46 M_0$. Następnie masa osiąga wspomniane wcześniej minimum w wysokości $0,349 M_0$. Dzieje się tak dla gęstości $5 \cdot 10^{17} \text{ g/cm}^3$ kiedy gwiazda ma promień około 25 km . Przy gęstości $4 \cdot 10^{18} \text{ g/cm}^3$ zależność $R(\rho_c)$ osiąga maksimum w wysokości $55,3 \text{ km}$. Gwiazda ma kolejne maksimum masy $0,453 M_0$ dla gęstości bliskiej 10^{19} g/cm^3 , ma wtenczas promień około 48 km . Dalszy przyrost gęstości nie wprowadza znacznych zmian, masa oscyluje wokół $0,443 M_0$ natomiast promień gwiazdy dąży do wartości $42,7 \text{ km}$.

3. Gwiazda neutronowa

Niedługo po odkryciu neutronów, mianowicie latach 30 tych XX wieku postulowano istnienie gwiazd neutronowych. Jednakże gwiazdy te pozbawione są własnych źródeł energii stąd stosunkowo szybko stygnące oraz niewielkich rozmiarów. Są zatem bardzo trudne do wykrycia. Odkrycie gwiazd neutronowych wiąże się z pulsarami. Pulsary to gwiazdy neutronowe wykonujące ruchy rotacyjne. Silne pole magnetyczne sięgające $10^8 T$ oraz ogromne prędkości obrotu umożliwiły zaobserwowanie istnienia pulsarów. Pulsary nie są tematem niniejszej pracy, nie będą więc dokładniej omawiane. W celu uzyskania informacji na temat pulsarów czytelnik powinien zaznajomić się z pozycjami [2] oraz [3].

Omówiliśmy już wcześniej powstawanie białego karła, wprowadziliśmy pojęcie maksymalnej masy białego karła zwanej masą Chandrasekhara i stąd narzuciliśmy warunki jakie musi spełniać proces utraty masy aby doszło do uformowania ciała niebieskiego utrzymywanego poprzez ciśnienie zdegenerowanego gazu elektronowego. Zastanówmy się teraz trochę dokładniej nad pochodzeniem gwiazdy neutronowej oraz nad warunkami jakie muszą być spełnione aby doszło do jej utworzenia. Jak to zostało już napisane wcześniej gwiazdy te mogą być uformowane z gwiazd o masie zawartej między 8 a $40 M_0$. Jednakże podobnie jak w przypadku białego karła należy narzucić warunki na procesy utraty masy przez gwiazdę. W przypadku białego karła była to masa Chandrasekhara M_{Ch} , w przypadku gwiazdy neutronowej będzie to masa Landaua M_L . Niech masa ta będzie większa niż masa Chandrasekhara. Wtenczas otrzymujemy oczywisty podział gwiazd ze względu na ich masę, mianowicie na te o masie poniżej M_{Ch} , te pomiędzy M_{Ch} a M_L oraz te obdarzone masą większą niż M_L . Gwiazdy należące do pierwszego przedziału zostały już omówione w poprzednim rozdziale. Drugi przedział dotyczy gwiazd neutronowych. Gwiazdy należące do trzeciego przedziału nie będą dysponowały wystarczającymi siłami przeciwdziałającymi siłom grawitacji i będą się zapadać dalej, na przykład do czarnej dziury. Rozwijając ten tok rozumowania zastanówmy się co się dzieje z materią w gwieździe przy gęstościach pozwalających na to aby neutron był cząstką stabilną. W poprzednim rozdziale zostało napisane, że przeciętne gęstości występujące w białych karłach są rzędu $\rho \approx 10^5 - 10^7 g/cm^3$. Materia składa się ze zjonizowanych jąder atomowych i zdegenerowanego gazu elektronowego. Gęstość nadal rośnie i osiąga wartość $\rho \approx 10^9 g/cm^3$.

Energie elektronów należących do zdegenerowanego gazu elektronowego dorównują lub nawet przewyższają $0,782 \text{ MeV}$, która jest produktem rozpadu β . Zatem proces rozpadu β nie może zajść gdyż elektron pochodzący z owego rozpadu nie może osiągnąć wystarczającej energii żeby zająć nieobsadzony stan energetyczny. Korzystny energetycznie zaczyna być wychwyt elektronów przez jądra atomowe. W jądrach atomowych zachodzą odwrotne rozpady β z powodu obecności elektronów o energiach większych niż $0,782 \text{ MeV}$. Proton staje się cząstką nietrwałą a neutron nie ulega już rozpadowi. Powstają jądra zawierające nadmiar neutronów. Przy gęstościach osiągających $\rho \approx 4 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ korzystne energetycznie staje się opuszczanie jąder atomowych przez neutrony. Zjawisko to nazywane jest strąśnięciem neutronów z jąder atomowych. Neutrony jako cząstki obdarzone większą masą spoczynkową od protonów przemieszczają się w kierunku centrum gwiazdy podczas gdy na zewnątrz wypychane są protony. Gwiazda neutronowa może także posiadać skorupę składającą się z atomów żelaza tworzących w zewnętrznej warstwie gwiazdy sieć krystaliczną. Zjawisko przemieszczania się neutronów do centrum gwiazdy nazywane jest ściekaniem. Elektrony wnoszą główny wkład do ciśnienia gwiazdy ale przy gęstościach $\rho \approx 4 \cdot 10^{13} \text{ g/cm}^3$ zaczynają przeważać neutrony. Jądra atomowe rozpadają się przy gęstości $\rho \approx 2,8 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$. W jeszcze większych gęstościach mogą pojawić się miony a następnie hiperony. Należałoby uwzględnić ich oddziaływania z leptonami i barionami, z których złożona jest gwiazda. Możliwe jest także że dla jeszcze większych gęstości następuje przejście fazowe ze stanu ciekłego do stałego. Jednakże zarówno materia hadronowa jak możliwość zajścia takiego przejścia fazowego nie jest tematem tej pracy i nie będziemy rozważać takich konfiguracji. Przy gęstościach około $\rho \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ materia ma własności cieczy złożonej z neutronów, takie konfiguracje będą rozważane w dalszej części pracy. Dalsza ewolucja gwiazdy polega na stygnięciu najpierw przez emisję par neutrino – antyneutrino potem przez promieniowanie termiczne. Przyjmuje się, że stygnięcie przebiega szybko. Po upływie 10^6 lat temperatura obniża się do $10^4 - 10^5 \text{ K}$. Rozważane modele gwiazdy neutronowej będą zakładały, że gwiazda neutronowa składa się ze zdegenerowanych neutronów, których ciśnienie powstrzymuje gwiazdę przed zapadaniem grawitacyjnym. W rozważanej gwiazdzie nie zachodzą oczywiście procesy generacji energii. Temperatura układu będzie pominięta przez przyjęcie, że energie, którymi dysponują cząstki są tak wysokie, że możemy zaniedbać temperaturę.

Będziemy starać się wyznaczyć masę Landaua M_L . Należy jednak pamiętać, że będzie ona zależała od tego jakie równanie stanu narzucimy na materię w gwiazdzie. Interesować nas będą także relacje $M(\rho_c)$, $R(\rho_c)$ oraz relacja masa / promień gdyż będziemy z nich korzystać przy okazji rozważania na temat stabilności gwiazdy. Wyznamy także prędkość dźwięku w gwiazdzie. Prędkość dźwięku nie może przekraczać prędkości światła. Kryterium to może być wykorzystane w celu wyznaczenia stabilności konfiguracji. Skorzystanie z kryterium prędkości dźwięku nie wymaga to jednak znajomości relacji $M(\rho_c)$, $R(\rho_c)$ a jedynie znajomości równania stanu. Stabilność gwiazd jest tematem rozdziału 4.

3.1. „Czysta” gwiazda neutronowa

Nazwa „czysta” gwiazda neutronowa pochodzi od założenia, że gwiazda składa się tylko z neutronów. Neutrony jako fermiony podlegają statystyce Fermiego – Diraca. Możemy więc skorzystać z relacji wyznaczonych uprzednio dla elektronów, opisujących gęstość energii oraz ciśnienie zmieniając jedynie odpowiednie parametry.

Opis „czystej” gwiazdy neutronowej sprowadza się do rozwiązania równań struktury (1.1.3) oraz (1.3.11) i następujących równań stanu:

$$P = P_0 \left((2x^3 - 3x)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \operatorname{arcsinh}(x) \right) \quad (3.1.1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left((2x^3 + x)(x^2 + 1)^{1/2} - \operatorname{arcsinh}(x) \right) \quad (3.1.2)$$

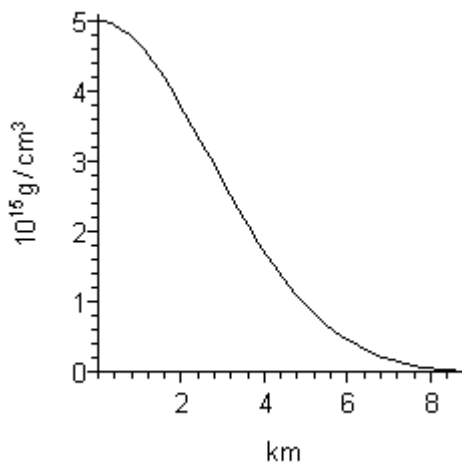
oraz:

$$P_0 = \frac{m_n^4 c^5}{24 \pi^2 \hbar^3} \quad \text{ i } \quad \varepsilon_0 = \frac{m_n^4 c^5}{8 \pi^2 \hbar^3}$$

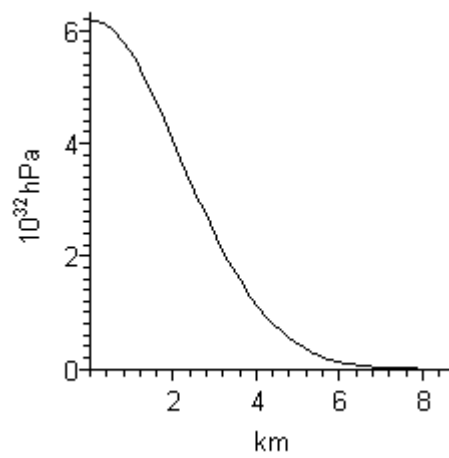
Natomiast przez x będziemy rozumieć poniższą relację:

$$x = \frac{\hbar}{m_n c} \left(\frac{3 \pi^2}{m_n} \rho \right)^{1/3} \quad (3.1.3)$$

Interesować nas będą profile gęstości i ciśnienia gwiazdy, jak również promień i masa gwiazdy w zależności od tego jaką gęstość centralną narzucimy. W celu rozwiązania zagadnienia możemy postąpić analogicznie jak to zostało przedstawione w przypadku białych karłów. Obliczymy najpierw problem pojedynczej konfiguracji dla zadanej gęstości centralnej w celu otrzymania profilu gęstości i ciśnienia.



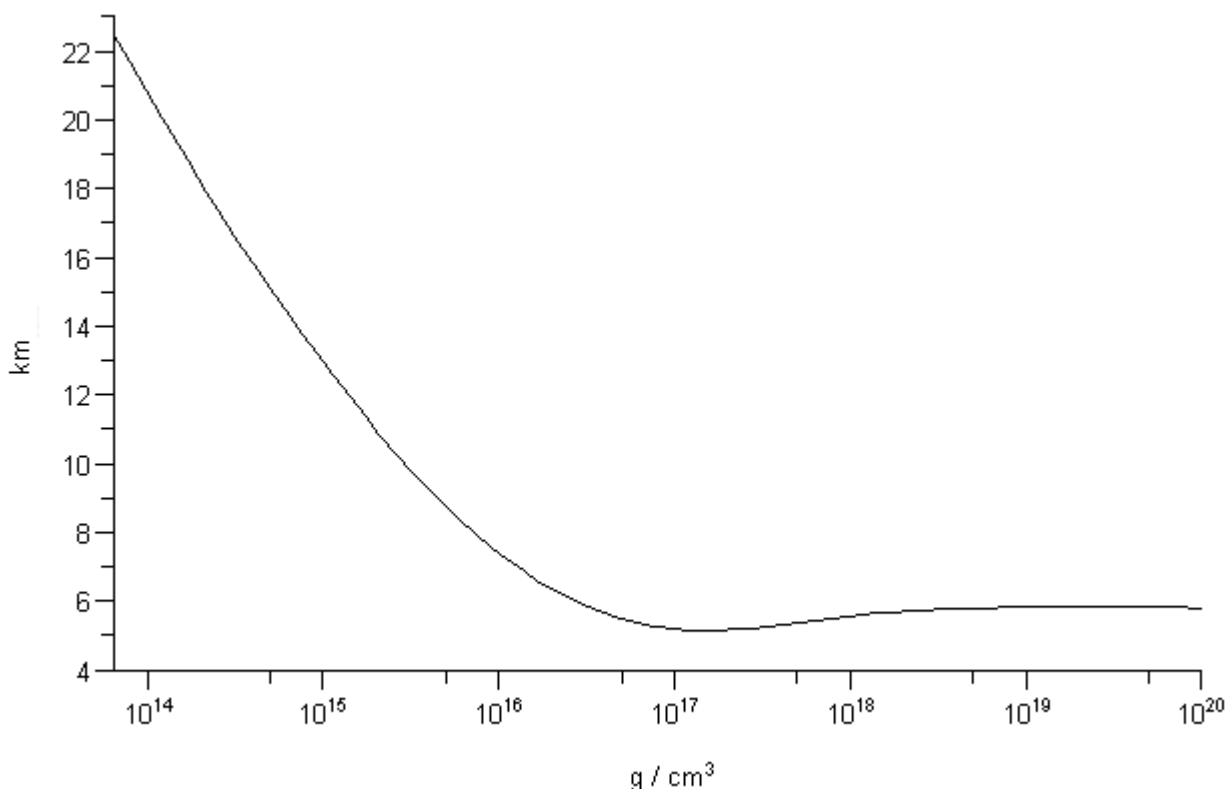
Rys. 11. Profil gęstości przy $\rho_c = 5 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$.



Rys. 12. Profil ciśnienia przy $\rho_c = 5 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$.

Wykresy Rys. 11. oraz Rys. 12. przedstawiają odpowiednio profil gęstości $\rho(r)$ oraz ciśnienia $P(r)$ dla gęstości centralnej $\rho_c = 5 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Podobnie jak to było w przypadku profili dla białego karła zarówno gęstość jak i ciśnienie jest funkcją malejącą wraz z promieniem wewnątrz gwiazdy. Można spodziewać się podobnego zachowania dla większości równań stanu. Niniejsza praca dotyczy białych karłów i gwiazd neutronowych w związku z czym przyjmujemy, że wszystkie następne profile gęstości $\rho(r)$ oraz ciśnienia $P(r)$ nie będą się znacznie różnić od tych przedstawionych dla białego karła, zobrazowanych na wykresach Rys. 2. – Rys. 5. oraz „czystej” gwiazdy neutronowej i nie będą one więcej już zamieszczane w późniejszej części pracy.

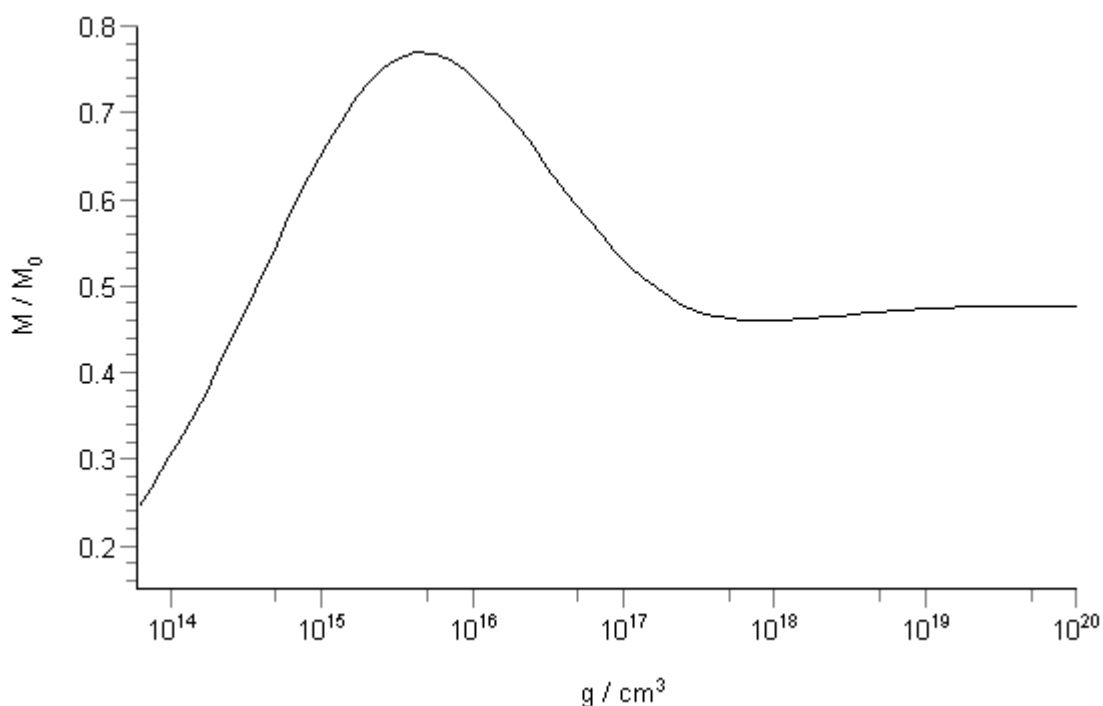
Następnie powinniśmy sprawdzić jak będą wyglądały relacje $R(\rho_c)$ i $M(\rho_c)$. Obliczymy najpierw jak zmienia się promień gwiazdy zależnie od tego jaką gęstość centralną narzucimy. Zakres badanych gęstości ustawiono na $5 \cdot 10^{13} - 10^{20} \text{ g/cm}^3$. Nie będziemy już porównywać teorii z podejściem Newtonowskim gdyż tak duże gęstości wymagają uwzględnienia poprawek relatywistycznych.



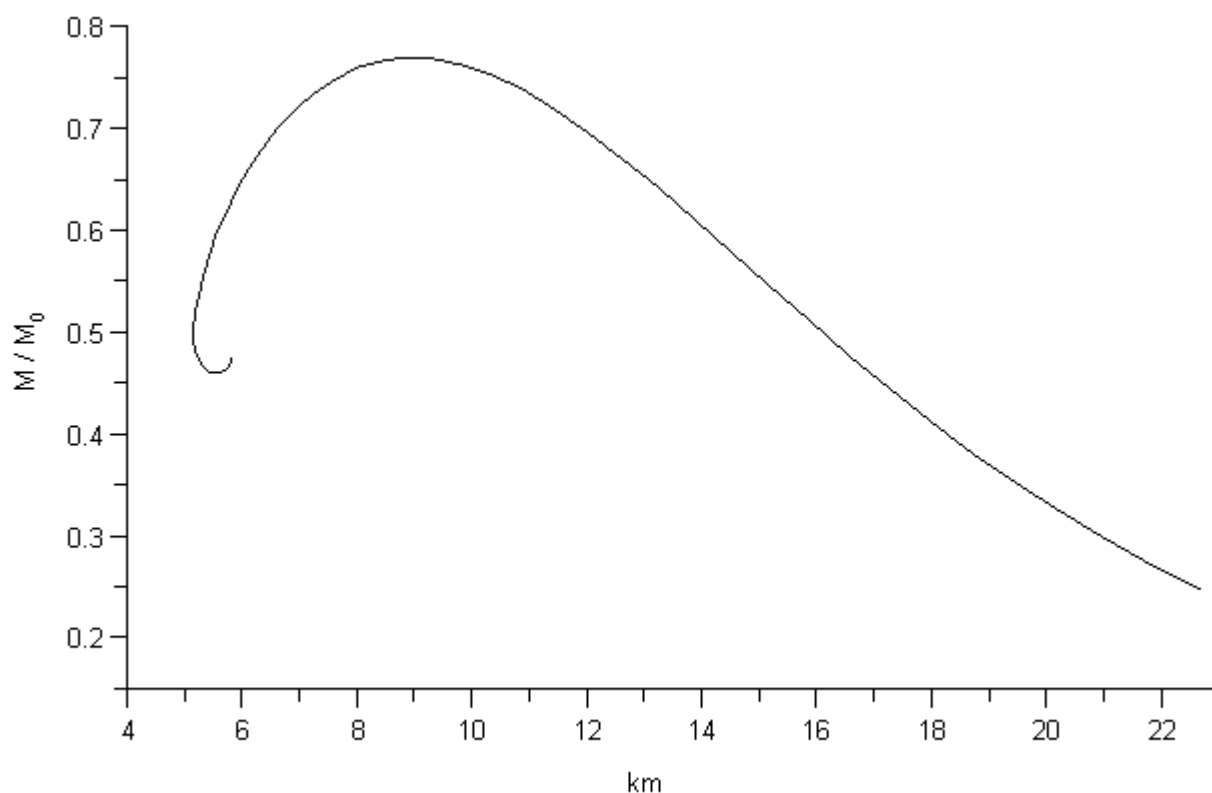
Rys. 13. Wykres promienia „czystej” gwiazdy neutronowej przy zmianie gęstości centralnej.

Wykres Rys. 13. przedstawia wyznaczoną zależność $R(\rho_c)$. Na wykresie widzimy, że dla małych gęstości promień maleje wraz ze wzrostem gęstości centralnych. Promień osiąga minimum w wysokości $5,16 km$ dla gęstości $\rho_c = 1,5 \cdot 10^{17} g/cm^3$. Następnie zaczyna rosnąć i osiąga maksimum $5,82 km$, przy gęstości centralnej około gęstości $10^{19} g/cm^3$. Dla większych gęstości promień nie zmienia się znacznie.

Następnie obliczono relację $M(\rho_c)$. Dla dolnego przedziału badanych gęstości masa gwiazdy rośnie wraz z gęstością centralną ρ_c . Dla gęstości $\rho_c = 4,8 \cdot 10^{15} g/cm^3$ masa osiąga maksimum wynoszące $M_{max} \approx 0,77 M_0$. Po osiągnięciu maksimum masa zaczyna spadać do wartości $0,46 M_0$, którą osiąga dla gęstości $5,4 \cdot 10^{17} g/cm^3$. Masa znowu zaczyna rosnąć i dla gęstości powyżej $10^{19} g/cm^3$ ma wartość $M(\rho_c) \approx 0,48 M_0$.



Rys. 14. Wykres masy „czystej” gwiazdy neutronowej przy zmianie gęstości centralnej.



Rys. 15. Relacja masa / promień dla „czystej” gwiazdy neutronowej.

Na wykresie Rys. 15. przedstawiona jest relacja masa / promień dla czystej gwiazdy neutronowej. Jak zostało to napisane wcześniej dla niskich gęstości masa rośnie wraz z gęstością centralną ρ_c promień natomiast maleje. Masa rośnie i osiąga maksimum $M \approx 0,77 M_0$. Promień odpowiadający tej masie to $R \approx 8,76 km$ przy gęstości centralnej $\rho_c = 4,8 \cdot 10^{15} g/cm^3$. Gęstość rośnie i kiedy jej wartość osiąga $\rho_c = 1,5 \cdot 10^{17} g/cm^3$ promień gwiazdy ma wartość minimalną wynoszącą $5,16 km$. Masa wtenczas ma wartość $0,51 M_0$. Gęstość rośnie dalej i kiedy osiąga wartość $5,4 \cdot 10^{17} g/cm^3$ masa gwiazdy osiąga swoje minimum w wysokości $0,46 M_0$. Wartość promienia jest wtedy następująca: $R = 5,4 km$.

3.2. Gwiazda neutronowa z uwzględnieniem elektronów i protonów

Z powodu niestabilności neutronu musimy w składzie gwiazdy neutronowej uwzględnić wkład protonów i elektronów, gdyż w gwiazdzie zachodzą rozpady β :

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e \quad (3.2.1)$$

Przy niskich gęstościach gwiazda składa się z protonów i elektronów. Kiedy gęstość rośnie protony „wychwytyją” elektrony. Zachodzi reakcja:

$$p + e \rightarrow n + \nu_e \quad (3.2.2)$$

z kolei przy dużych gęstościach część neutronów zaczyna się rozpadać na proton, elektron i neutrino elektronowe. Droga swobodna neutrin jest funkcją temperatury. Dla niskich temperatur jest ona na tyle duża, że w znaczącej części wylatują one z gwiazdy bez interakcji z materią. W związku z czym będziemy przyjmować, że $\mu_\nu = 0$. Stąd musi zachodzić:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e \quad (3.2.3)$$

Powyższe równanie nazywa się często warunkiem równowagi ze względu na rozpad β . Jako że potencjał chemiczny gazu doskonałego w zerowej temperaturze jest dany przez:

$$\mu = \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} = \sqrt{(k^2 c^2 + m^2 c^4)} \quad (3.2.4)$$

Żądanie przez nas elektrycznej obojętności gwiazdy $\eta_e = \eta_p$ sprowadza się do warunku:

$$k_e = k_p \quad (3.2.5)$$

Zatem możemy korzystając z relacji (3.2.4) oraz (3.2.5) przekształcić (3.2.3) do postaci:

$$k_p = \frac{\left((k_n^2 c^2 + m_n^2 c^4 - m_e^2 c^4)^2 - 2 m_p^2 c^4 (k_n^2 c^2 + m_n^2 c^4 + m_e^2 c^4) + m_p^4 c^8 \right)^{1/2}}{2c (k_n^2 c^2 + m_n^2 c^4)^{1/2}} \quad (3.2.6)$$

Dzięki powyższej relacji możemy zbadać jak duży wkład wnoszą protony w stosunku do neutronów przy zadanym pędzie Fermiego neutronów. Zapiszmy zatem relację łączącą gęstość liczby poszczególnych cząstek z ich pędem Fermiego:

$$\eta_i = \frac{k_i^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (3.2.7)$$

dla $i = \{n, p, e\}$. Przyjmijmy oznaczenie:

$$\eta = \eta_n + \eta_p \quad (3.2.8)$$

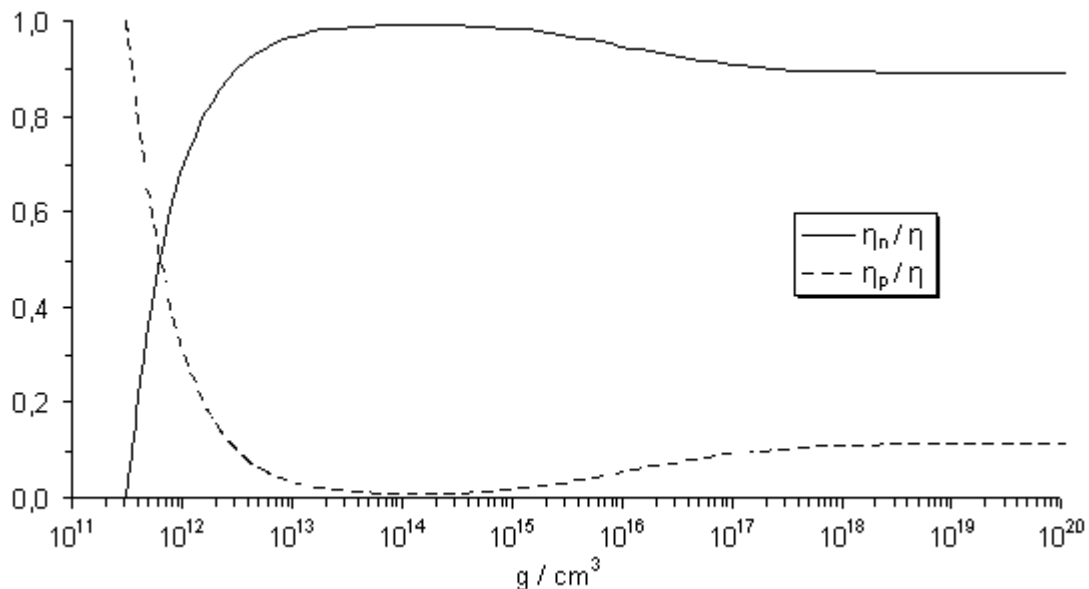
Dokonując przejścia do granicy: $k_n c \gg m_n c^2$, w wyrażeniu (3.2.6) otrzymamy:

$$k_p \approx \frac{1}{2} k_n \quad (3.2.9)$$

Stąd dla wysokich gęstości centralnych możemy zapisać:

$$\frac{\eta_p}{\eta} = \frac{1}{9} \quad (3.2.10)$$

Wyrażenie (3.2.6) możemy wykorzystać w celu wyznaczenia zależności $\eta_p(\rho)$, $\eta_n(\rho)$ oraz $\eta(\rho)$ skąd następnie otrzymamy relacje gęstości liczby neutronów i protonów co zostało zilustrowane na wykresie Rys. 16. Należy zaznaczyć, że wyrażenia tego nie możemy używać zawsze. Jest to relacja wynikająca z równowagi ze względu na rozpad β , która występuje dla gęstości powyżej $4 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$. Oczywiście przez równowagę ze względu na rozpad beta będziemy rozumieć rozpad β dla materii składającej się ze swobodnych neutronów, protonów i elektronów. Zakładamy, że zaszło już strąśnięcie neutronów z jąder atomowych oraz nastąpił rozpad pozostałości po jądrach, z których zostały strąśnięte neutrony. Drugim możliwym stanem początkowym niniejszego eksperymentu myślowego jest założenie, że materia przed jonizacją składała się wyłącznie z atomów wodoru. Aby uzasadnić dolną granicę stosowalności relacji (3.2.6) należy wstawić za k_n zero, wtenczas obliczymy graniczną wartość pędu Fermiego dla protonów $k_p(0) \approx 1,19 \text{ MeV}/c$ i stąd otrzymujemy gęstość $3,1 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$. Podstawienie zera za k_n odpowiada wartości granicznej gęstości dla, której pojawiają się neutrony stąd jest to minimalna wartość k_n , dla której możemy rozważać równowagę ze względu na rozpad β .



Rys. 16. Stosunek gęstości liczby neutronów oraz gęstości liczby protonów do gęstości liczby nukleonów.

Rys. 16. przedstawia gęstości liczby neutronów i protonów do całkowitej liczby nukleonów. Jak zostało to już napisane wcześniej korzystamy z zależności (3.2.6). Dlatego dolna wartość gęstości na wykresie wynosi $3,1 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$. Początkowo, dla małych gęstości gwiazda składa praktycznie z samych protonów. Jednakże sytuacja ta zmienia się szybko z gęstością. Powyżej gęstości $6 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ zaczynają dominować neutrony, a dla gęstości powyżej $3 \cdot 10^{12} \text{ g/cm}^3$ wkład protonów do liczby nukleonów nie przekracza 0,1. Przy gęstości $4 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ liczba protonów zaczyna rosnąć. Liczba protonów rośnie do gęstości $3 \cdot 10^{18} \text{ g/cm}^3$ gdzie osiąga wartość około 1/9 całkowitej liczby nukleonów. Powyżej tej gęstości wkłady poszczególnych nukleonów nie zmieniają się. Widzimy zgodność wykresu z zależnością (3.2.10).

Następnym krokiem w analizie gwiazdy będzie otrzymanie relacji $R(\rho_c)$ oraz $M(\rho_c)$. Podobnie jak „czystą” gwiazdę neutronową niniejszy problem będziemy rozwiązywać dla następującego przedziału gęstości $5 \cdot 10^{13} - 10^{20} \text{ g/cm}^3$. Korzystając z wykresu Rys. 16. możemy się domyślać, że gwiazda nie powinna różnić się znacznie od „czystej” gwiazdy neutronowej. Gwiazdę będziemy modelować za pomocą narzucenia pędu Fermiego neutronów w centrum gwiazdy a nie gęstości centralnej, tak jak to było w przypadku poprzednich gwiazd. Mimo to wykresy odniesione zostały do gęstości centralnej w celu ułatwienia ich odczytu. Podobnie jak w przypadku białego karła, przy konstrukcji równań stanu należy uwzględnić wszystkie składniki:

$$P = P_n + P_p + P_e \quad (3.2.11)$$

oraz:

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_p + \varepsilon_e \quad (3.2.12)$$

Gdzie:

$$P_i = P_0^i \left(\left(2x_i^3 - 3x_i \right) \left(x_i^2 + 1 \right)^{1/2} + 3 \operatorname{arcsinh}(x_i) \right) \quad (3.2.13)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0^i \left(\left(2x_i^3 + x_i \right) \left(x_i^2 + 1 \right)^{1/2} - \operatorname{arcsinh}(x_i) \right) \quad (3.2.14)$$

Przy czym:

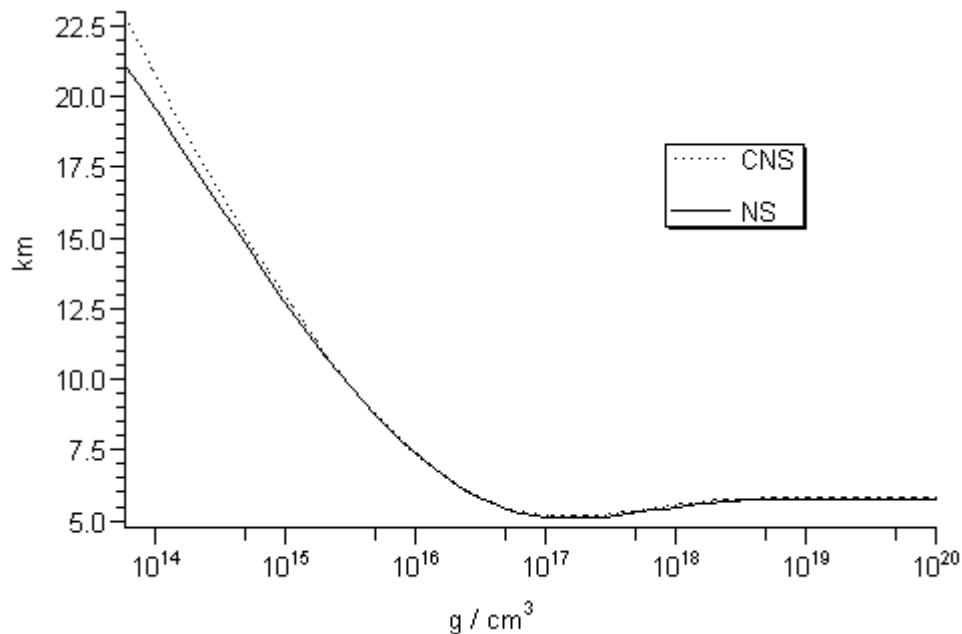
$$\varepsilon_0^i = \frac{m_i^4 c^5}{8 \pi^2 \hbar^3}, \quad P_0^i = \frac{m_i^4 c^5}{24 \pi^2 \hbar^3} \quad \text{oraz} \quad x_i = \frac{k_i}{m_i c} \quad (3.2.15)$$

Oraz:

$$\rho = \eta_n m_n + \eta_p m_p + \eta_e m_e \quad (3.2.16)$$

korzystając z powyższych równań stanu możemy rozwiązać równania struktury i otrzymać promień oraz masę gwiazdy.

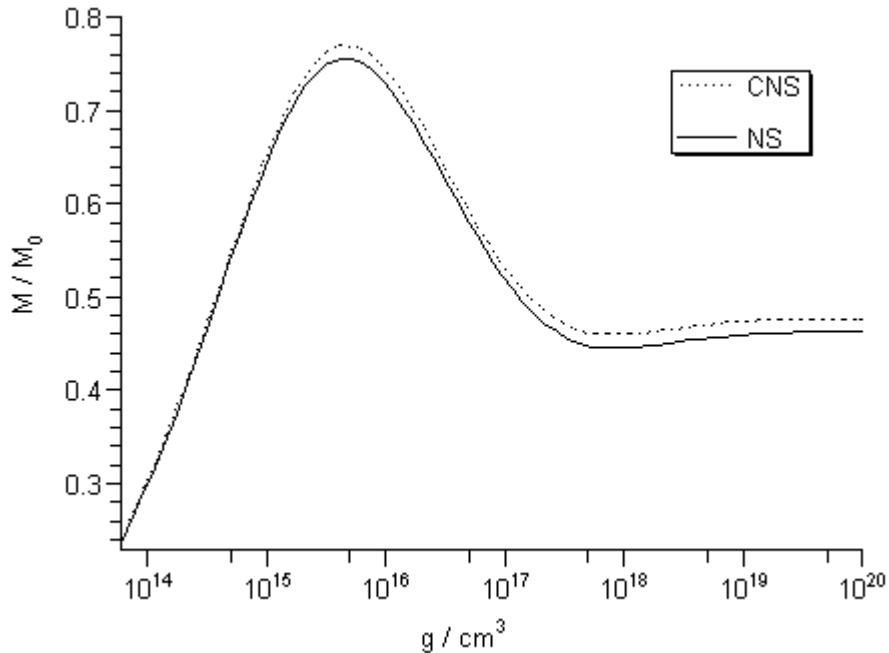
Na wykresach Rys. 17., Rys. 18. oraz Rys.19. porównano wyniki obliczeń z wynikami uzyskanymi dla „czystej” gwiazdy neutronowej. CNS oznacza „czystą” gwiazdę neutronową, natomiast NS to gwiazda, dla której uwzględniono równowagę ze względu na rozpad β .



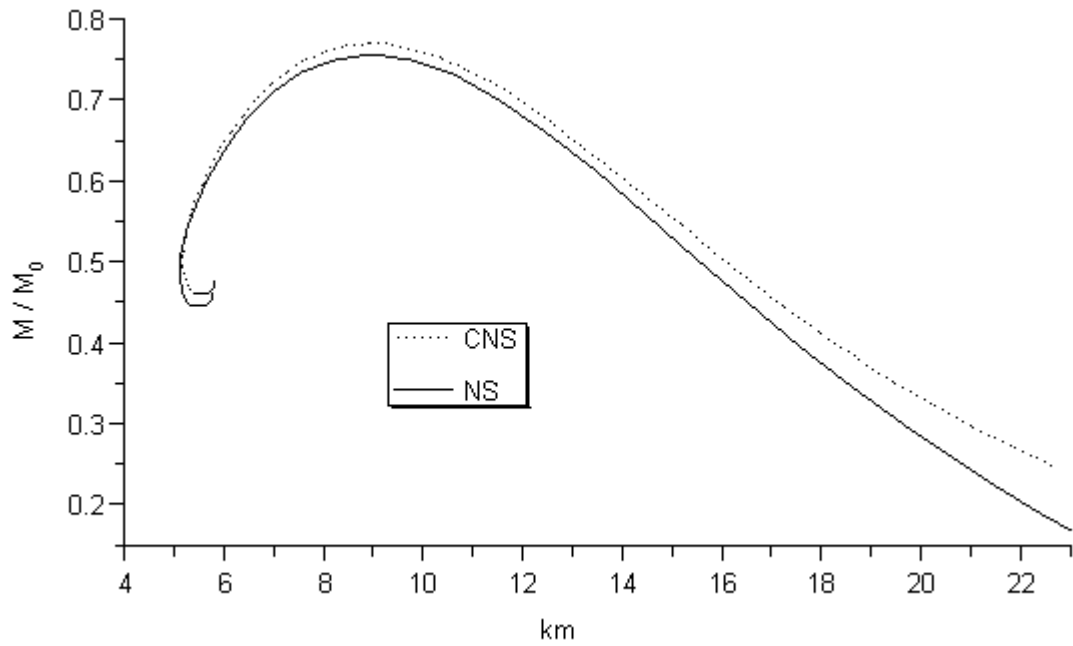
Rys. 17. Wykres przedstawia promień gwiazd neutronowych w zależności od ich gęstości centralnych.

Rys. 17. przedstawia zależność $R(\rho_c)$ dla dwóch gwiazd neutronowych. „Czysta” gwiazda neutronowa została już opisana w poprzednim rozdziale i nie będzie omawiana ponownie. Na wykresie widzimy zbieżność dla relacji $R(\rho_c)$ dla obu gwiazd powyżej gęstości $5 \cdot 10^{14} g/cm^3$. Poniżej tej gęstości widzimy różnice wynikające z stosunkowo dużego warunku obciążenia narzuconego na pęd Fermiego dla gwiazdy uwzględniającej wkład protonów i elektronów. Warunek obciążenia powoduje zakończenie obliczeń kiedy pęd Fermiego osiągnie daną wartość. Mechanizm taki należy narzucić gdyż poza zwartym jądrem pojawia się atmosfera gwiazdy, której gęstość maleje bardzo powoli z promieniem. Rezultatem pojawienia się atmosfery mogą być bardzo duże promienie gwiazdy. W celu uporania się z tym problemem narzuca się warunki obciążenia, które zapobiegają pojawianiu się takich problemów. Promień gwiazdy neutronowej maleje do gęstości około $\rho_c = 1,5 \cdot 10^{17} g/cm^3$ gdzie wynosi $5,01 km$. Po osiągnięciu minimum promień zaczyna rosnąć. Promień osiąga maksimum w wysokości $5,74 km$ dla gęstości $5 \cdot 10^{18} g/cm^3$.

Porównanie obu relacji $M(\rho_c)$ widzimy na wykresie Rys. 18. Obie relacje są stosunkowo podobne jednakże maksymalna masa, którą osiąga gwiazda w równowadze β jest nieco mniejsza. Wynika to z faktu, że to samo ciśnienie jest wytwarzane przez neutrony, protony i elektrony w przypadku gwiazdy stabilnej ze względu na rozpad β przez co przez neutrony w czystej gwiazdzie. Z kolei masa protonu jest mniejsza od masy neutronu zatem masa czystej gwiazdy musi być większa przy tej samej gęstości. Masa gwiazdy w stanie równowagi ze względu na rozpad β została zbadana dla gęstości powyżej $5 \cdot 10^{13} \text{ g/cm}^3$. Masa gwiazdy początkowo rośnie wraz z gęstością centralną ρ_c . Maksymalna masa gwiazdy wynosi $0,757 M_0$, którą gwiazda osiąga dla gęstości $\rho_c = 4,6 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Dla dalszego przyrostu gęstości masa zaczyna spadać. Dla gęstości $5,2 \cdot 10^{17} \text{ g/cm}^3$ masa osiąga minimum wysokości $0,445 M_0$. Następnie masa ponownie zaczyna rosnąć do wartości $0,46 M_0$.



Rys. 18. Masa gwiazd neutronowych w zależności od ich gęstości centralnych.



Rys. 19. Relacja masa / promień.

Na wykresie Rys. 19. widzimy, że promień badanej gwiazdy maleje wraz z gęstością, rośnie natomiast masa gwiazdy. Ponadto z powyższego wykresu możemy odczytać, że najbardziej masywna gwiazda neutronowa w równowadze ze względu na rozpad β ma masę równą $M_{max} \approx 0,757 M_0$. Promień odpowiadający tej masie to $R_{max} \approx 8,9 \text{ km}$ przy gęstości centralnej $\rho_c = 4,6 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Dla przypomnienia „czysta” gwiazda neutronowa ma masę równą $M_{max} \approx 0,77 M_0$, promień $R_{max} \approx 8,76 \text{ km}$ oraz gęstość centralną $\rho_c = 4,8 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Po osiągnięciu maksimum masa zaczyna maleć. Kolejnym interesującym nas miejscem jest minimum promienia $R(\rho_c) = 5,01 \text{ km}$ przy gęstości centralnej $\rho_c = 1,5 \cdot 10^{17} \text{ g/cm}^3$. Masa gwiazdy wynosi wtenczas około $0,49 M_0$. Promień zaczyna rosnać, masa natomiast ciągle maleje. Masa osiąga minimum w wysokości $0,445 M_0$. Promień gwiazdy ma wtenczas wartość $5,4 \text{ km}$, gęstość centralna z kolei wynosi $5,2 \cdot 10^{17} \text{ g/cm}^3$. Różnice są nieznaczne dlatego w dalszej części pracy będą omawiane gwiazdy neutronowe składające się jedynie z neutronów.

3.3. Wprowadzenie oddziaływań – model empiryczny

Sposób wprowadzenia oddziaływań będzie sprowadzał się do rozważenia gęstości energii dla symetrycznej materii $\eta_n = \eta_p$ a następnie rozszerzenia modelu dla asymetrycznego składu gwiazdy $\eta_n \neq \eta_p$. Jak również na zaniedbaniu różnicy mas protonu i neutronu $m_p = m_n$. W niniejszym fragmencie pracy jako jednostki energii i odległości używane będą MeV oraz fm odpowiednio natomiast wyniki będą wyrażone w jednostkach używanych w pozostałej części pracy. Zapiszmy, że średnia energia na nukleon powinna być postaci:

$$\frac{\varepsilon(\eta)}{\eta} = m_n c^2 + \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2 m_n} + V(\eta) \quad (3.3.1)$$

Gdzie pierwszy człon odpowiada energii spoczynkowej, drugi kinetycznej, trzeci natomiast jest potencjałem, dzięki któremu wprowadzimy oddziaływania. Potencjał $V(\eta)$ będziemy modelować za pomocą trzech parametrów. Będzie on następujący:

$$V(\eta) = \frac{A}{2} u + \frac{B}{\sigma + 1} u^\sigma \quad (3.3.2)$$

Gdzie przez u będziemy rozumieć $u = \eta / \eta_0$. Parametry A , B oraz σ posłużą do dopasowania modelu do narzucanych na niego wymagań. W celu otrzymania wartości owych parametrów wykorzystamy dane znane dzięki fizyce jądrowej. Pierwszą wielkością jest równowagowa gęstość liczby dla symetrycznej materii η_0 . Jest ona następująca:

$$\eta_0 = 0,16 \text{ nukleonów} / fm^3 \quad (3.3.3)$$

Następnie znana jest średnia energia wiązania na nukleon przy tej gęstości:

$$BE = -16 MeV \quad (3.3.4)$$

Oraz ściśliwość materii jądrowej:

$$K(\eta_0) = 9 \left[\eta^2 \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{\varepsilon}{\eta} \right) + 2 \eta \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\varepsilon}{\eta} \right) \right] = 400 MeV \quad (3.3.5)$$

Z zależności (3.3.4) wynikają następujące równania:

$$BE = \left(\frac{\varepsilon(\eta)}{\eta} - m_n c^2 \right)_{\eta_0} = -16 MeV \quad (3.3.6)$$

Oraz:

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{\varepsilon(\eta)}{\eta} \right)_{\eta_0} = 0 \quad (3.3.7)$$

Dzięki powyższym warunkom (3.3.3), (3.3.4) oraz (3.3.5) otrzymujemy wartości parametrów:

$$A = -118,218 \text{ MeV} \quad (3.3.8)$$

$$B = 65,385 \text{ MeV} \quad (3.3.9)$$

$$\sigma = 2,112 \quad (3.3.10)$$

Otrzymaliśmy zatem postać gęstości energii. Zapiszmy jeszcze wyraz odpowiadający energii kinetycznej nukleonu do nieco wygodniejszej postaci:

$$\frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2 m_n} = \langle E_0 \rangle u^{2/3} \quad (3.3.11)$$

Gdzie przez $\langle E_0 \rangle$ średnią energię kinetyczną nukleonu w stanie podstawowym:

$$\langle E_0 \rangle = \frac{3}{5} \frac{k_0^2}{2 m_n} = \frac{3}{5} \frac{1}{2 m_n} \left(\frac{3 \pi^2 \hbar^3}{2} \eta_0 \right)^{2/3} \quad (3.3.12)$$

Zatem dzięki relacji (3.3.3) otrzymujemy wartość $\langle E_0 \rangle$:

$$\langle E_0 \rangle = 22,1 \text{ MeV} \quad (3.3.13)$$

Stąd średnia energia na nukleon jest dana przez:

$$\frac{\varepsilon(\eta)}{\eta} = m_n c^2 + \langle E_0 \rangle u^{2/3} + \frac{A}{2} u + \frac{B}{\sigma+1} u^\sigma \quad (3.3.14)$$

Natomiast ciśnienie znajdujemy dzięki następującej relacji łączącej je z gęstością energii:

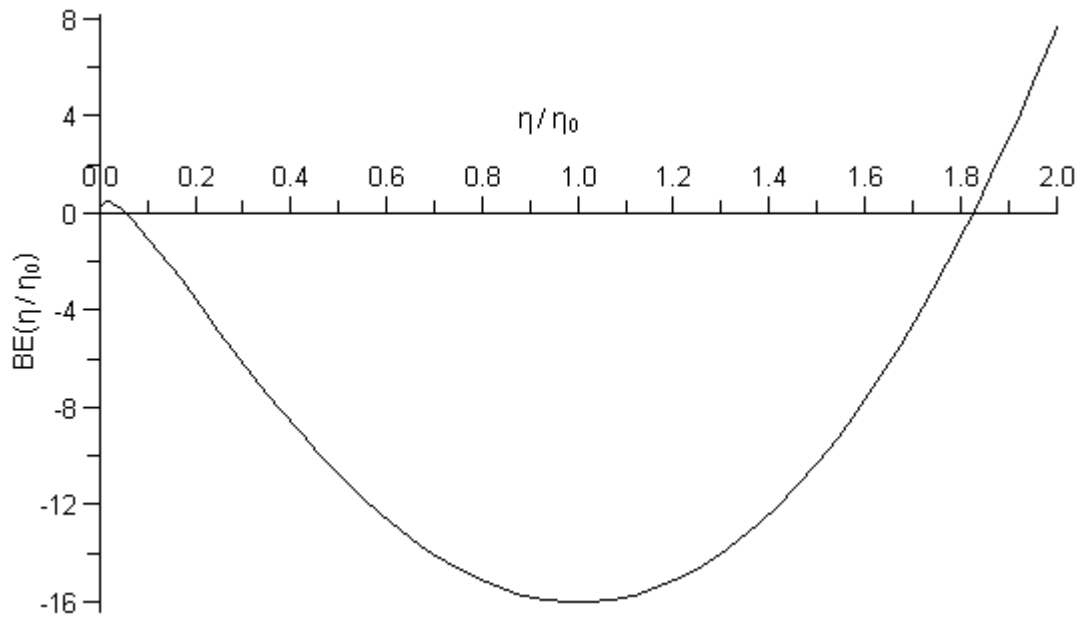
$$P(\eta) = \eta^2 \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\varepsilon(\eta)}{\eta} \right) \quad (3.3.15)$$

Ciśnienie jest więc dane przez:

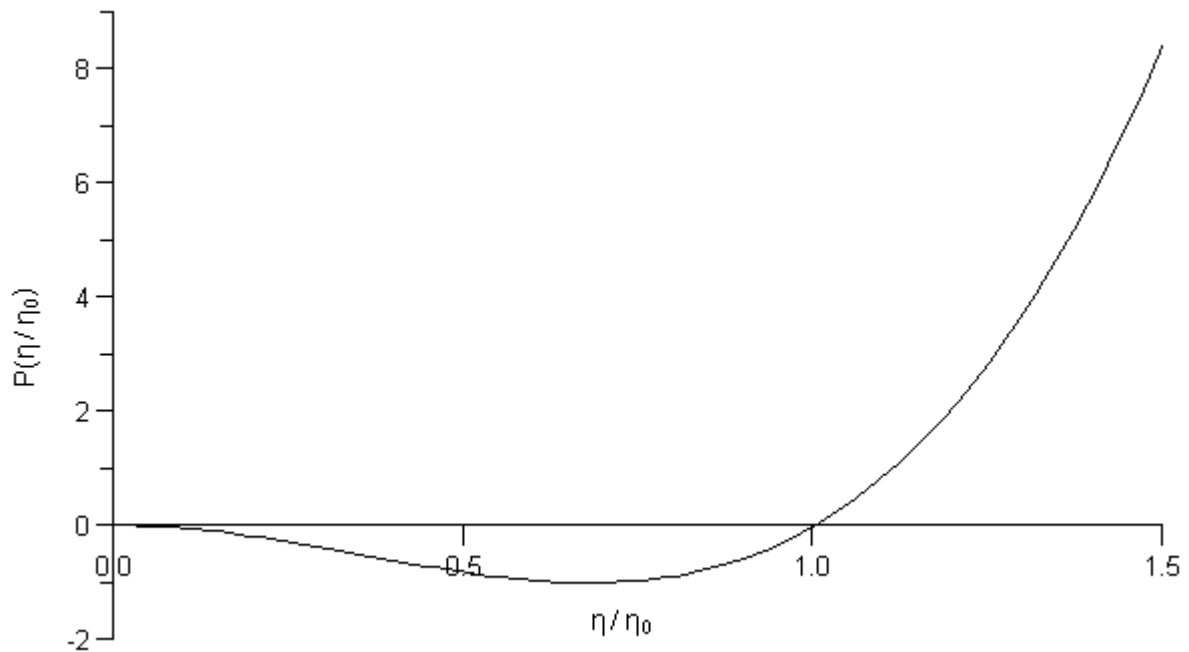
$$P(\eta) = \eta_0 \left[\frac{2}{3} \langle E_0 \rangle u^{5/3} + \frac{A}{2} u^2 + \frac{B \sigma}{\sigma+1} u^{\sigma+1} \right] \quad (3.3.16)$$

Na wykresie Rys. 20. widzimy relację łączącą energię na nukleon pomniejszoną o masę spoczynkową z gęstością liczby nukleonów. Energia na nukleon pomniejszona o masę spoczynkową jest nazwana w niniejszej pracy energią wiązania na nukleon. Minimum wyrażenia $BE(u)$ wynosi -16 MeV co odpowiada spełnieniu warunku (3.3.6). Rys. 21. przedstawia ciśnienie w zależności od gęstości liczby. Dla gęstości poniżej równowagowej gęstości liczby wartość ciśnienia spada poniżej zera. Oznacza to niestabilność konfiguracji. Aby opis był bardziej realistyczny należało by uwzględnić niestabilność neutronu dla niskich gęstości oraz obecność jąder atomowych. Pojawienie się ujemnego ciśnienia jest związane ze zjawiskiem kawitacji. Kawitacja polega na tworzeniu się w cieczy obszarów wypełnionych przez niejednorodną mieszaninę gazowej oraz ciekłej fazy danej cieczy.

Jest to spowodowane spadkiem ciśnienia poniżej prężności pary nasyconej rozpatrywanej cieczy.



Rys. 20. Średnia energia wiązania na nukleon. Położenie minimum dla $\eta = \eta_0 = 0,16 \text{ nukleonów/fm}^3$. Jednostką energii na wykresie jest MeV . Wartość wiązania w minimum wynosi $BE(\eta_0) = -16 MeV$.



Rys. 21. Wykres ciśnienia dla omawianego modelu oddziaływań.

Następnie należy rozszerzyć model do asymetrycznej materii $\eta_n \neq \eta_p$. W tym celu należy wprowadzić następujący parametr:

$$\alpha = \frac{\eta_n - \eta_p}{\eta} \quad (3.3.17)$$

Zastanówmy się jak duża jest różnica między gęstością energii w przypadku symetrycznej materii a gęstością energii, w przypadku gdy owa symetria jest złamana. Można to sprawdzić porównując energie kinetyczne dla obu przypadków. Zgodnie z relacją (3.3.14) energia kinetyczna cząstek dla symetrycznej materii ma następujący wkład do energii gwiazdy:

$$\varepsilon_{KE}(\eta, 0) = \langle E_F \rangle \eta \quad (3.3.18)$$

$$\langle E_F \rangle = \frac{3}{5} \frac{1}{2m_n} \left(\frac{3\pi^2 \hbar^3}{2} \eta \right)^{2/3} \quad (3.3.19)$$

Z kolei dla asymetrycznej materii zachodzi:

$$\varepsilon_{KE}(\eta, \alpha) = \frac{3}{5} \frac{k_n^2}{2m_n} \eta_n + \frac{3}{5} \frac{k_p^2}{2m_n} \eta_p = \frac{1}{2} \langle E_F \rangle \eta \left((1+\alpha)^{5/3} + (1-\alpha)^{5/3} \right) \quad (3.3.20)$$

Zatem różnica między symetryczną a niesymetryczną materią jest następująca:

$$\varepsilon_{KE}(\eta, \alpha) - \varepsilon_{KE}(\eta, 0) = \langle E_F \rangle \eta \left\{ \frac{1}{2} \left[(1+\alpha)^{5/3} + (1-\alpha)^{5/3} \right] - 1 \right\} \quad (3.3.21)$$

Wyrażenie możemy rozwinąć w szereg Taylora i otrzymujemy:

$$\varepsilon_{KE}(\eta, \alpha) - \varepsilon_{KE}(\eta, 0) = \langle E_F \rangle \eta \frac{5}{9} \alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{27} + \dots \right) \quad (3.3.22)$$

Do naszych celów wystarczy nam przybliżenie rzędu α^2 . Stąd otrzymujemy:

$$\frac{\varepsilon(\eta, \alpha)}{\eta} = \frac{\varepsilon(\eta, 0)}{\eta} + \alpha^2 S(\eta) \quad (3.3.23)$$

Funkcja $S(u)$ ma następującą formę:

$$S(u) = (2^{2/3} - 1) \langle E_0 \rangle [u^{2/3} - F(u)] + S_0 F(u) \quad (3.3.24)$$

$S(u)$ jest funkcją opisującą energię symetrii, S_0 opisuje różnicę między materią składającą się z samych neutronów a materią symetryczną w stanie podstawowym. Wartość S_0 ustawimy na 30 MeV . Funkcja $F(u)$ musi spełniać dwa warunki, mianowicie $F(1)=1$ wtenczas zachodzi $S(1)=S_0$ oraz $F(0)=0$ wtenczas $S(0)=0$. Wybieramy możliwie najprostszą postać funkcji $F(u)$ spełniającej powyższe warunki:

$$F(u) = u \quad (3.3.25)$$

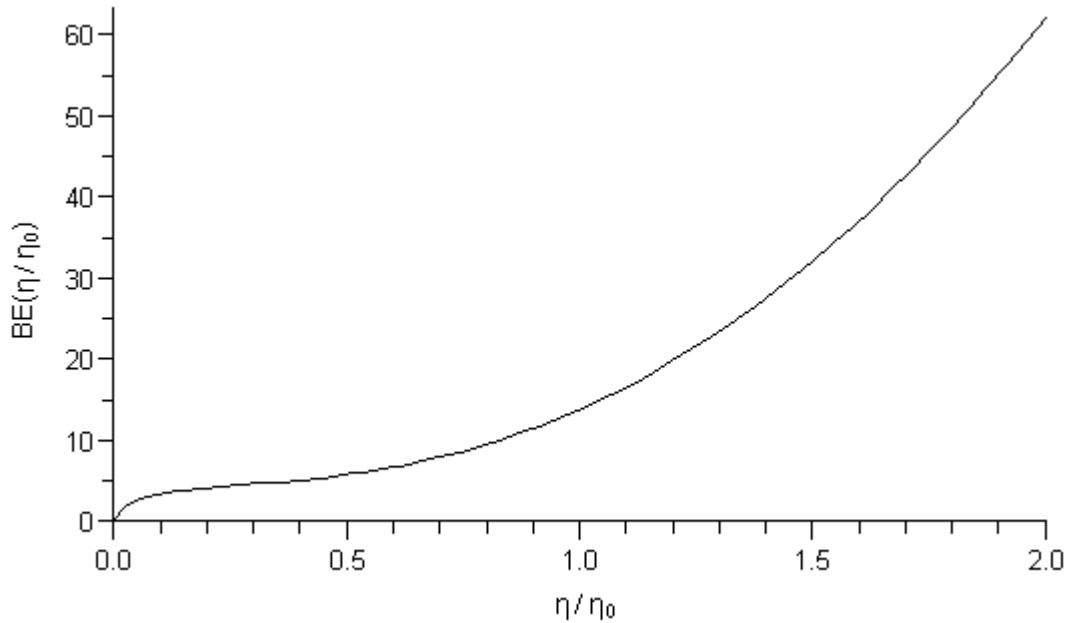
Stąd gęstość energii gwiazdy na nukleon ma następującą postać:

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = m_n c^2 + \langle E_0 \rangle u^{2/3} + \frac{A}{2} u + \frac{B}{\sigma+1} u^\sigma + \alpha^2 \left\{ (2^{2/3} - 1) \langle E_0 \rangle [u^{2/3} - F(u)] + S_0 F(u) \right\} \quad (3.3.26)$$

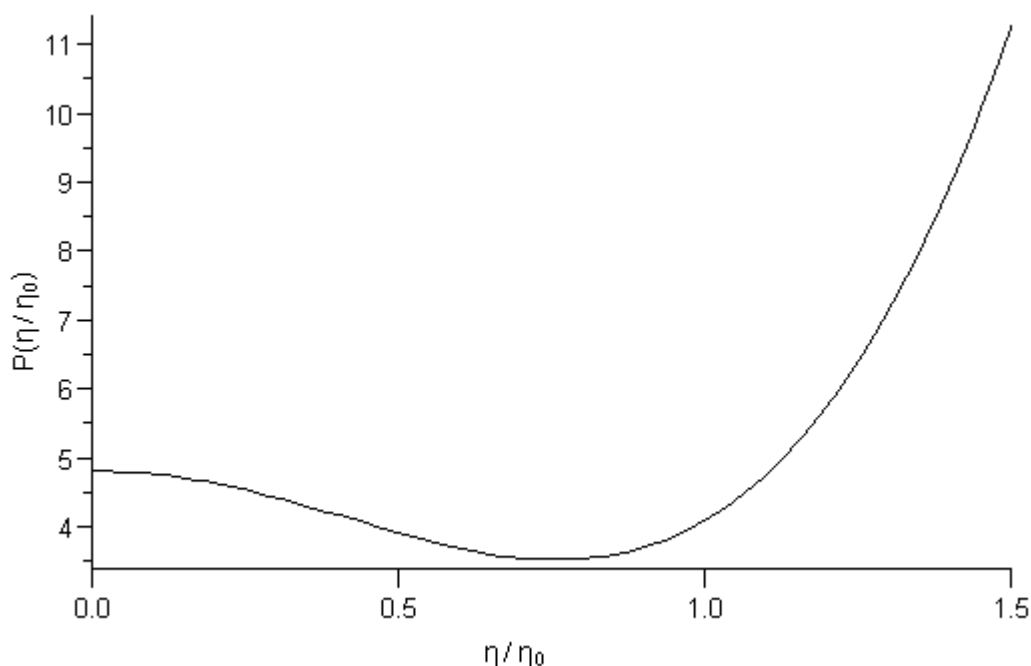
Następnie korzystając z relacji (3.3.16) otrzymujemy następującą postać ciśnienia:

$$P(\eta, \alpha) = P(\eta, 0) + \alpha^2 n_0 \left[(2^{2/3} - 1) \langle E_0 \rangle \left(\frac{2}{3} u^{5/3} - u^2 \right) + S_0 u^2 \right] \quad (3.3.27)$$

Jak zostało to już napisane wcześniej będziemy rozważać jedynie „czyste” gwiazdy neutronowe zatem $\alpha=1$. Korzystając z równań stanu możemy rozwiązać równania struktury gwiazdy i otrzymać jej promień i masę zależnie od gęstości lub pędu Fermiego.

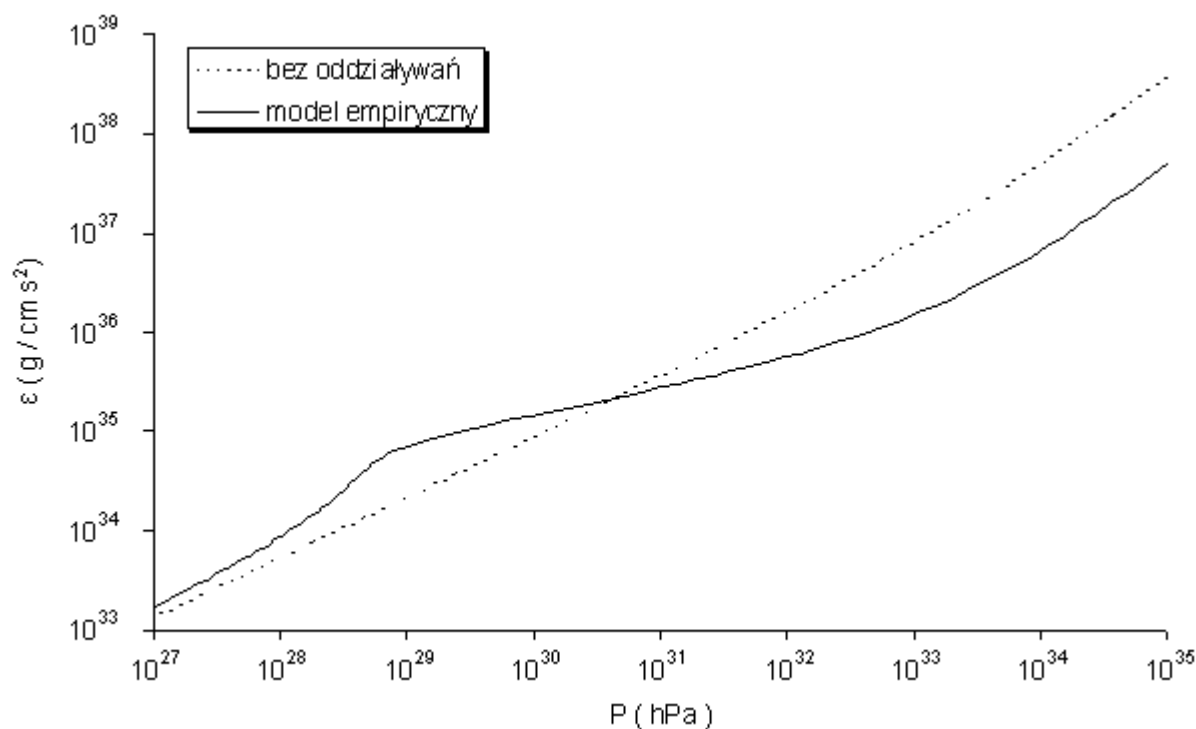


Rys. 22. Średnia energia wiązania na nukleon dla asymetrycznej materii ($\alpha=1$).

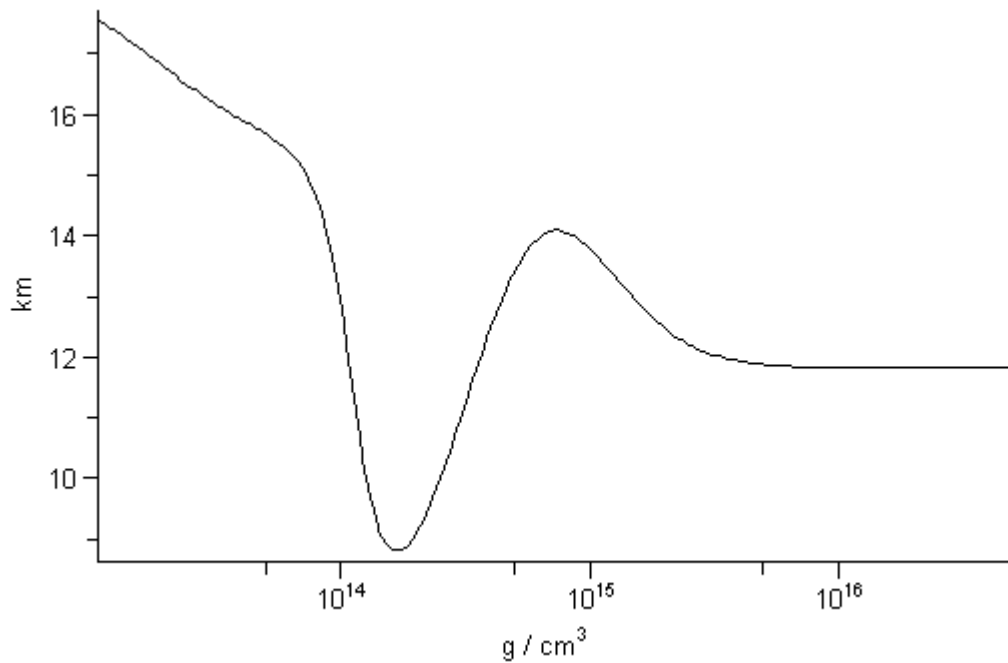


Rys. 23. Wykres ciśnienia dla asymetrycznej materii ($\alpha=1$).

Na wykresie Rys. 24. przedstawiono dwa równania stanu. Model nazwany „bez oddziaływań” odpowiada równaniom stanu dla „czystej” gwiazdy neutronowej omówionej w rozdziale 3.1. Dla ciśnienia poniżej 10^{29} hPa obserwujemy, że jego przyrost prowadzi do sporego przyrostu gęstości energii. Z kolei dla większych ciśnień widzimy, że gęstość energii rośnie dużo wolniej z przyrostem ciśnienia. Odpowiada to przyrostowi oddziaływań odpychających dla gęstości powyżej gęstości odpowiadających stanowi podstawowemu.

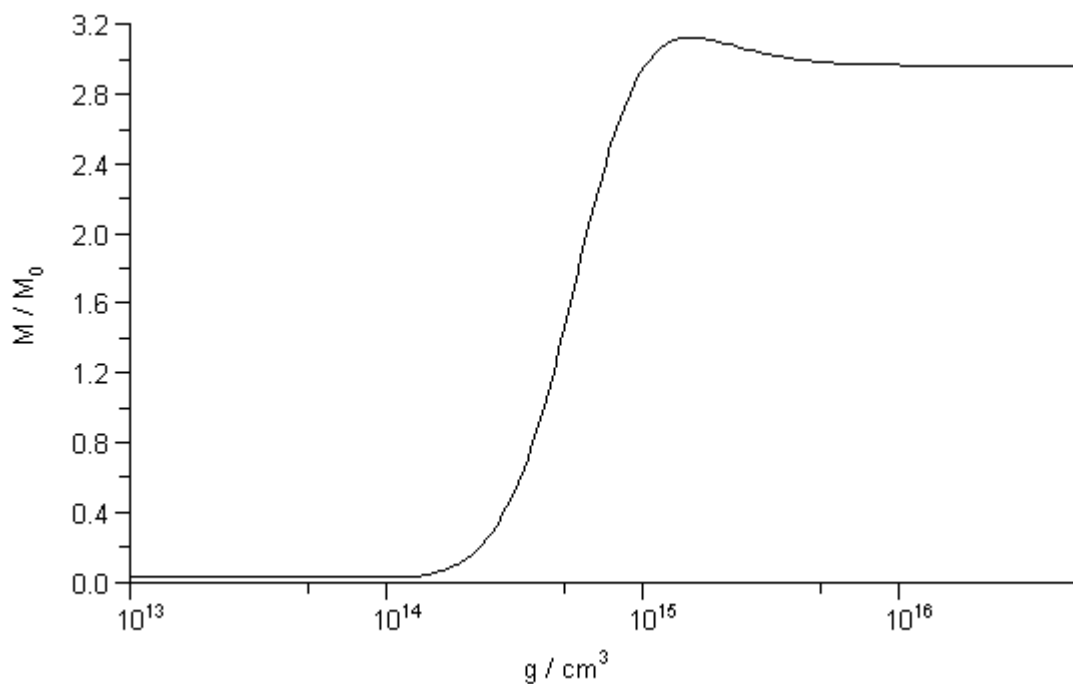


Rys. 24. Porównanie równania stanu z oddziaływaniami oraz bez oddziaływań.



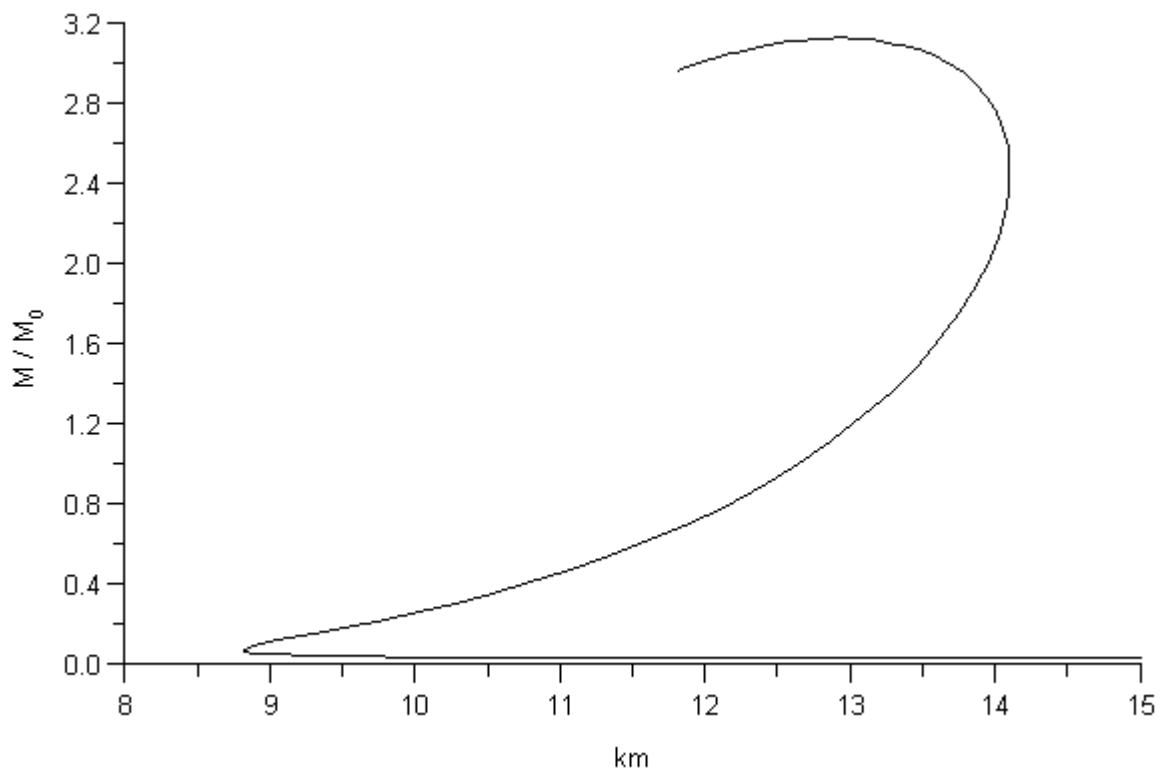
Rys. 25. Wykres promienia gwiazdy neutronowej przy zmianie gęstości centralnej.

Na wykresie Rys. 25. widzimy relację $R(\rho_c)$ otrzymaną dla omawianego modelu gwiazdy. Początkowo promień maleje wraz ze wzrostem gęstości. Dla gęstości około $2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ promień osiąga minimum w wysokości $8,1 \text{ km}$ po czym zaczyna rosnąć. Przy gęstości $7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ promień gwiazdy osiąga $14,1 \text{ km}$, po czym promień zaczyna maleć aby w końcu osiągnąć $11,8 \text{ km}$.



Rys. 26. Wykres masy gwiazdy neutronowej przy zmianie gęstości centralnej.

Na wykresie Rys. 26. widzimy otrzymaną relację $M(\rho_c)$. Dla gęstości poniżej $\rho_c \approx 1,5 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ masa gwiazdy utrzymuje się na stałym poziomie w wysokości około $0,03 M_0$. Po przekroczeniu tej wartości gęstości centralnej masa gwiazdy zaczyna rosnąć i dla gęstości $\rho_c \approx 1,7 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$ gwiazda osiąga maksymalną masę $3,13 M_0$. Następnie masa gwiazdy zaczyna maleć i dla gęstości powyżej 10^{16} g/cm^3 utrzymuje się na wysokości $2,966 M_0$.



Rys. 27. Relacja masa / promień dla czystej gwiazdy neutronowej z oddziaływaniami.

Maksymalna masa gwiazdy wynosi $3,13 M_0$ dla omawianego równania stanu masa ta występuje przy gęstości centralnej $\rho_c \approx 1,7 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$ gwiazda ma wtedy promień $12,8 \text{ km}$. Różnica mas między gwiazdą bez oddziaływań a z oddziaływaniami wynika z faktu, że równanie stanu jest o wiele „twardsze” dla gęstości powyżej równowagowej gęstości liczby nukleonów.

Oznacza to, że ciśnienie rośnie szybciej wraz ze wzrostem gęstości centralnej co zresztą widać na wykresie Rys. 24. Poniżej gęstości centralnej $\rho_c \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ promień gwiazdy maleje przy niezmięnionej masie. Wynika to z tego, że dla niskich gęstości centralnych gęstość energii rośnie szybko wraz ze wzrostem ciśnienia co widać na Rys. 24. w postaci guza. Niewielki przyrost ciśnienia pociąga za sobą duży przyrost gęstości energii. Poniżej $\rho_c \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ jedynym sposobem na zwiększenie gęstości centralnej jest zmniejszenie promienia gwiazdy przy prawie niezmięnionej masie. Stąd kształt wykresów Rys. 25. oraz Rys. 26. dla gęstości poniżej $\rho_c \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$. Zachowanie takie jest jednak niefizyczne gdyż dla gęstości poniżej gęstości jądrowej należy uwzględnić na przykład formowanie się sieci krystalicznej. Nie będziemy jednak rozważać takiej możliwości.

3.4. Wprowadzenie oddziaływań – parametryzacja Hartreego – Focka

Niniejsza część pracy będzie oparta o pracę [1]. Rozważany układ składać się będzie z protonów i neutronów, które będziemy opisywać przez fale płaskie:

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikx} \chi_S \chi_I \quad (3.4.1)$$

gdzie χ_S oraz χ_I to odpowiednio liczba stopni swobody dla spinu oraz izospinu odpowiednio. Zapiszmy równanie Hartreego – Focka:

$$\varepsilon_\alpha \varphi_\alpha = \hat{t} \varphi_\alpha(x) + \sum_{\alpha'} \int d^3 y \varphi_{\alpha'}^+(y) V(x, y) [\varphi_{\alpha'}(y) \varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(y) \varphi_{\alpha'}(x)] \quad (3.4.2)$$

gdzie suma $\sum_{\alpha'}$ przebiega po wszystkich zajętych stanach. Potencjał jest niezależny od spinu oraz izospinu zatem możemy podzielić powyższą sumę na część odpowiadającą neutronom i protonom:

$$\sum_{\alpha'} = \sum_{k, S}^{k_F^{(p)}} + \sum_{k, S}^{k_F^{(n)}} \quad (3.4.3)$$

Możemy wysumować wyrażenie (3.3.30) po stopniach swobody odpowiadających spinowi. Skoro liczba stopni swobody wynosi $g_s = 2s + 1$ zatem otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^{(p)} \varphi_k^{(p)}(x) = & \hat{t} \varphi_k^{(p)}(x) + (2s+1) \sum_{k'}^{k_F^{(p)}} \int d^3 y [\varphi_{k'}^{(p)*}(y) \varphi_{k'}^{(p)}(y)] V(x, y) \varphi_k^{(p)}(x) \\ & - \sum_{k'}^{k_F^{(p)}} \int d^3 y [\varphi_{k'}^{(p)*}(y) \varphi_k^{(p)}(y)] V(x, y) \varphi_{k'}^{(p)}(x) \\ & + (2s+1) \sum_{k'}^{k_F^{(n)}} \int d^3 y [\varphi_{k'}^{(n)*}(y) \varphi_{k'}^{(n)}(y)] V(x, y) \varphi_k^{(p)}(x) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Wyrażenie dla neutronów możemy otrzymać przez zamianę (p) na (n) oraz odpowiednio na odwrót. W omawianym modelu potencjał ma następującą postać:

$$V(x, y) = \delta^3(x - y) \left(\frac{1}{6} t_3 \eta - t_0 \right) \quad (3.4.5)$$

człon $t_3 \eta$ opisuje oddziaływania wielocząstkowe, które dominują dla dużych gęstości natomiast t_0 odpowiada oddziaływaniom dwucząstkowym. Przez η będziemy rozumieć gęstość barionową:

$$\eta = \eta_n + \eta_p \quad (3.4.6)$$

Otrzymujemy następującą relację opisującą energię pojedynczego protonu:

$$\varepsilon_k^{(p)} = \frac{k_p^2}{2m_p} + \left(\frac{1}{6} t_3 \eta - t_0 \right) \frac{1}{V} \left(\frac{N_p}{2} + N_n \right) \quad (3.4.7)$$

odpowiednie wyrażenie dla neutronu uzyskamy zamieniając indeksy p na n i na odwrot. Energia układu jest dana przez następujące wyrażenie:

$$E_{HF} = \frac{1}{2} \sum_i^{N_p} (\varepsilon_i^{(p)} + t_i) + \frac{1}{2} \sum_i^{N_n} (\varepsilon_i^{(n)} + t_i) \quad (3.4.8)$$

Obliczamy sumy i otrzymujemy:

$$E_{HF} = N_p \frac{3}{5} \frac{k_p^2}{2m_p} + N_n \frac{3}{5} \frac{k_n^2}{2m_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} t_3 \eta - t_0 \right) \frac{1}{V} \left(\frac{N_p^2}{2} + 2 N_p N_n + \frac{N_n^2}{2} \right) \quad (3.4.9)$$

W celu wyznaczenia wartości t_3 oraz t_0 należy skorzystać z faktu, że dla gęstości barionowej wynoszącej $\eta = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ zachodzi:

$$\frac{E_{HF}}{A} = BE = -16 \text{ MeV} \quad (3.4.10)$$

gdzie A to całkowita liczba nukleonów. Otrzymujemy następujące wartości parametrów t_3 oraz t_0 :

$$t_3 = 14600,8 \text{ MeV fm}^6 \quad (3.4.11)$$

$$t_0 = 1024,1 \text{ MeV fm}^3 \quad (3.4.12)$$

Jak to zostało zapisane wcześniej będziemy rozważać jedynie „czyste” gwiazdy neutronowe. Zatem zapiszmy, że $N_p = 0$. Stąd gęstość energii dla „czystej” gwiazdy neutronowej dla omawianego modelu oddziaływań ma następującą postać:

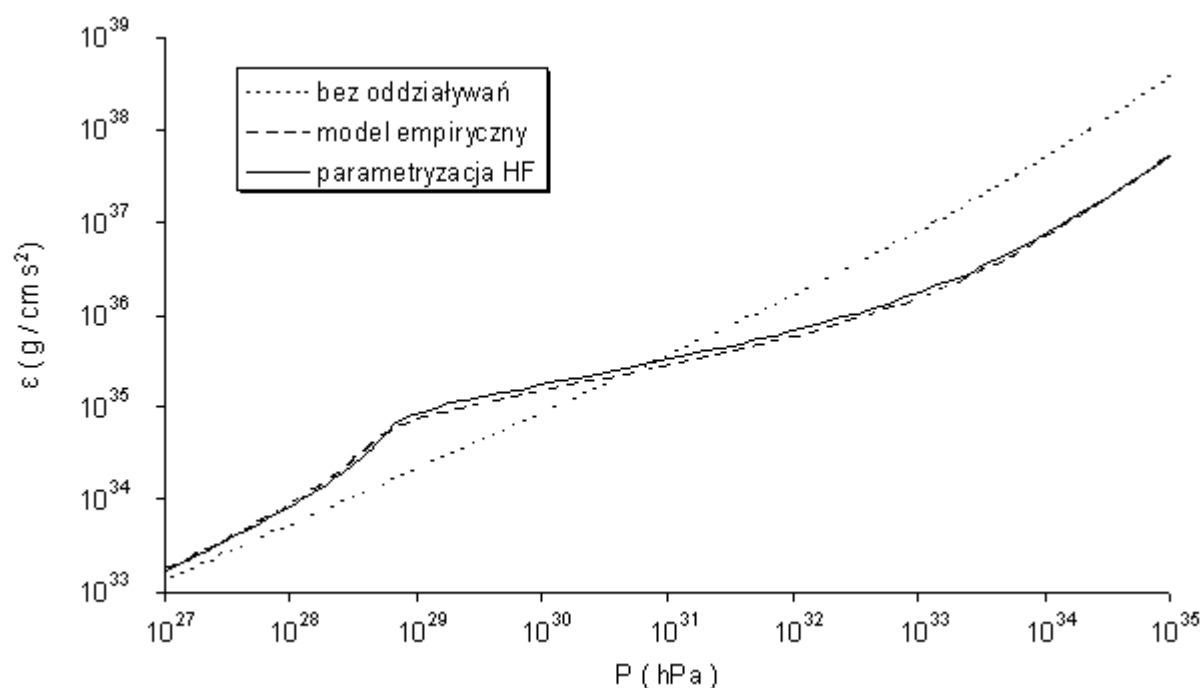
$$\varepsilon(\eta) = m_n c^2 \eta + \frac{3}{10 m_n} (3 \pi^2 \hbar^3)^{2/3} \eta^{5/3} + \frac{t_3}{24} \eta^3 - \frac{t_0}{4} \eta^2 \quad (3.4.13)$$

Następnie obliczamy ciśnienie dzięki relacji (3.3.16) i otrzymujemy:

$$P(\eta) = \frac{2}{10 m_n} (3 \pi^2 \hbar^3)^{2/3} \eta^{5/3} + \frac{t_3}{12} \eta^3 - \frac{t_0}{4} \eta^2 \quad (3.4.14)$$

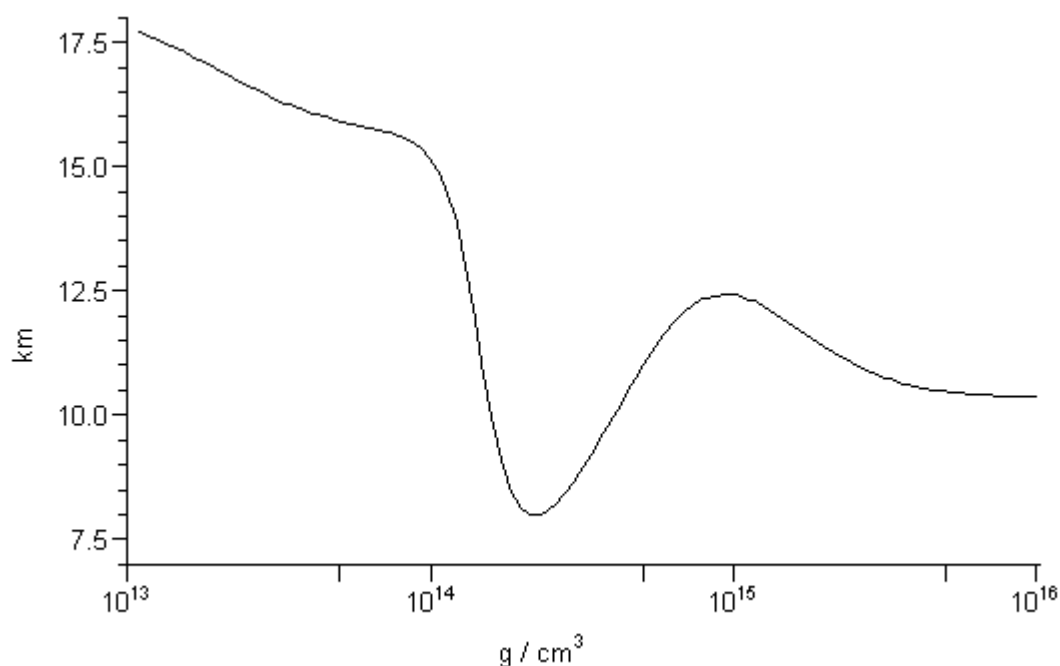
Otrzymujemy także wartość ściśliwości materii jądrowej dla symetrycznej materii:

$$K(\eta_0) = 9 \left[\frac{dP(\eta)}{d\eta} \right]_{\eta=\eta_0} = 376,4 \text{ MeV} \quad (3.4.15)$$

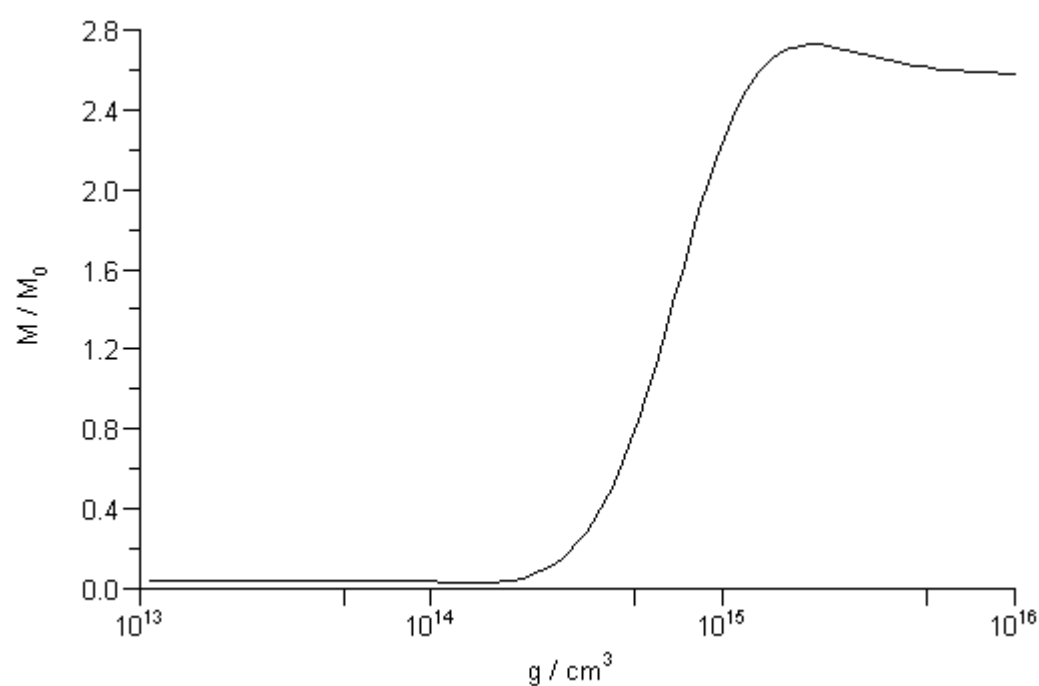


Rys. 28. Porównanie równań stanu z oddziaływaniami oraz bez oddziaływań.

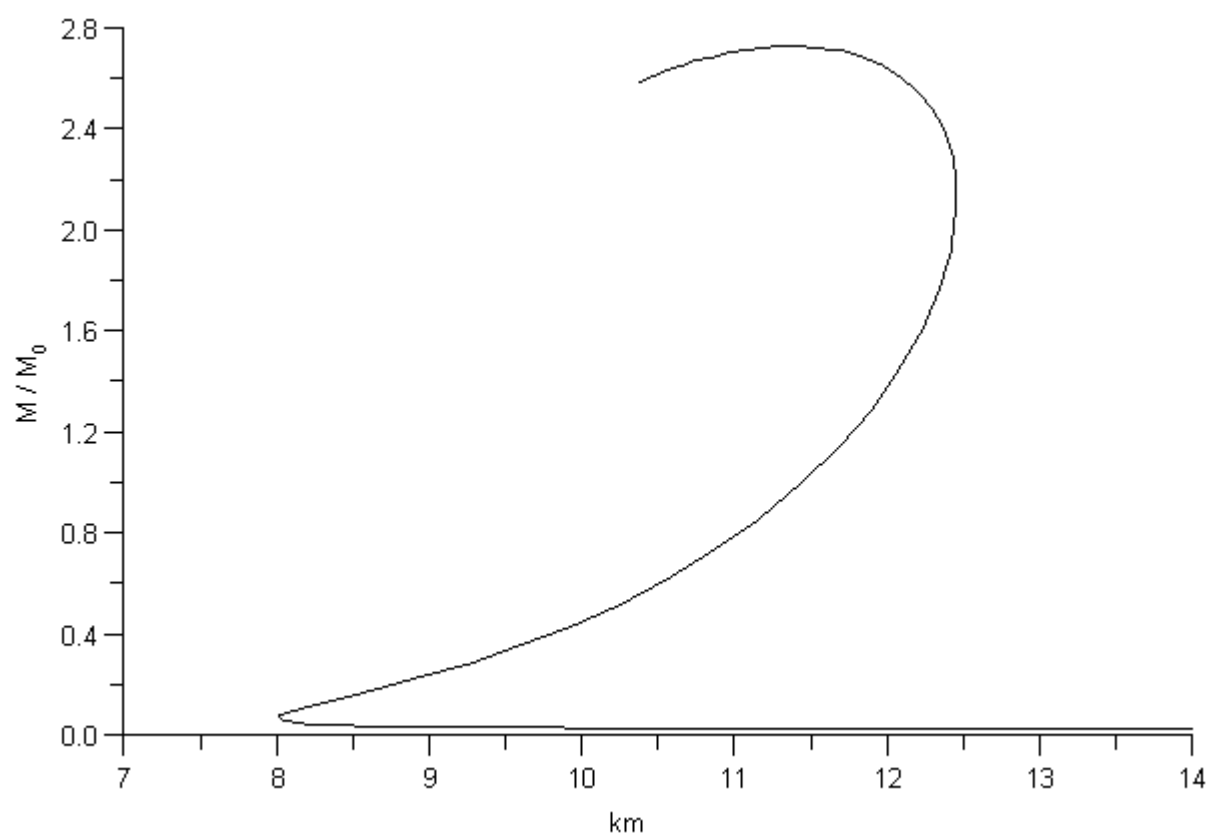
Wykres Rys. 28. przedstawia trzy równania stanu. Pierwsze dwa równania zostały omówione w poprzednim rozdziale, natomiast relacja oznaczona jako „parametryzacja HF” odpowiada równaniom stanu wprowadzonym w niniejszym rozdziale. Widzimy stosunkowe podobieństwo przedstawionej relacji do modelu empirycznego. Podobnie jak w tamtym przypadku poniżej wartości ciśnienia 10^{29} hPa obserwujemy, że jego przyrost powoduje duży przyrost gęstości energii. Dla ciśnień większych niż 10^{29} hPa , przyrost ciśnienia powoduje mniejszy przyrost gęstości energii.



Rys. 29. Wykres promienia gwiazdy neutronowej przy zmianie gęstości centralnej.



Rys. 30. Wykres masy gwiazdy neutronowej przy zmianie gęstości centralnej.



Rys. 31. Relacja masa / promień dla czystej gwiazdy neutronowej z oddziaływaniami.

Wykresy Rys. 29., Rys. 30. oraz Rys. 31. przedstawiają odpowiednio otrzymane relacje $R(\rho_c)$, $M(\rho_c)$ oraz relację masa / promień dla omawianego modelu oddziaływań. Najbardziej masywna gwiazda ma masę $2,71 M_0$ oraz promień $11,46 km$ przy gęstości centralnej $2,3 \cdot 10^{15} g/cm^3$. W porównaniu z empirycznym modelem oddziaływań dla którego wyniki były następujące: $3,12 M_0$ dla gwiazdy o promieniu $12,8 km$ przy gęstości centralnej $\rho_c \approx 1,7 \cdot 10^{15} g/cm^3$. Widzimy że gwiazda dla parametryzacji Hartreego – Focka ma mniejszą masę niż dla parametryzacji empirycznej. Aby zastanowić się dlaczego tak jest, należy rozważyć postać gęstości energii oraz ciśnienia dla dużych gęstości w obu przypadkach. Z postaci zależności (3.3.27) oraz (3.3.41) możemy zapisać, że dla dużych gęstości ρ_c zachodzi:

$$\frac{\varepsilon}{\eta} \approx \lambda u^\delta \quad (3.4.16)$$

przy czym dla empirycznego modelu oddziaływań $\lambda = 21 MeV$ natomiast $\delta = 2,112$. Parametry te w modelu Hartreego – Focka są nieco inne $\lambda = 15,6 MeV$ natomiast $\delta = 2$. Ciśnienie z kolei ma postać:

$$P \approx (k-1)\varepsilon \quad (3.4.17)$$

Gdzie k wynosi $3,112$ oraz 3 dla modelu empirycznego oraz Hartreego – Focka odpowiednio. Stąd widzimy, że model empiryczny ma nieco „twardsze” równania stanu zatem jasne staje się dlaczego maksymalna masa gwiazdy jest większa w tym przypadku.

4. Stabilność gwiazd

W omawianych wcześniej rozdziałach rozwiązywaliśmy zagadnienia masy oraz promienia gwiazd. Aby znaleźć te charakterystyki obieraliśmy odpowiednie równania struktury a następnie uzupełnialiśmy układ równań o równania stanu. Równania struktury gwiazdy wynikają z założenia przebywania ich w stanie równowagi. Badanie stabilności stanu równowagi może być oparte o różne kryteria. Przykładem może być analiza energii jakiej odpowiada dana konfiguracja. Metoda ta polega na powiązaniu stanu równowagi z ekstremum energii danej konfiguracji. Jeżeli stan ten odpowiada lokalnemu minimum, wtenczas mówimy o stabilnej równowadze. Jeżeli natomiast stan równowagi odpowiada lokalnemu maksimum energii, wtenczas równowaga jest niestabilna. Innym sposobem sprawdzenia czy dana konfiguracja jest stabilna czy nie jest analiza zaburzeń układu. Jeżeli amplituda małych zaburzeń wyprowadzających układ ze stanu równowagi zanika wraz z upływem czasu mówimy o równowadze stabilnej. Jeżeli natomiast amplituda zaburzeń rośnie wtenczas stan równowagi jest niestabilny. W rozdziale 4.2. pokażemy, że zależność takich zaburzeń od czasu można przedstawić w następującej postaci:

$$\xi(r, t) = \xi(r) e^{i\omega t}$$

jak również otrzymamy następujące kryterium stabilności gwiazdy

$$\omega^2 > 0$$

będziemy mówić, że równowaga konfiguracji jest stabilna przy spełnieniu powyższego kryterium. Jeżeli natomiast zachodzi:

$$\omega^2 < 0$$

stan równowagi jest niestabilny. Równowagę taką nazywamy równowagą dynamiczną. Istnieją także inne kryteria dzięki, którym badamy stabilność położań równowagi. Przykładem może być kryterium stabilności wibracyjnej. Jest to kryterium badające stabilność konfiguracji ze względu na procesy dyssypacji energii. Jednakże procesy dyssypacji energii w badanych gwiazdach są niewielkie, z tego względu nie będziemy omawiać dokładniej tego kryterium.

4.1. Masa krytyczna

Wprowadzimy pierwsze kryteria stabilności gwiazdy zwartej najpierw mniej formalnie w celu zobrazowania czytelnikowi jakie procesy mają największy wpływ na stabilność gwiazdy. W następnym rozdziale zajmiemy się bardziej formalnym opisem kryterium stabilności gwiazdy. Należy zauważyć, że w poprzednich rozdziałach korzystaliśmy z równowagi gwiazd wprowadzając równanie równowagi hydrodynamicznej z teorii grawitacji Newtona (1.2.5) lub równanie Oppenheimera - Volkoffa (1.3.11). Równania owe były wprowadzane w celu obliczenia promienia oraz masy gwiazdy. Teraz natomiast wykorzystamy równanie równowagi hydrodynamicznej w celu pokazania pierwszego warunku, dzięki któremu stwierdzimy, czy dana konfiguracja jest stabilna czy też nie. Równanie równowagi hydrodynamicznej sprowadza się w Newtonowskiej teorii grawitacji do postaci:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{\rho(r)m(r)}{r^2} \quad (4.1.1)$$

Zastanówmy się teraz nad radialnymi oscylacjami w gwieździe. Z postaci równania (4.1.1) widzimy, że jeżeli ciśnienie P się zmienia masa $m(r)$ także musi ulegać odpowiednim modyfikacjom, aby gwiazda pozostawała w stanie równowagi. Konkretniej: jeżeli ciśnienie w centrum gwiazdy rośnie $P_c' = P_c + \delta P_c$ to masa także musi wzrosnąć. Jeżeli tak się nie stanie to gwiazda będzie się rozszerzać aż osiągnie stan równowagi. Jeżeli z kolei ciśnienie centralne spada $P_c' = P_c - \delta P_c$ to masa także powinna spadać. Jeżeli spadkowi ciśnienia centralnego nie towarzyszy odpowiedni spadek masy gwiazda zapada się. Stąd otrzymujemy pierwsze kryterium stabilności gwiazdy:

$$\frac{dM}{dP_c} > 0 \quad (4.1.2)$$

W praktyce skorzystamy jednak z faktu, że wszystkie omawiane przez nas równania stanu charakteryzowały się wzrostem ciśnienia przy wzroście gęstości i zamienimy powyższy warunek na następujący:

$$\frac{dM}{d\rho_c} > 0 \quad (4.1.3)$$

dzięki czemu z łatwością możemy odczytać z wykresów masy $M(\rho_c)$ czy dana konfiguracja jest stabilna czy nie.

4.2. Częstości własne

W celu dokładniejszego zbadania stabilności gwiazdy oraz bardziej formalnego uzasadnienia wprowadzenia kryterium z poprzedniego rozdziału należy zapoznać się z metodami heliosejsmologii. We wnętrzu gwiazdy mogą rozchodzić się fale ciśnienia bądź fale grawitacyjne. W niniejszej pracy nie będziemy rozważać propagacji fal grawitacyjnych. W celu zapoznania się z tym tematem czytelnik może znaleźć wprowadzenie do propagacji fal grawitacyjnych w pracy [5]. Rozważmy natomiast propagację fal ciśnienia w gwiazdzie oraz to czy mogą się one rozchodzić zawsze czy też muszą one spełniać pewne przesłanki. Dla prostoty zastanówmy się najpierw nad modelem jednowymiarowym a następnie rozszerzymy go do modelu trójwymiarowego. Niech warstwy materii znajdując się na początku w położeniu równowagi są w pozycji x oraz w $x+dx$. Niech $\xi(x, t)$ oznacza przemieszczenie w czasie płaszczyzny, której pozycja początkowa była w x . Po przemieszczeniu płaszczyzny zajmują zatem pozycje odpowiednio $x+\xi(x, t)$ oraz $x+dx+\xi(x+dx, t)$. Stąd szerokość warstwy zmieniła się z dx do $(1+\partial\xi/\partial x)dx$. Skoro szerokość warstwy się zmienia to gęstość materii znajdującej się w środku warstwy także musi się zmieniać. Jednakże na mocy prawa zachowania masy całkowita masa gwiazdy musi pozostać stała

$$M = \int d^3x \rho_0(x, t) = \int d^3x' \rho'(x', t) \quad (4.2.1)$$

Jakobian transformacji jest następujący $J = dx'/dx$. Następnie analizując oscylacje gwiazdy wygodnie jest zdefiniować nieskończenie małą zmianę dowolnej wielkości $Q(x, t)$ jako

$$\delta Q = Q(x + \xi(x, t), t) - Q_0(x, t) \quad (4.2.2)$$

Korzystając z definicji (4.2.2) oraz z prawa zachowania masy (4.2.1) możemy wyprowadzić następującą relację

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \left[\frac{\rho'(x, t) - \rho(x)}{\rho(x)} \right] = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (4.2.3)$$

Następnie jeżeli transport ciepła między warstwami jest zaniedbywany to możemy przyjąć, że równanie stanu ma następującą postać

$$P = K \rho^\Gamma \quad (4.2.4)$$

Wtenczas działając operacją infinitesimalną δ jak operatorem różniczkowania możemy pokazać, że fluktuacje ciśnienia oraz fluktuacje gęstości są połączone następującą relacją

$$\frac{\delta P}{P} = \Gamma \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (4.2.5)$$

gdzie Γ to stosunek izobarycznego ciepła właściwego do ciepła właściwego izochorycznego. Element masy m zawarty w objętości $S dx$ poruszający się z prędkością v podlega równaniu Newtona

$$m \frac{dv}{dt} = F = dP S \quad (4.2.6)$$

Ponieważ $m = \rho S dx$ równanie to można napisać w następującej postaci

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \quad (4.2.7)$$

Podziałamy operacją δ na równanie (4.2.7). Zauważmy, że dla prędkości v zachodzi

$$\delta v = v(x + \xi, t) - v(x, t) = \frac{d}{dt}(x + \xi) - \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (4.2.8)$$

Korzystając z powyższej zależności oraz z relacji (4.2.5) otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\Gamma P}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (4.2.9)$$

Jeżeli gwiazda składa się z idealnego klasycznego gazu to gradient ciśnień spełnia następujące równanie

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{P}{H} \quad (4.2.10)$$

gdzie $H = kT/mg$. Wielkość g oznacza stałe przyspieszenie odpowiadające sile grawitacyjnej gwiazdy. Nas jednak interesuje zbadanie oscylacji w centrum gwiazdy gdzie ciśnienie jest stałe. Stąd zależność (4.2.9) sprowadza się do postaci

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\Gamma P}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (4.2.11)$$

Porównując powyższe równanie z równaniem falowym (4.2.19) otrzymujemy następującą definicję prędkości dźwięku:

$$c_s = \sqrt{\frac{\Gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (4.2.12)$$

lub przyjmując, że zachodzi $\varepsilon = c^2 \rho$ otrzymujemy

$$\frac{c_s^2}{c^2} = \frac{dP}{d\varepsilon} \quad (4.2.13)$$

Równanie (4.2.11) sprowadza się zatem do postaci

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (4.2.14)$$

Następnie postaramy się rozszerzyć model do modelu trójwymiarowego. Oczywiście spełnione jest prawo zachowania masy (4.2.1). Jakobian przejścia jest następujący

$J = \det(\partial x' / \partial x) = 1 + \partial_i \xi^i$, gdzie $\partial_i = \partial / \partial x^i$. Zatem zachodzi relacja

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = -\partial_i \xi^i \quad (4.2.15)$$

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym jest spełnione równanie Newtona

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \partial_i P \quad (4.2.16)$$

Postępujemy analogicznie jak w przypadku jednowymiarowym oraz korzystamy z relacji (4.2.5) i (4.2.15). Otrzymujemy następującą relację

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \partial_i [\Gamma P(\partial_j \xi^j)] \quad (4.2.17)$$

Tak jak to było w przypadku jednowymiarowym interesuje nas opis oscylacji w centrum gwiazdy zatem $\partial_i P = 0$ dla dowolnego i . Jak również zachodzi $\partial_j \xi^j = 0$ dla $i \neq j$. Stąd korzystając z definicji prędkości dźwięku (4.2.12) otrzymujemy

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial t^2} = \partial_i^2 \xi^i \quad (4.2.18)$$

Przy czym indeksy $\partial_i^2 \xi^i$ nie oznaczają tutaj sumowania. Możemy zatem zapisać, że ξ spełnia równanie falowe

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \Delta \xi = 0 \quad (4.2.19)$$

Zagadnienie jest podobne do problemu atomu wodoru. Możemy postąpić podobnie jak w tamtym przypadku i przejść do współrzędnych sferycznych w celu rozdzielenia zmiennych. Wtenczas przez operator Laplace'a Δ będziemy rozumieli

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (4.2.20)$$

Zmienne da się rozdzielić dzięki następującemu podstawieniu

$$\xi = R(r) Y(\vartheta, \varphi) e^{i\omega t} \quad (4.2.21)$$

Gdzie $Y(\vartheta, \varphi)$ to harmoniki sferyczne, które w tym przypadku opisują kształt oscylacji.

Czytelnik mógłby znaleźć postać harmonik w tablicach, przypomnijmy jednak ich postać:

$$Y_l^m(x, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \left[\frac{(x^2-1)^l}{2^l l!} \right] e^{im\varphi} \quad (4.2.22)$$

Gdzie $x = \cos \vartheta$. Podobnie jak było w przypadku atomu wodoru także i tutaj rozwiązania będą numerowane przez liczby całkowite, mianowicie n , l oraz m . Pamiętamy z zagadnienia atomu wodoru, że wartość m jest ograniczona, mianowicie $m = \{-l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l\}$. Jednakże w przypadku l nie ma już ograniczenia na jego wartość $l = \{0, 1, \dots, n-1\}$. W przypadku opisu oscylacji l może być dowolnie duże. Kiedy $l=0$ mówimy, że mamy do czynienia z modami radialnymi. Przyjęliśmy postać $\xi(t, r, \vartheta, \varphi)$ dzięki czemu otrzymaliśmy rozwiązania równania (4.2.19) ze względu na t , ϑ oraz φ . Pozostaje nam jednak do rozwiązania część radialna

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\omega^2}{c_s^2} \right] R = 0 \quad (4.2.23)$$

W celu dalszego uproszczenia zagadnienia wprowadza się wielkość zwaną poprzeczną liczbą falową

$$k_r = \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (4.2.24)$$

Widzimy, że wtenczas wyrażenie (4.2.23) znacznie się upraszcza

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} R = 0 \quad (4.2.25)$$

gdzie $\omega_c = c_s \sqrt{k_r}$. Wprowadzona wielkość ω_c jest minimalną częstotliwością propagacji fal ciśnienia w gwieździe. Rozwiązaniem zależności (4.2.25) jest

$$u(x) = C e^{ikx} \quad (4.2.26)$$

przy czym k jest następującej postaci

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2}} \quad (4.2.27)$$

Otrzymaliśmy zatem warunek na minimalną wartość częstotliwości aby zachodziła propagacja fal ciśnienia w gwieździe

$$\omega^2 > \omega_c^2 \quad (4.2.28)$$

Nas jednak interesują wyłącznie oscylacje radialne. Liczba $l=0$, stąd także $m=0$. Wtenczas $\omega_c=0$ z kolei harmonika sferyczna dla tej wartości l jest stała i wynosi

$$Y_0^0 = 1/\sqrt{4\pi}.$$

Dla otrzymanych wartości własnych możemy zapisać następującą relację:

$$\omega_0^2 < \omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots \quad (4.2.29)$$

zapiszmy, że ω_0 odpowiada podstawowym modom oscylacji. Jak widzieliśmy poprzednio istnieje pewna wartość graniczna, poniżej której oscylacje nie występują. Zatem na tej podstawie w przypadku trójwymiarowym zapiszmy wartość graniczną dla częstości:

$$\omega_0^2 \geq 0 \quad (4.2.30)$$

Jest to kryterium stabilności gwiazdy. Wszystkie mody, dla których powyższa relacja nie jest spełniona powodują niestabilność gwiazdy.

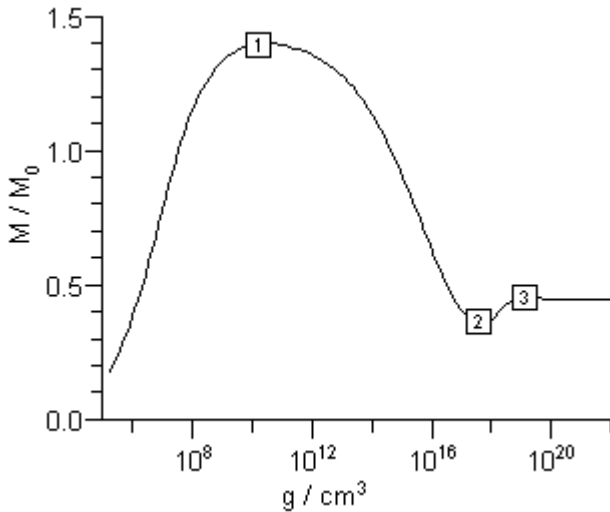
Kryterium (4.2.30) jest powiązane z miejscami ekstremalnymi w zależnościach $M(\rho_c)$ oraz $R(\rho_c)$. Można pokazać, że punkty gdzie zachodzi:

$$\frac{dM(\rho_c)}{d\rho_c} = 0 \quad (4.2.31)$$

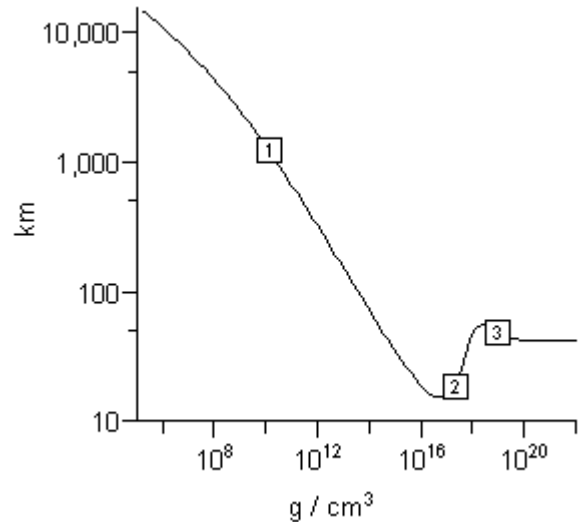
Odpowiadają miejscom gdzie wartości własne mają miejsca zerowe $\omega_n^2(\rho_c) = 0$.

Przy czym w miejscach gdzie $dR(\rho_c)/d\rho_c < 0$ znak zmieniają parzyste mody $\omega_{2k}^2 \rightarrow -\omega_{2k}^2$.

Natomiast jeżeli punkt ten odpowiada miejscu gdzie $dR(\rho_c)/d\rho_c > 0$ znak zmieniają mody nieparzyste $\omega_{2k+1}^2 \rightarrow -\omega_{2k+1}^2$. Omówimy ten mechanizm na przykładzie wyników otrzymanych dla białego karła. Przyjrzyjmy się wynikom jeszcze raz.



Rys. 32. Otrzymany wcześniej wykres masy gwiazdy dla różnych wartości gęstości centralnej. Na wykresie zaznaczono punkty krytyczne spełniające kryterium $dM/d\rho_c = 0$.



Rys. 33. Otrzymany wcześniej wykres promienia gwiazdy przy zmianie gęstości centralnej. Na wykresie zaznaczono punkty odpowiadające punktom krytycznym na wykresie $M(\rho_c)$.

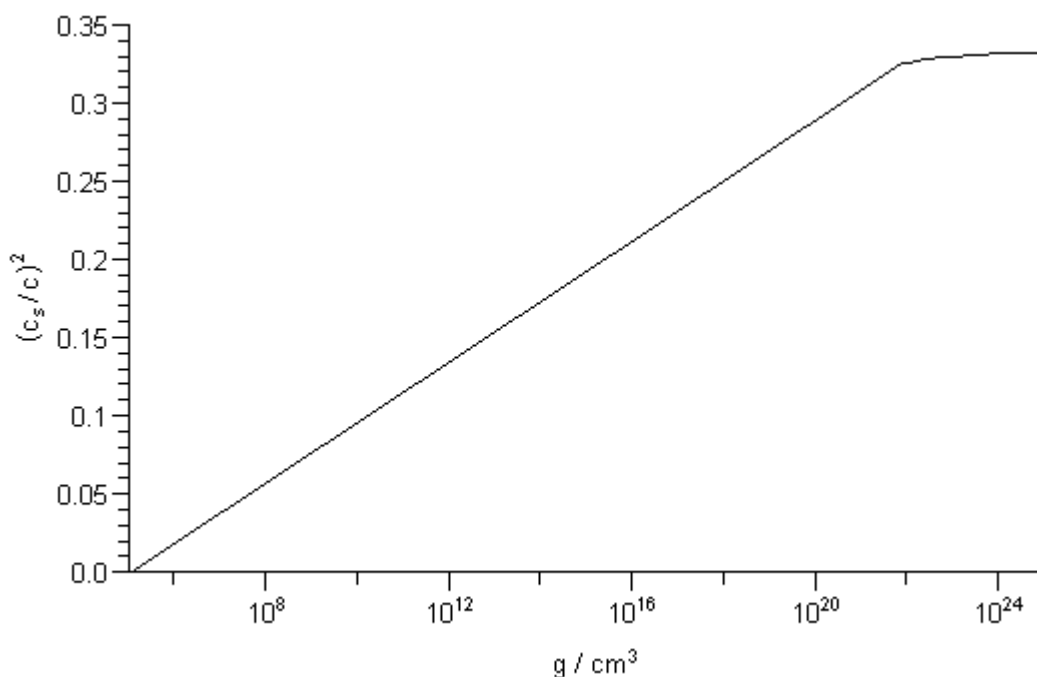
Na powyższych wykresach zaznaczono punkty krytyczne w których gwiazda zmienia swoją stabilność. Pierwszy punkt krytyczny gdzie $dM/d\rho_c=0$ występuje dla gęstości centralnej $1,25 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$. Wszystkie konfiguracje o gęstości centralnej poniżej tej gęstości są stabilne. W pierwszym punkcie krytycznym zachodzi $dR(\rho_c)/d\rho_c < 0$ zatem $\omega_0^2 \rightarrow -\omega_0^2$, stąd gwiazdy dla gęstości centralnych większych niż $1,25 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$ są niestabilne. Kolejny punkt krytyczny występuje dla gęstości centralnej $\rho_c \approx 3,76 \cdot 10^{17} \text{ g/cm}^3$. Tym razem jednak $dR(\rho_c)/d\rho_c > 0$ czyli znak zmienia mod nieparzysty: $\omega_1^2 \rightarrow -\omega_1^2$. Kolejny punkt krytyczny występuje dla $\rho_c \approx 1,3 \cdot 10^{19} \text{ g/cm}^3$ gdzie promień gwiazdy maleje wraz ze wzrostem gęstości centralnej. Skoro ω_1^2 jest ujemne to na mocy (4.2.29) znak musi zmieniać ω_2^2 .

4.3. Prędkość dźwięku

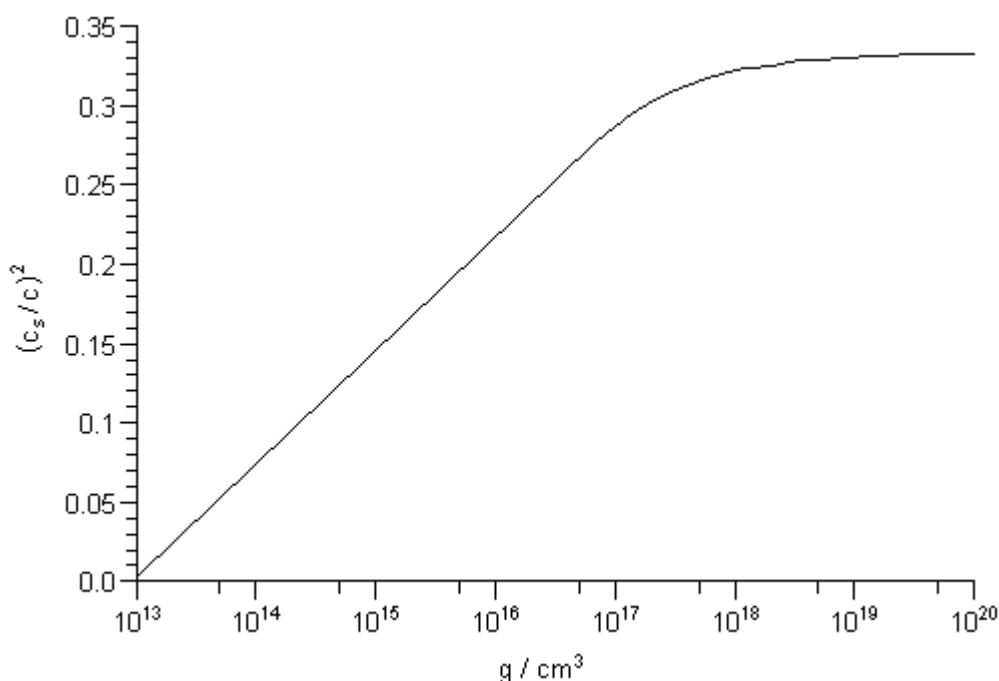
Kolejnym ważnym kryterium brany pod uwagę w celu sprawdzenia czy dana konfiguracja jest stabilna czy nie, jest kryterium przyczynowości. W przypadku badanych gwiazd kryterium przyczynowości sprowadza się do warunku stwierdzającego czy prędkość dźwięku jest większa czy mniejsza od prędkości światła. Prędkość dźwięku c_s wyznaczmy dzięki adiabatycznej zależności:

$$\left(\frac{c_s}{c}\right)^2 = \frac{dP}{d\varepsilon} \quad (4.3.1)$$

Zatem powyższy iloraz nie powinien przekraczać jedności. Poniżej wykresy obrazujące kryterium przyczynowości dla gwiazd omawianych wcześniej.



Rys. 34. Prędkość dźwięku jako funkcja gęstości dla białego karła. Dla dużych gęstości widzimy, że stosunek dąży do $1/3$. Co jest konsekwencją ultrarelatywistycznego równania stanu dla dużych gęstości.

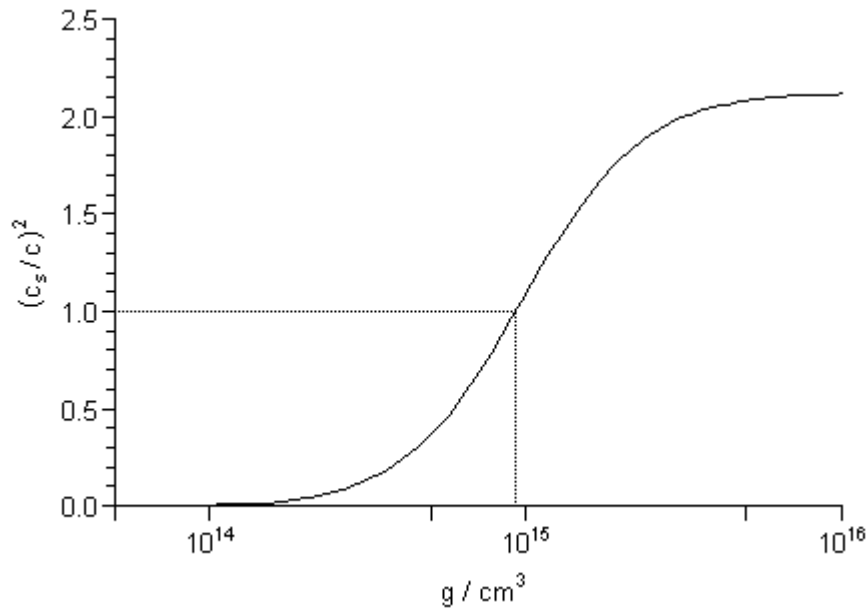


Rys. 35. Stosunek prędkości dźwięku do prędkości światła. Wykres otrzymany dla „czystej” gwiazdy neutronowej bez uwzględnienia w równaniach stanu oddziaływań. Relacja dąży do $1/3$ dla dużych gęstości.

Na wykresach Rys. 34. oraz Rys. 35. widzimy relację (4.3.1) odpowiednio dla białego karła oraz „czystej” gwiazdy neutronowej bez oddziaływań. Należy zauważyć, że w obu przypadkach prędkość dźwięku rośnie wraz z rosnącą gęstością. W obu przypadkach wartość ilorazu nie przekracza $1/3$. A zatem zasada przyczynowości nie jest złamana. W takim razie kryterium przyczynowości nie wykazuje niestabilności położenia równowagi. Wartość graniczna $1/3$ wynika z faktu, że dla dużych gęstości oba równania stanu, odpowiadające zarówno białemu karłowi jak również „czystej” gwiazdzie neutronowej bez oddziaływań można przybliżyć przez równanie stanu dla materii składającej się z ultrarelatywistycznych cząstek:

$$P = \frac{1}{3} \varepsilon \quad (4.3.2)$$

Zatem jasne staje się dlaczego relacje dążą do $1/3$ dla dużych gęstości. Sprawdźmy jeszcze jak wyglądają analogiczne relacje dla modeli gwiazd neutronowych z oddziaływaniami. Mianowicie dla empirycznego modelu oddziaływań oraz parametryzacji Hartreego – Focka. Rezultaty są przedstawione na wykresach Rys. 36. - Rys. 40.

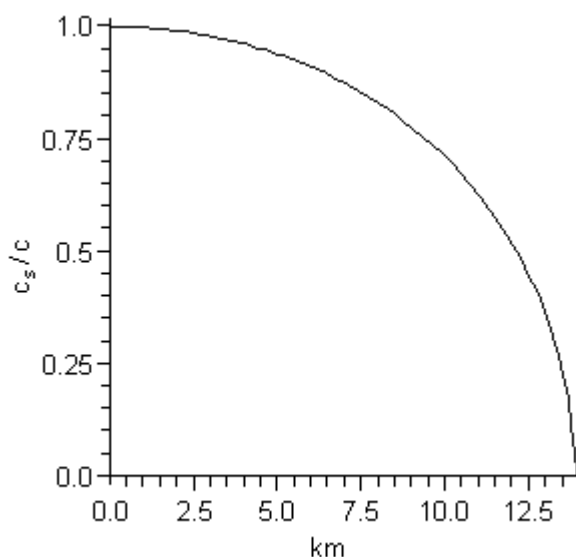


Rys. 36. Relacja (4.3.1) dla empirycznego modelu oddziaływań dla materii w gwiazdzie neutronowej. Wartość iloczynu przekracza jedność dla gęstości powyżej $9,2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ zatem zachodzi złamanie zasady przyczynowości dla gęstości powyżej tej granicy.

Wykres Rys. 36. przedstawia kwadrat stosunku prędkości dźwięku do prędkości światła. Powyżej gęstości $9,2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ zachodzi złamanie zasady przyczynowości. Dzieje się tak z powodu faktu, że równanie stanu dla opisywanego modelu oddziaływań dla dużych gęstości dąży do postaci:

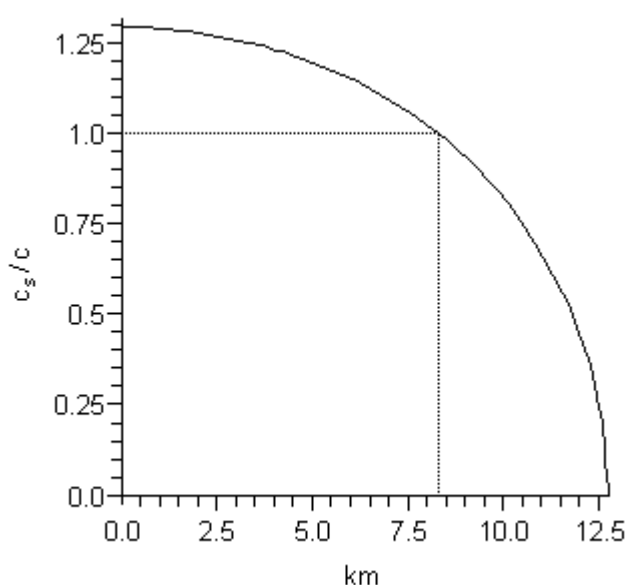
$$P = 2,112 \varepsilon \quad (4.3.3)$$

Stąd widzimy, że opisywany stosunek powinien dążyć do 2,112 dla dużych gęstości. Przypomnijmy, że dla niniejszego modelu oddziaływań maksymalna masa gwiazdy jaką otrzymaliśmy wynosiła $3,13 M_0$. Konfiguracja miała tę masę dla gęstości centralnej $\rho_c \approx 1,7 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Dla przypomnienia promień gwiazdy wynosił $12,8 \text{ km}$. Widzimy, że gęstość centralna przekracza w tym przypadku granicę otrzymaną dla warunku przyczynowości, zatem konfiguracja ta jest niestabilna. Wyznamy masę maksymalną gwiazdy biorąc pod uwagę kryterium przyczynowości. Korzystając z wyników wcześniejszych obliczeń na przykład z wykresu Rys. 26. widzimy, że gwiazda będzie miała największą masę dla gęstości centralnej $9,2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$. Masa gwiazdy wynosi wtenczas $2,859 M_0$, natomiast promień gwiazdy jest następujący $13,94 \text{ km}$. Możemy również uzyskać wykres prędkości dźwięku wewnątrz gwiazdy. Wspomniane wykresy umieszczono poniżej.



Rys. 37. Prędkość dźwięku wewnątrz gwiazdy o gęstości centralnej $\rho_c \approx 9,2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$. Widzimy spadek prędkości dźwięku wraz z promieniem. Wynika to ze spadku gęstości wraz z promieniem. Jak widzieliśmy na poprzednich wykresach prędkość dźwięku rośnie wraz z gęstością.

Na wykresie Rys. 37. przedstawiono zależność prędkości dźwięku od promienia w gwiazdzie. Widzimy spadek wartości prędkości dźwięku wraz ze wzrostem promienia. Profile gęstości $\rho(r)$ przedstawione w rozdziałach 2.2. oraz 3.1. wyjaśniają ten fakt. Wraz ze wzrostem promienia w gwiazdzie maleje gęstość, zatem i prędkość dźwięku powinna maleć. Zależność przedstawiona na wykresie Rys. 37. jest wyznaczona dla gęstości centralnej $\rho_c = 9,2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$, która jak już napisaliśmy wcześniej nie łamie zasady przyczynowości. Wykreślmy jeszcze jeden wykres dla gęstości centralnej powyżej $9,2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$. Wykres będzie dla gęstości centralnej $1,7 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$, gęstość ta odpowiada gwiazdzie, którą wcześniej uznaliśmy za gwiazdę o największej dopuszczalnej masie $M \approx 3,13 M_0$ oraz promieniu $12,8 \text{ km}$.



Rys. 38. Prędkość dźwięku dla gwiazdy o gęstości centralnej $\rho_c = 1,7 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Widzimy podział gwiazdy na dwie części. Jedną dla, której gęstość jest mniejsza niż $9,2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$, wtenczas prędkość dźwięku jest mniejsza od prędkości światła. Oraz drugą dla większych gęstości gdzie złamana jest zasada przyczynowości.

Wykres Rys. 38. przedstawia prędkość dźwięku dla gwiazdy neutronowej, w której zastosowano empiryczny model oddziaływań i narzucono gęstość centralną $\rho_c = 1,7 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Gwiazda dzieli się na dwa obszary. Mianowicie na obszar, który spełnia kryterium przyczynowości oraz na obszar, który warunek ten łamie. W celu zlikwidowania łamania przyczynowości można ograniczyć przedział badanych gęstości bądź też wprowadzić poprawki do modelu oddziaływań. Przykład takich poprawek autorzy przedstawili w pracy [4].

Stosunkowo podobnie problem przyczynowości przedstawia się dla modelu oddziaływań Hartreego – Focka. Z tą jednak różnicą, że równanie stanu dla dużych gęstości możemy przybliżyć przez:

$$P = 2\varepsilon \quad (4.3.4)$$

Zatem i w tym przypadku kryterium przyczynowości będzie niespełnione dla dużych gęstości. Pamiętając z jakich relacji korzystaliśmy przy znajdowaniu postaci ciśnienia $P(\eta)$ mając postać $\varepsilon(\eta)$, możemy wykorzystać te relacje w celu wyznaczenia kiedy równanie będzie spełniać zasadę przyczynowości dla dużych gęstości. Niech gęstość energii dla dużych gęstości spełnia zależność:

$$\frac{\varepsilon}{\eta} \approx \lambda u^\delta \quad (4.3.5)$$

Aby wyznaczyć postać ciśnienia $P(\eta)$ posłużymy się poniższą zależnością:

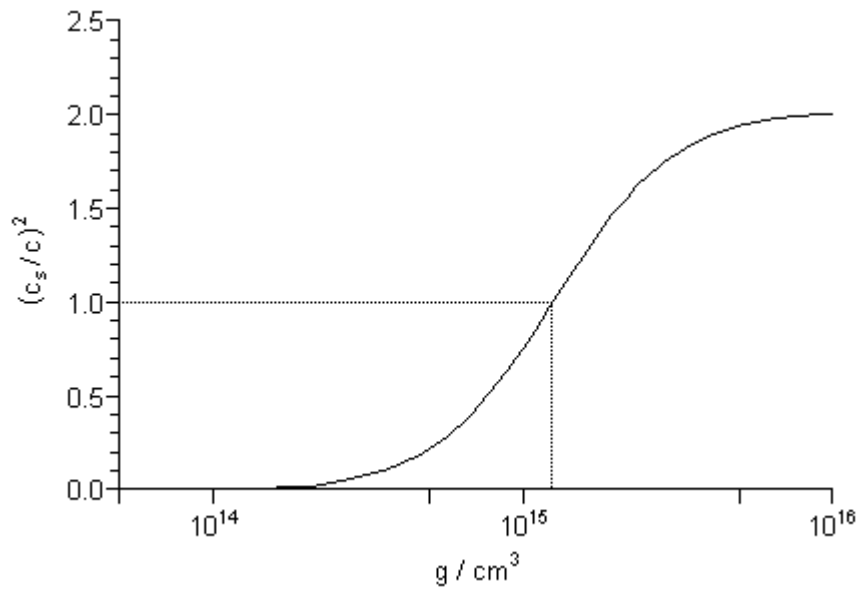
$$P(\eta) = \eta^2 \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\varepsilon(\eta)}{\eta} \right) \quad (4.3.6)$$

Wtenczas otrzymujemy:

$$P(\eta) = \delta \varepsilon(\eta) \quad (4.3.7)$$

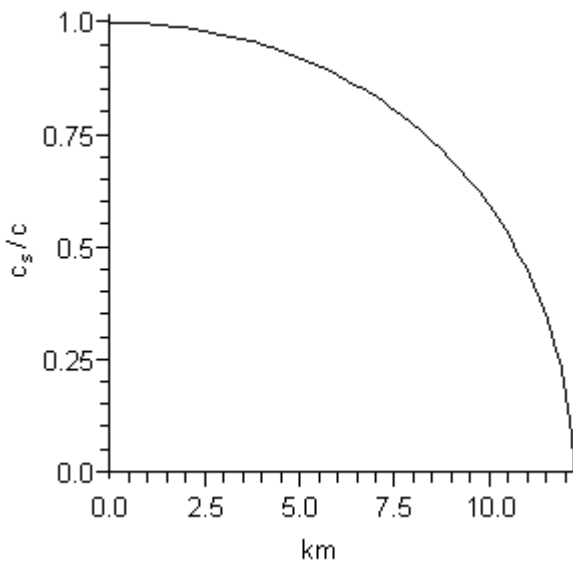
Widzimy więc, że zasada przyczynowości jest zachowana jedynie gdy δ nie przekracza jedności. Modele oddziaływań mogą oczywiście mieć inną formę niż forma potęgowa przedstawiona jako relacja (4.3.5), wtenczas przedstawione prawidłowości będą miały inną postać.

Przyjrzyjmy się wykresom przedstawiającym relację (4.3.1) dla modelu oddziaływań Hartreego – Focka. Wykreślimy zależność prędkości dźwięku od gęstości centralnej w tym przypadku. Wyznamy maksymalną gęstość, dla której zasada przyczynowości jest zachowana. Następnie wyznaczmy maksymalną masę gwiazdy oraz jej promień podobnie jak postąpiliśmy w przypadku modelu oddziaływań empirycznych.



Rys. 39. Prędkość dźwięku dla modelu oddziaływań Hartreego – Focka. Podobnie jak w przypadku modelu oddziaływań empirycznych prędkość dźwięku rośnie wraz ze wzrostem gęstości. Widzimy złamanie kryterium przyczynowości dla gęstości powyżej $\rho \approx 1,24 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Iloraz dąży do wartości 2 dla dużych gęstości.

Wykres Rys. 39. przedstawia zależność prędkości dźwięku od gęstości dla modelu oddziaływań Hartreego – Focka. Stosunek przekracza jedność przy gęstości $\rho \approx 1,24 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Masa gwiazdy dla tej gęstości wynosi $M \approx 2,54 M_0$, promień natomiast wynosi $12,2 \text{ km}$. Przyjrzyjmy się jeszcze jak zmienia się prędkość dźwięku wewnątrz gwiazdy.



Rys. 40. Prędkość dźwięku wewnątrz gwiazdy dla omawianego modelu oddziaływań. Gęstość centralną ustawiono na $1,24 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Dla większych gęstości następuje złamanie kryterium przyczynowości.

Podsumowanie

W niniejszej pracy dotyczącej stabilności gwiazd zwartych zostały przedstawione następujące zagadnienia. We wstępie pracy przedstawiono w sposób uproszczony pochodzenie oraz ewolucję gwiazd. Podano przy tym kryterium masy początkowej gwiazdy jako wyznacznik jej dalszej ewolucji oraz finalnego etapu zachodzących w niej przemian. Wymieniono między innymi kryteria jakie powinna spełniać protogwiazda aby ostatecznym stadium ewolucji stał się biały karzeł, jak również przedstawiono kryteria utworzenia gwiazdy neutronowej. Wprowadzono pojęcie gwiazdy zwartej. W rozdziale pierwszym wprowadzono podstawowe równania struktury używane do opisu sferycznych konfiguracji pozostających w stanie równowadze. Były to na przykład równanie równowagi hydrodynamicznej lub równanie Tolmana – Oppenheimera – Volkoffa. Przedstawiono także wykorzystywany sposób przejścia opisu do układu bezwymiarowego. Wykorzystano przy tym jako przykład politropowe równania stanu dzięki czemu wyprowadzono równanie Lanego – Emdena. W rozdziale drugim przedstawiono dokładniej ewolucję białych karłów jak również historię ich odkrycia. Przedstawiono niektóre właściwości białych karłów oraz podano znane przykłady zaobserwowanych konfiguracji. Przedstawiono w sposób uproszczony skład białych karłów oraz powody, dzięki którym konfiguracja może pozostawać w stanie równowagi. W sposób przybliżony wyprowadzono masę Chandrasekhara M_{Ch} oraz podano jej wartość $1,44 M_{\odot}$, dla konfiguracji spełniających zależność $Z/A=2$. Następnie podano podstawowe właściwości materii, z których składają się białe karły dzięki czemu wprowadzono równania stanu dla zjonizowanej materii. Były to zarówno równania wyznaczone w sposób analityczny jak i przybliżony. Pośród równań wyznaczonych w sposób przybliżony należy wymienić równania politropowe dla zdegenerowanego gazu elektronowego w przypadku nierelatywistycznym oraz relatywistycznym. W przypadku bardzo wysokich gęstości wprowadzono ultrarelatywistyczną relację łączącą gęstość energii z ciśnieniem. Podano kryteria wskazujące, które przybliżone równania stanu możemy stosować dla odpowiednich gęstości. Równania stanu w przypadku nierelatywistycznym oraz relatywistycznym zostały porównane z równaniem wyznaczonym w sposób analityczny na wykresie Rys. 1. Wyznaczone równania stanu posłużyły do uzyskania profili gęstości, ciśnienia oraz relacji $m(r)$. Wyniki uzyskane dzięki przybliżonym równaniom porównano na wykresach z wynikami dla analitycznych postaci równań stanu.

Postąpiono tak zarówno w przypadku nierelatywistycznym jak i relatywistycznym. Następnie przystąpiono do rozwiązywania zagadnienia własnego gwiazdy w celu uzyskania odpowiednich wartości masy oraz promienia gwiazdy przy zadanej gęstości centralnej. Porównano trzy sposoby uzyskania tych parametrów a wyniki umieszczono na wykresach Rys. 8. oraz Rys. 9. Sposoby te cechowała różna dokładność równań stanu i struktury. Wykorzystano równania równowagi hydrodynamicznej lub równanie uwzględniające poprawki relatywistyczne mianowicie równanie Oppenheimera – Volkoffa. Oraz różny stopień dokładności równań stanu. Przedstawiono relację masa / promień dla białego karła oraz wyróżniono punkty ekstremalne tej zależności. Między innymi uzyskano maksymalną masę białego karła w wysokości $1,399 M_0$. Wyniki pozostają więc w zgodzie z masą Chandrasekhara $1,44 M_0$. W rozdziale trzecim przedstawiono historię poznania gwiazd neutronowych. Przedstawiono również nieco dokładniej proces formowania tych ciał niebieskich. Omówiono skład materii gwiazdy neutronowej oraz przedstawiono jej podstawowe właściwości przy wzroście gęstości w gwieździe. Między innymi wymieniono proces neutronizacji, który musi zajść w gwieździe żeby powstała gwiazda neutronowa. W rozdziale 3.1. wprowadziliśmy równania stanu dla gwiazdy składającej się jedynie z neutronów. Obliczenia wykonywane były wyłącznie dla analitycznie wyznaczonych równań stanu oraz dla równania Tolmana – Oppenheimera – Volkoffa jak zresztą pozostało już do końca pracy. Otrzymaliśmy profile gęstości oraz ciśnienia w gwieździe przy zadanej gęstości centralnej. Wyznaczyliśmy relacje $R(\rho_c)$ oraz $M(\rho_c)$, jak również uzyskaliśmy maksymalną masę „czystej” gwiazdy neutronowej. Wynosi ona $M=0,77 M_0$. Rozdział 3.2. dotyczy gwiazdy neutronowej gdzie w równaniach stanu uwzględniono stabilność gwiazdy ze względu na rozpad beta. Dzięki rozpatrzeniu relacji, którą powinny spełniać potencjały chemiczne neutronów, protonów oraz elektronów w gwieździe pozostającej w równowadze ze względu na rozpad beta otrzymaliśmy relacje (3.2.6) łączącą pęd Fermiego protonów z pędem Fermiego neutronów. Dokonaliśmy w niniejszej relacji przejścia do granicy bardzo dużych gęstości. Przejście to dało nam wskazówkę, że dla dużych gęstości wkład liczby protonów do liczby nukleonów jest niewielki i wynosi $1/9$. Relację (3.2.6) przedstawiono na wykresie. Kształt wykresu potwierdza wnioski otrzymane dzięki przejściu granicznemu. Różnice między „czystą” gwiazdą neutronową i gwiazdą, w której uwzględniliśmy możliwość zachodzenia rozpadu beta powinny być niewielkie. Po zapisaniu postaci równań stanu przystąpiliśmy do rozwiązywania równań struktury. Otrzymaliśmy zależności promienia oraz masy od gęstości centralnej. Maksymalna masa takiej gwiazdy, wynosi $M=0,757 M_0$.

W rozdziałach 3.3. oraz 3.4. wprowadziliśmy oddziaływania do opisu gwiazdy. Pierwszy z wymienionych rozdziałów dotyczy empirycznego modelu oddziaływań. Wprowadzając model korzystamy z wielkości znanych dzięki fizyce jądrowej do wyznaczenia wartości parametrów modelu. Wyznaczamy początkowo postać równań stanu dla symetrycznej materii $\eta_n = \eta_p$ a następnie rozszerzamy model do materii asymetrycznej przyjmując, że zachodzi zależność $\eta_p = 0$. Postępujemy tak ze względu na wyniki rozważań w rozdziale 3.2. Równania stanu dla obu rodzajów materii zostały zobrazowane wykresami. Porównujemy także równanie dla empirycznego modelu oddziaływań z równaniem dla zdegenerowanego gazu neutronowego. Równanie stanu jest w tym przypadku o wiele twardsze dla dużych gęstości co owocuje większą maksymalną masą gwiazdy, którą może utrzymać ciśnienie, kiedy uwzględnimy oddziaływania między nukleonami. Masa gwiazdy neutronowej dla empirycznego modelu oddziaływań wynosi $M = 3,13 M_0$. Rozdział 3.4. dotyczy innego modelu oddziaływań. Przedstawione równania stanu należą do tak zwanego modelu parametryzacji Hartreego – Focka. Parametry wyznaczamy podobnie jak w poprzednim modelu. Okazuje się, że równanie stanu mimo podobieństw jest nieco mniej twarde niż równanie oddziaływań empirycznych. Równania zostają porównane na wykresie. Posługujemy się równaniem stanu żeby znaleźć maksymalną masę gwiazdy. Maksymalna masa gwiazdy wynosi $M = 2,71 M_0$ co zgadza się z faktem, że równanie stanu jest twardsze w przypadku oddziaływań empirycznych. Rozdział 4. dotyczy stabilności omawianych wcześniej gwiazd. Wprowadzamy w dużym skrócie myślowym kryteria informujące nas o stabilności danej konfiguracji. W szczególności wymieniona zostaje stabilność dynamiczna. W rozdziale 4.1. przedstawiamy nieformalnie kryterium masy ekstremalnej. W kolejnym rozdziale powiązane zostały punkty ekstremalne relacji masa / promień ze zmianą znaku kwadratu modów oscylacji gwiazdy. Na prostym jednowymiarowym przykładzie pokazaliśmy istnienie granicznej wartości częstotliwości oscylacji poniżej, której oscylacji nie ma. Wprowadziliśmy równanie opisujące nieradialne oscylacje ciśnienia. Przekształciliśmy równanie pokazując przy okazji, że opis oscylacji jest zagadnieniem podobnym do zagadnienia własnego atomu wodoru omawianego na wykładach mechaniki kwantowej. Zatem mody oscylacji będą numerowane podobnie jak funkcje falowe atomu wodoru za pomocą trzech liczb całkowitych mianowicie n , l oraz m . W dalszym opisie gwiazdy ograniczamy się wyłącznie do oscylacji radialnych zatem $l = 0$. Wprowadziliśmy kryterium dodatniości kwadratu modu podstawowego oscylacji jako kryterium stabilności. Działanie kryteriów stabilności omówione zostało na przykładzie wyników otrzymanych dla białego karła.

W rozdziale 4.3. używamy kryterium przyczynowości jako narzędzia badania stabilności konfiguracji pozostającej w równowadze. Kryterium przyczynowości sprowadza się w tym przypadku do zbadania czy prędkość dźwięku nie przekracza prędkości światła. Prędkość dźwięku w zależności od gęstości przedstawiono na wykresach dla białego karła, „czystej” gwiazdy neutronowej oraz obu modeli oddziaływań omawianych wcześniej. Stosunek prędkości dźwięku do prędkości światła nie przekracza jedności dla dwóch pierwszych gwiazd. Dla dużych gęstości relacja ta dąży do $1/3$ z powodu ultrarelatywistycznych równań stanu. Z kolei równania stanu w obydwóch modelach oddziaływań dla dużych gęstości można przybliżać przez funkcje potęgowe. Oba wykładniki potęg są większe od jedności co owocuje łamaniem kryterium przyczynowości dla dużych gęstości. Jest to zobrazowane na wykresach Rys. 36. oraz Rys. 39. Dla empirycznego modelu oddziaływań stosunek prędkości dźwięku do prędkości światła dąży do wartości $2,112$. Z kolei dla modelu parametryzacji Hartreego – Focka relacja dąży do 2 dla dużych gęstości. Maksymalne masy konfiguracji spełniających kryterium przyczynowości wynoszą $2,859 M_0$ oraz $2,54 M_0$ dla modelu empirycznego oraz parametryzacji Hartreego – Focka odpowiednio. W rozdziale 4.3. przedstawiono także wykresy prędkości dźwięku w gwiazdzie dla obu przypadków oddziaływań.

Uzupełnienie

Przedstawimy tok rozumowania podstawowej analizy stanu białego karła. W celu ułatwienia obliczeń numerycznych wygodnie jest przejść w opisie do układu bezwymiarowego. W tym celu należy przyjąć pewne podstawienia. Poniżej zapisano prosty przykład takich podstawień.

$$r = r_0 x \quad (5.1)$$

$$\rho = \rho_c \theta^n \quad (5.2)$$

$$P = P_c \theta^{n+1} \quad (5.3)$$

gdzie x jest bezwymiarową zmienną, θ bezwymiarową funkcją x a r_0 , ρ_c oraz P_c mają odpowiednio wymiar odległości, gęstości i ciśnienia. Można zauważyć, że z relacji (1.4.2) oraz (1.4.3) wynika następujące równanie stanu:

$$P = K \rho^{(n+1)/n} \quad (5.4)$$

Jak widać jest to równanie politropy. Skalowanie równań może polegać na przeskalowaniu równań struktury osobno jako układu równań bądź na eliminacji masy z równania (1.1.3) poprzez wstawienie w jej miejsce relacji wynikającej z odpowiedniego równania struktury na przykład równania (1.2.5). Druga z wspomnianych metod jest opisana poniżej. Równania, opisujące nierelatywistyczną gwiazdę mają postać:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (1.1.3)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G \frac{\rho(r)m(r)}{r^2} \quad (1.2.5)$$

Z równania (1.2.5) wyznaczamy masę i podstawiamy do równania (1.1.3), otrzymujemy następujące równanie drugiego rzędu:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (5.5)$$

Podstawiamy równanie stanu (5.4) i otrzymujemy:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{d}{dr} (K \rho^{(n+1)/n}) \right) = -4\pi G \rho \quad (5.6)$$

Następnie korzystamy z relacji (5.1) oraz (5.2) i upraszczamy równanie (5.6) do następującego równania:

$$\left[\frac{n+1}{4\pi G r_0^2} K \rho_c^{\frac{1-n}{n}} \right] \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\theta}{dx} \right) = -\theta^n \quad (5.7)$$

Przyjmiemy, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym z zależności (5.7) jest równe jedności. Wtenczas otrzymujemy relację dzięki, której wyznaczymy r_0 :

$$r_0 = \sqrt{\frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1-n}{n}}} \quad (5.8)$$

Równanie (5.7) sprowadza się wtenczas do następującej postaci:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\theta}{dx} \right) = -\theta^n \quad (5.9)$$

Relacja (5.9) nazywana jest równaniem Lanego - Emdena. Należy zauważyć, że to gdzie $\theta(x)$ ma miejsce zerowe nie zależy od gęstości centralnej lecz tylko od wykładnika politropy n . W przypadku innych równań stanu i struktury tak już jednak nie będzie.

Aby rozwiązać równanie (5.9) musimy narzucić warunki brzegowe na funkcję $\theta(x)$ i jej pochodną. Przyjmiemy następujące warunki brzegowe:

$$\theta(0) = 1 \quad (5.10)$$

$$\theta'(0) = 0 \quad (5.11)$$

Jeżeli następnie oznaczmy przez x_0 pierwszy punkt zerowy rozwiązania $\theta(x)$, to promień gwiazdy jest dany przez:

$$R = r_0 x_0 \quad (5.12)$$

Następnie należy zapisać, że masę gwiazdy znajdujemy z następującego wyrażenia:

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho dr = 4\pi r_0^3 \rho_c \int_0^{x_0} x^2 \theta^n dx \quad (5.13)$$

Literatura

- [1] Irina Sagert, Matthias Hempel, Carsten Greiner, Jurgen Schaffner – Bielich, „Compact Stars for Undergraduates”, Eur. J. Phys. 27 (2006) 577 - 610
- [2] Marek Demiański, „Astrofizyka relatywistyczna”, PWN Warszawa, (1991)
- [3] Marcin Kubiak, „Gwiazdy i materia międzygwiazdowa”, PWN Warszawa, (1994)
- [4] Richard R. Silbar, Sanjay Reddy, „Neutron Stars for Undergraduates”, Am. J. Phys. 72 (2004) 892 - 905
- [5] S. O. Kepler, P. A. Bradley, „Structure and Evolution of White Dwarfs”, Baltic Astronomy, vol. 4, 166-220, (1995)
- [6] A. C. Phillips, „The Physics of Stars”, John Wiley & Sons, (1994)
- [7] S. Chandrasekhar, „An Introduction to the Study of Stellar Structure”, Dover Publications, Inc., (1939)
- [8] Neven Bilić, „Black – Hole Phenomenology”, (2006) arXiv: astro – ph / 0610657v2
- [9] George W. Collins II, „The Fundamentals of Stellar Astrophysics”, (2003) WEB Edition, bifrost.cwru.edu/personal/collins/astrobook/
- [10] C. B. Jackson, J. Taruna, S. L. Pouliot, B. W. Ellison, D. D. Lee, J. Piekarewicz „Compact Objects for Everyone I: White Dwarf Stars”, Eur. J. Phys. 26, 695 (2005)
- [11] Jorgen Christensen – Dalsgaard, „Lecture Notes on Stellar Oscillations”, (2003) www.phys.au.dk/~jcd/oscilnotes/