

UNIwersytet Śląski
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii

Ośrodek dydaktyczny w Rybniku

Kierunek: Fizyka
Specjalność: EkonoFizyka

Adrian Niewiadomski

„Przejścia indukowane szumem multiplikatywnym”

Praca licencjacka wykonana
pod kierunkiem
dr Jerzego Dajki

Spis treści

Wstęp	3
1. Wprowadzenie do procesów losowych	5
1.1 Zmienna losowa	5
1.2 Proces stochastyczny	9
1.3 Proces Wienera	10
1.4 Biały szum Gaussowski	12
2. Układ z pojedynczym źródłem szumu	14
2.1 Równanie Langevina	14
2.2 Równanie Ito a równanie Stratonowicza	15
2.3 Równanie Fokkera – Plancka a równanie Ito	18
2.4 Rozwiązanie stacjonarne równania Fokkera – Plancka	20
2.5 Przejście indukowane parametrem	21
3. Układ dwóch szumów nieskorelowanych	31
3.1 Klasyfikacja szumów	31
3.2 Efektywne równanie Ito	31
3.3 Przejście indukowane szumem	32
4. Układ dwóch szumów skorelowanych	36
4.1 Równanie Langevina a równanie Fokkera – Planka	36
4.2 Przykłady przejść w układach dwóch szumów skorelowanych	38
5. Analogie między przejściami fazowymi i analizowanymi przejściami w układach stochastycznych	49
5.1 Podobieństwa	50
5.2 Różnice	51
Podsumowanie	51
Literatura	53

Wstęp

Zainteresowanie metodami stochastycznymi w ciągu ostatnich dziesięcioleci ogromnie wzrosło. Owo zainteresowanie bierze się z niemożności opisu rzeczywistych układów przez czysto deterministyczne relacje. Prawa te nie uwzględniają wszystkich czynników, mających wpływ na układ, który tak naprawdę jest nieskończenie skomplikowany. Każdy model jest w istocie niedokładny i ma tylko przybliżać rzeczywistość, dodatkowo jest on oparty na założeniach, które mogą w praktyce nigdy nie występować.

Każdy rzeczywisty układ fizyczny znajduje się w kontakcie z otoczeniem, które wywiera na ów układ wpływ. Przykładowo nie istnieje układ pozostający w izolacji termicznej od otoczenia lub niezwykle trudno o układ elektryczny nie obdarzony oporem elektrycznym. Układy makroskopowe są to układy posiadające liczbę cząstek co najmniej rzędu liczby Avogadro ($N \sim 10^{23}$) stąd niemożliwe jest chociażby zapisanie wszystkich równań ruchu, a co dopiero rozwiązanie tak skomplikowanego układu równań. Głównie te dwa problemy są powodem zastosowania metod probabilistycznych w celu opisu układów fizycznych.

Modele utworzone przez probabilistyczny opis zjawisk fizycznych nie dają nam jednoznacznej informacji o tym, jaką ewolucję będzie miał dany proces, sens ma jedynie stwierdzenie, że np. średnio proces może przyjąć daną wartość lub, że proces przyjmie wartość z danego przedziału z danym prawdopodobieństwem. Na ich podstawie można przewidywać wartości przyszłe procesów np. położenia cząstki lub przyszłe ceny akcji lub też wartości dowolnych innych procesów, w których istotną rolę odgrywa tzw. czynnik losowy. Z występowaniem czynnika losowego związane jest występowanie losowego odchylenia wartości pomiaru od wartości wynikającej z danego prawa. Nazywać ją będziemy szumem.

Za szum możemy przyjąć dowolne odstępstwo stanu rzeczywistego od wartości teoretycznych np. obserwując ruch cząstki (dowolnego widzialnego gołym okiem obiektu) w szklance wody widzimy, że nie porusza się ona dokładnie tak jak by wynikało to z prawa Newtona. Na położenie cząstki mają, bowiem wpływ zderzenia z cząstkami wody, których liczba przekracza liczbę Avogadro i z tego powodu opis deterministyczny trajektorii ruchu cząstki jest niemożliwy. Istnieją układy, w których występują dwa źródła szumu lub jest ich więcej. Szumy te mogą być ze sobą powiązane np. na ruch cząstki poruszającej się po powierzchni wody mogą mieć wpływ zderzenia z cząstkami zarówno wody jak powietrza.

Stąd pytanie o prawdziwą naturę procesu i o to czy upraszczanie opisu poprzez pominięcie pewnych niekoniecznie nieistotnych elementów nie będzie dawało mylnej informacji o układzie.

Badane zagadnienia będą analizowane pod kątem analogii z przejściami fazowymi. Interesować nas będzie każda jakościowa zmiana rozkładu stacjonarnego, którą będziemy analizować jako analogię przejścia fazowego. Z tego względu niezbędne jest wprowadzenie kilku podstawowych pojęć fizyki statystycznej (które omówione zostaną w rozdziale 5). Omówione zostaną przejścia indukowane parametrem oraz szumem, jak również przejścia wynikające ze skorelowania dwóch szumów.

Istotne jest aby czytelnik uzmysłowił sobie, że omawiane w tej pracy szumy nie są szumami termicznymi. Wynika to z twierdzenia Nyquista (inaczej twierdzenie fluktuacyjno – dysypacyjne). Przykładem może być opornik, produkujący fluktuacje napięcia elektrycznego w obwodzie, w wyniku czego zostanie wygenerowane ciepło. Ciepło wyprodukowane w oporniku musi równoważyć energię pobraną przez opornik na wytworzenie fluktuacji (zasada zachowania energii). W tej pracy nie będziemy dokładnie omawiać tej zasady. Wyróżniamy dwa podejścia do opisu układów stochastycznych czyli interpretacja Ito lub interpretacja Stratonowicza (zagadnienie zostanie omówione dokładniej w rozdziale 2.2). Do opisu układów rzeczywistych trafniejszym wyborem jest podejście Stratonowicza, które lepiej przybliża rzeczywiste procesy. Opis układu w ten sposób jest jednak trudny i kłopotliwy dlatego też zwykle przechodzi się do interpretacji Ito danego opisu, która istotnie niewiele się różni od interpretacji Stratonowicza.

1. Wprowadzenie do procesów losowych

W niniejszym rozdziale zawarte zostało wprowadzenie do procesów losowych, w którym omówione zostały wiadomości niezbędne do zrozumienia dalszej części tej pracy. W dalszej części pracy omówione zostaną przykłady układów stochastycznych zawierających zarówno jedno jak i dwa źródła szumów także w przypadku, gdy są one skorelowane. W szczególności rozważany będzie przypadek, gdy szum jest szumem multiplikatywnym. Omówione zostaną także analogie szczególnych przykładów układów stochastycznych z modelami przejść fazowych.

1.1 Zmienna losowa

Zmienną losową definiuje się zwykle poprzez określenie zbioru dopuszczalnych wartości (w ogólności zbiór ten może być dowolną kombinacją zbiorów dyskretnych oraz ciągłych) i rozkładu prawdopodobieństwa.

Jeżeli funkcja $P(x)$ spełnia $P(x) \geq 0$ dla x należącego do \mathfrak{X} oraz spełniony jest tak zwany warunek normalizacyjny:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1 \quad (1.1.1)$$

dla ciągłych wartości x . Wtedy istnieje taka zmienna losowa x , że $P(x)$ jest opisującą ją funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. Ograniczymy się do zmiennych losowych ciągłych. Przestrzeń stanów dozwolonych może być przestrzenią wielowymiarową. Całkowanie przebiega wtedy po wartościach wszystkich zmiennych a zmienną X (i wartości x , które przyjmuje) zapisuje się dla wygody jako wektor. Ograniczymy się do zmiennych jednowymiarowych.

Dla dyskretnego zbioru możliwych wartości, w szczególnym przypadku $P(x)$ może wyrażać się przez delty Diraca i wtedy funkcja gęstości przyjmuje następującą postać.

$$P(x) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(x - x_i)$$

Gdzie suma po wszystkich możliwych wartościach p_i wynosi 1.

Wielkościami, które dodatkowo opisują zmienną (a dokładnie rozkład zmiennej) są momenty i wielkości z nimi związane. Poniżej podane zostaną najważniejsze z nich.

Oznaczmy k-ty moment przez μ_k wtedy momenty zdefiniowane są przez:

$$\mu_k = \langle x^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P(x) dx \quad (1.1.2)$$

W szczególności pierwszy moment nazywamy wartością średnią i oznaczamy przez $\mu = \langle x \rangle$ a wartość σ^2 nazywamy wariancją, która jest miarą rozproszenia wartości x wokół wartości średniej tejże zmiennej.

Wariancja spełnia związek:

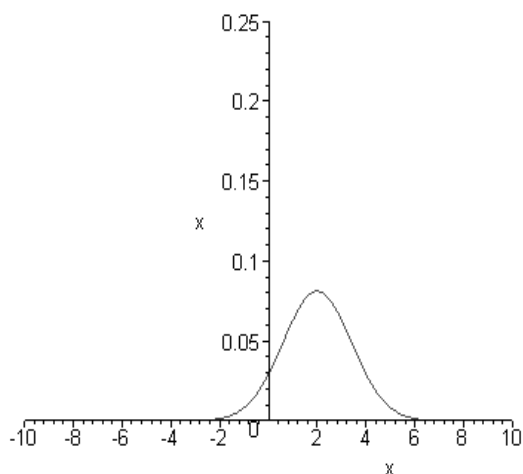
$$\sigma^2 = \langle (x - \mu)^2 \rangle = \mu_2 - \mu^2 \quad (1.1.3)$$

Pierwiastek z wariancji σ nazywamy odchyleniem standardowym. σ jest wielkością szczególnie ważną, ponieważ ma ten sam wymiar, co wartość średnia i informuje nas o tym o ile X średnio odchyła się od swojej wartości średniej.

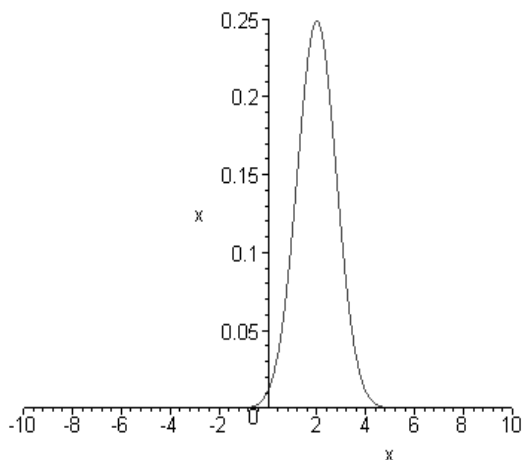
Przykład: Najczęściej występujące w przyrodzie procesy to procesy które dają się opisać za pomocą tak zwanego rozkładu Gaussa mającego następującą postać:

$$P_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1.1.4)$$

Na wykresach przedstawiono jak zmienia się rozkład zmiennej X przy różnych wartościach odchylenia standardowego.



Rys. 1.1.1 Wykres rozkładu Gaussa
(1.1.4) dla $\mu = 2$ oraz $\sigma = 1,4$.



Rys. 1.1.2 Wykres rozkładu Gaussa
(1.1.4) dla $\mu = 2$ oraz $\sigma = 0,8$.

Rozkład Gaussa jest niezwykle ważnym rozkładem gęstości prawdopodobieństwa z uwagi na tak zwane centralne twierdzenie graniczne, dotyczy ono zbieżności rozkładu sumy N niezależnych zmiennych losowych (przy $N \rightarrow \infty$) o identycznych rozkładach do rozkładu Gaussa (Twierdzenie to jest omówione w [5]).

Przydatnym pojęciem jest kumulanta, która jest pewną kombinacją momentów, np.:

$$\chi_1 = \mu_1 \quad (1.1.5)$$

$$\chi_2 = \sigma^2 \quad (1.1.6)$$

$$\chi_3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3 \quad (1.1.7)$$

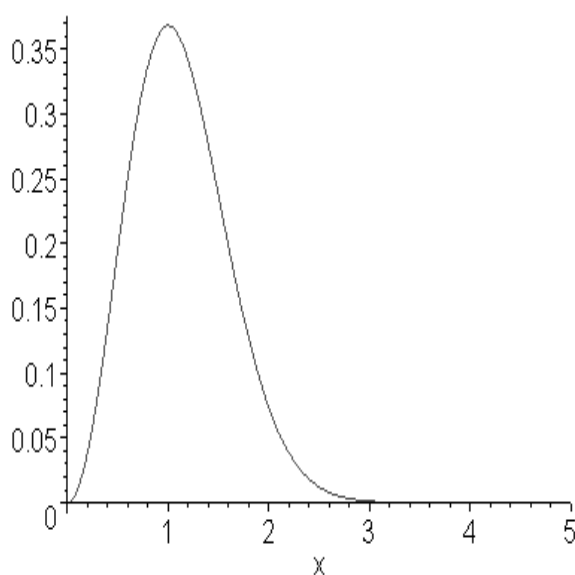
$$\chi_4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4 \quad (1.1.8)$$

Przez kumulanty zdefiniowane są dwa dodatkowe parametry rozkładu które będą badane dla różnych rozkładów w niniejszej pracy, te parametry to skośność oraz kurtoza. Skośnością rozkładu N.G. van Kampen w [3] nazywa następujący iloraz:

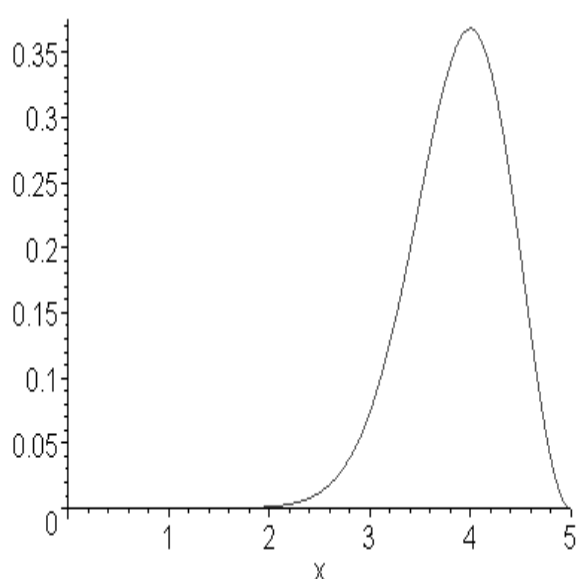
$$\gamma_3 = \frac{\chi_3}{\sigma^{3/2}} \quad (1.1.9)$$

dodatnia wartość skośności świadczy o tym, że całka z funkcji (gęstości) rozkładu po prawej stronie wartości średniej jest większa od całki po jej lewej stronie, ujemna wartość skośności informuje nas, że jest na odwrót.

Przykład:



Rys. 1.1.3 Dodatnia skośność $\gamma_3 > 0$.

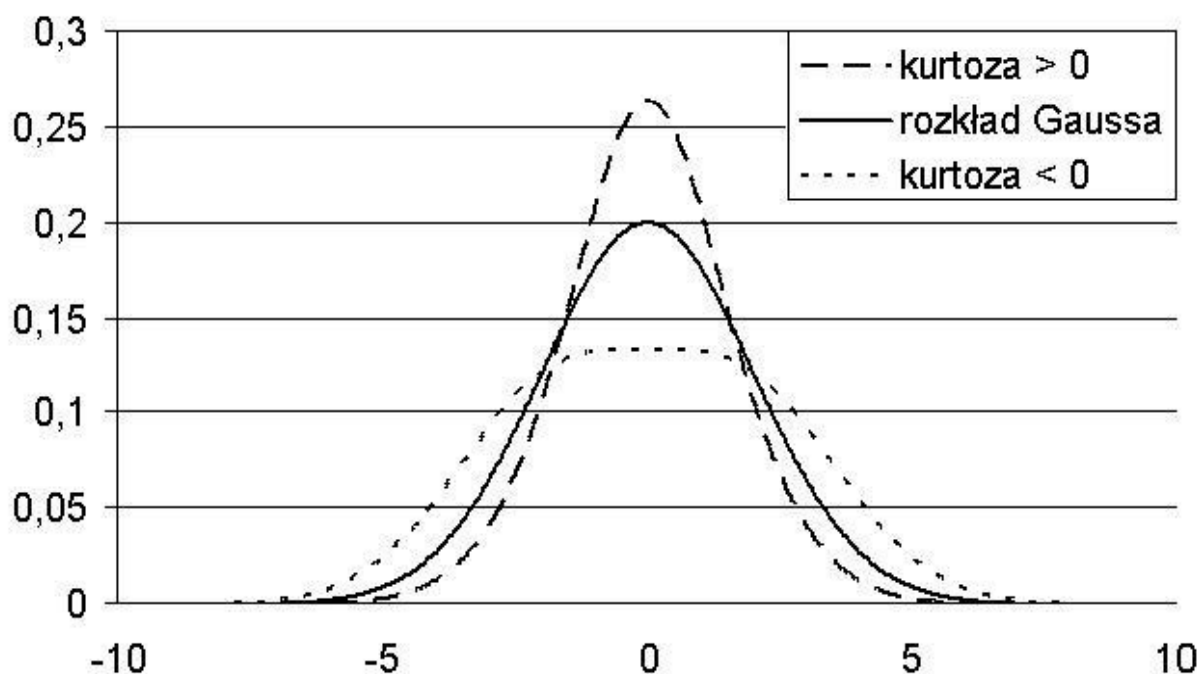


Rys. 1.1.4 Ujemna skośność $\gamma_3 < 0$.

Kurtoza jest miarą tego jak odchyła się dany rozkład prawdopodobieństwa od rozkładu Gaussa o tych samych parametrach czyli wartości średniej oraz wariancji. Dodatnia wartość kurtozy świadczy o dużej szczytowości rozkładu, ujemna wartość kurtozy świadczy o stosunkowej płaskości rozkładu. Kurtoza rozkładu gęstości prawdopodobieństwa jest zdefiniowana w [3] przez wyrażenie:

$$\gamma_4 = \frac{\chi_4}{\sigma^4} \quad (1.1.10)$$

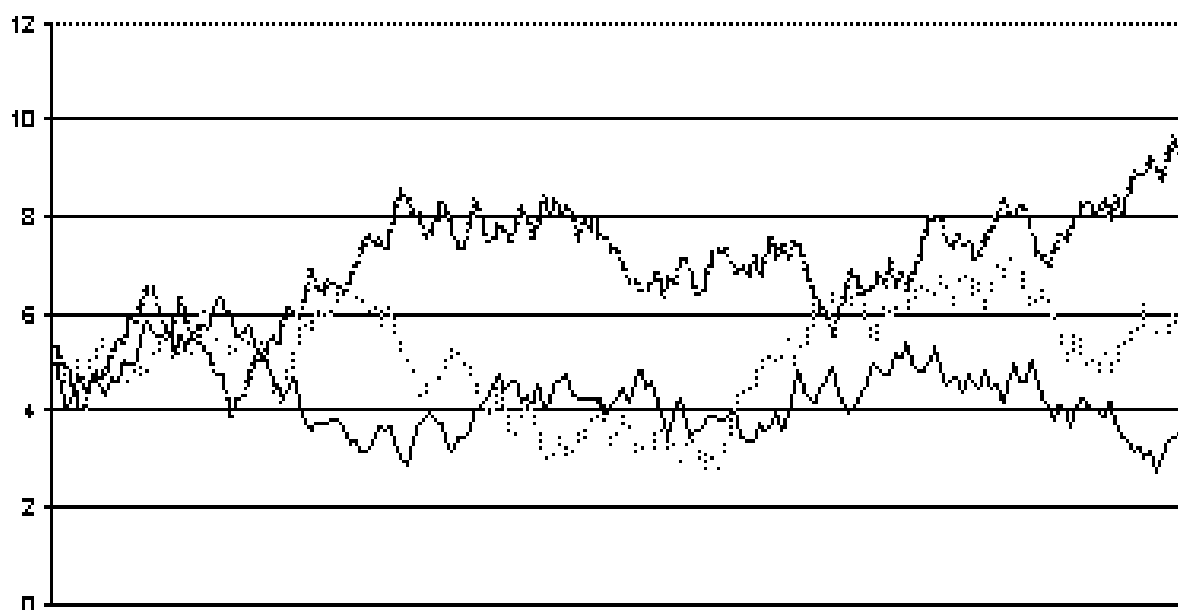
Przykład:



Rys. 1.1.5 Porównanie dwóch rozkładów o różnych kurtozach z rozkładem Gaussa.

1.2 Proces stochastyczny

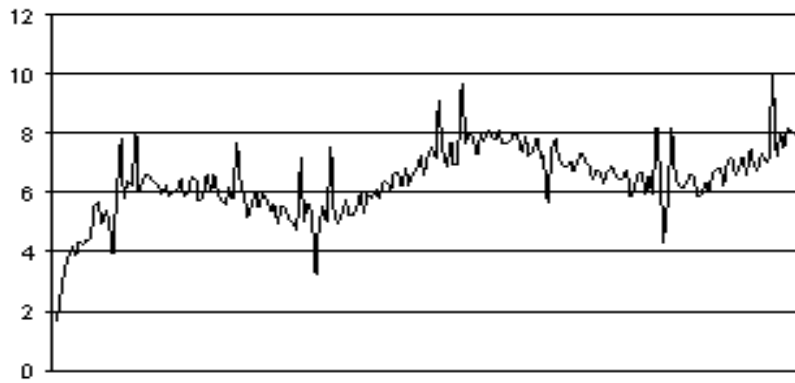
Procesem stochastycznym, nazywamy zmienną losową X opisaną wyżej jeżeli jest ona ponadto funkcją czasu. Jeżeli dla każdej wartości t zamiast X wstawimy jedną z jej możliwych wartości x wtedy otrzymamy zwykłą funkcję czasu $X=f(t)$ zwaną realizacją procesu. Jeżeli natomiast przyjmiemy za t jedną z jego wartości t' otrzymamy zmienną losową opisaną w poprzednim rozdziale $X(t')$ (określoną rozkładem dla ustalonego czasu $P[X(t),t] = P[X(t'),t']$).



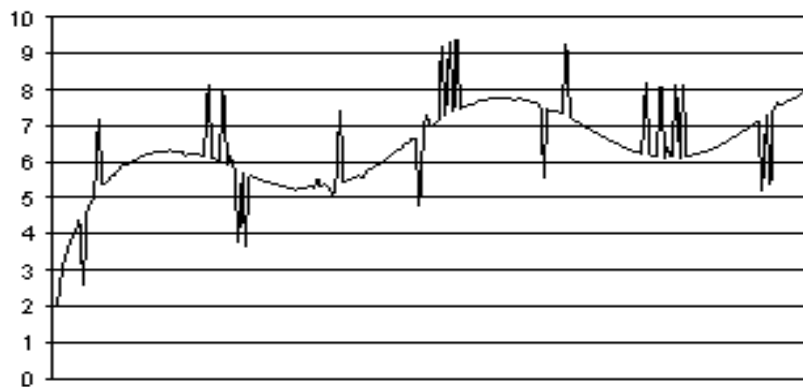
Rys. 1.2.1 Trzy przykładowe ewolucje procesu losowego.

W uproszczeniu procesy losowe możemy podzielić na trzy podstawowe grupy: proces dryftu jest to ciągły proces o czysto deterministycznych przyrostach (zwykła funkcja czasu i wartości początkowych zmiennej X), proces dyfuzji jest to ciągły wszędzie nieróżniczkowalny proces o czysto losowych przyrostach, oraz dyskretny proces skoku. W niniejszej pracy zajmiemy się tylko procesami dryftu i dyfuzji. Więcej informacji na ten temat znajduje się w literaturze (szczególnie [4]).

Jako proces losowy możemy traktować dowolną wielkość fizyczną lub inną wielkość istotną w dowolnej dziedzinie naukowej. Modele probabilistyczne umożliwiają dużo pełniejszy opis większości zjawisk niż modele czysto deterministyczne.



Rys. 1.2.2 Proces losowy zawierający procesy dryftu, dyfuzji oraz skoku.



Rys. 1.2.3 Proces losowy zawierający procesy dryftu i skoku.

1.3 Proces Wienera

Procesem Wienera W nazywamy proces o ciągłych niezależnych przyrostach spełniający warunki:

$$W(0) = 0$$

$$\langle W(t_2) - W(t_1) \rangle = 0 \quad (1.3.1)$$

$$\langle (W(t_2) - W(t_1))^2 \rangle = t_2 - t_1 \quad (1.3.2)$$

Ponadto przyrosty mają rozkład Gaussa dany wzorem:

$$P_{W(t_2)-W(t_1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t_2 - t_1)}\right) \quad (1.3.3)$$

Obliczmy pierwsze dwa momenty.

$$\langle W(t_1) - W(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t_2 - t_1)}\right) dx =$$

Korzystając z własności całki możemy zapisać

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{x}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t_2 - t_1)}\right) dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t_2 - t_1)}\right) dx$$

Obliczamy całki oddzielnie i widzimy, że znoszą się one wzajemnie.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} ((t_2 - t_1) - (t_2 - t_1)) = 0$$

Drugi moment natomiast:

$$\langle (W(t_1) - W(t_2))^2 \rangle = a \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-bx^2} dx =$$

Gdzie czynniki a oraz b oznaczają: $a = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}}$, $b = \frac{1}{2(t_2 - t_1)}$

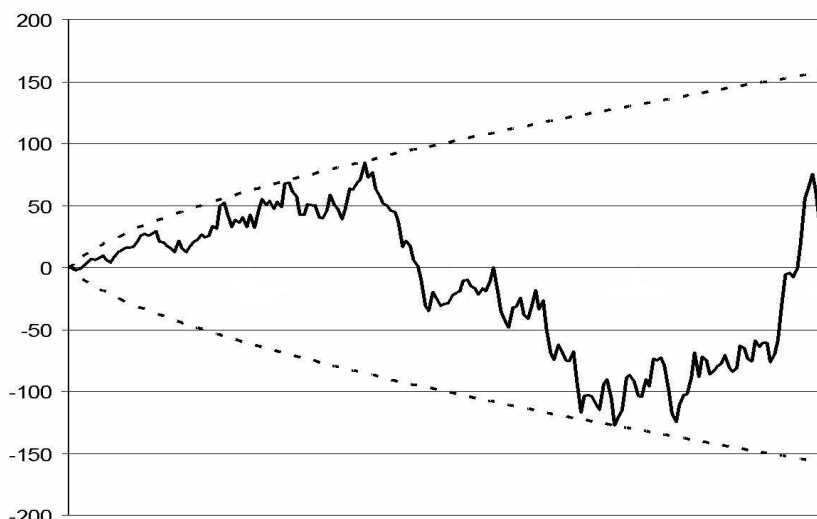
$$\dots = -a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial b} e^{-bx^2} dx = -a \frac{\partial}{\partial b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx = -a \frac{\partial}{\partial b} \sqrt{\frac{\pi}{b}} = \dots$$

Obliczamy pochodną i podstawiamy parametry a i b i otrzymujemy:

$$\langle (W(t_2) - W(t_1))^2 \rangle = t_2 - t_1$$

Udowodniliśmy zatem równości (1.3.1) oraz (1.3.2) z których będziemy korzystać w dalszej części pracy. W szczególnym przypadku dla $t_2 - t_1 = dt$ (z czego wynika, że $W(t_2) - W(t_1) = dW$) otrzymaliśmy równości: $\langle dW \rangle = 0$ oraz $\langle (dW)^2 \rangle = dt$

Jak widać wartość średnia przyrostów wynosi zero natomiast ich wariancja zależy od różnicy czasów. Zatem fluktuacje rosną z czasem co obrazuje poniższy wykres. Jest to proces czysto dyfuzyjny; z jego definicji wynika, że nie może on zawierać procesu dryftu.



Rys. 1.3.1 Jedna z możliwych realizacji procesu Wienera. Na rysunku przedstawiono także amplitudę fluktuacji, która rośnie z czasem.

Proces Wienera jest procesem szczególnie ważnym z powodu tego, że występuje on najczęściej w przyrodzie. Przykładem procesu Wienera jest ruch Browna czyli tak zwane Błądzenie losowe (Wspomniana wcześniej cząstka w szklance wody) lub dowolny inny proces dający się opisać (wprost lub po pewnych przekształceniach) rozkładem Gaussa i dodatkowo posiadającym pozostałe własności procesu Wienera. Błądzenie losowe jest dokładnie omówione w dowolnej literaturze dotyczącej procesów stochastycznych (szczególnie w [3], [4], [5]).

1.4 Biały szum Gaussowski

Przez pojęcie szumu rozumiemy pochodną procesu stochastycznego. Nie jest to pełna definicja procesu szumu jednakże na potrzeby tej pracy jest ona wystarczająca. Proces którego pochodną można przyjąć za szum może być dowolnym procesem. Jeżeli interesującym nas procesem byłby proces ewolucji cen instrumentów finansowych wtedy najtrafniejszym wyborem byłoby obrać za proces podstawowy proces o rozkładzie log normalnym z uwagi na typowo nieujemne wartości procesu. W tej pracy jednak będziemy rozważać szum jako pochodną procesu Wienera, który przy pewnych założeniach (hipoteza rynku efektywnego) także może być użyty do opisu ewolucji cen. Dziedzina wartości procesu Wienera jest nieograniczona stąd można by przypuszczać, że przyszła wartość ceny instrumentu finansowego mogła by przyjąć wartość ujemną (co nie jest możliwe a jednak właśnie to wynika z obranego modelu). Jednakże można tak dobrać parametry rozkładu, że prawdopodobieństwo wystąpienia wartości ujemnych procesu będzie zaniedbywalne.

Trajektorie procesu Wienera są nigdzie różniczkowalne. Stąd matematyczna definicja procesu szumu jako pochodnej procesu Wienera napotyka pewne trudności. Celem tej pracy nie jest jednak rozważanie problemu istnienia pochodnej procesu Wienera. Będziemy więc przyjmować, że istnieje taki proces $\xi(t)$, który spełnia następujące równania:

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \frac{dW(t)}{dt} \\ \langle \xi(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle &= \delta(t_2 - t_1)\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

Proces ten $\xi(t)$ nazywać będziemy białym szumem Gaussowskim. Białym szumem nazywa się procesy szumu o funkcji autokorelacji typu funkcja delta Diraca $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \delta(t_2 - t_1)$. Na potrzeby tej pracy nie będziemy się zajmować trudnościami w interpretacji tego procesu. Za proces szumu przyjmować będziemy natomiast pochodną procesu Wienera (niezagłębiając się w matematyczny sens tego wyrażenia). Analiza układów zawierających zespół szumów jest niezwykle istotna w zagadnieniach związanych z badaniem zarówno układów fizycznych jak i chemicznych. Przykład zastosowania procesów stochastycznych w fizyce został już omówiony wcześniej. Przykładami zastosowań układów stochastycznych w chemii mogą być opisy reakcji chemicznych oraz zjawisko dyfuzji. Analiza układów stochastycznych obdarzonych zespołem szumów może być wykorzystywana także do badania zjawisk biologicznych i socjologicznych. Przykładami zastosowania procesów stochastycznych mogą być w biologii opisy dynamiki populacji, procesów ewolucyjnych, w socjologii opis kształtowania się opinii publicznej. Przykłady zastosowań procesów losowych w chemii, biologii oraz socjologii zostały szerzej opisane przez H. Hakena w [5]. Wreszcie wiedzę o procesach stochastycznych można wykorzystać do opisu ewolucji cen instrumentów finansowych, towarów i usług na rynkach towarowych. Ewolucję ceny dowolnego instrumentu finansowego można traktować jak proces stochastyczny i opisywać za pomocą modeli analogicznych do modeli stosowanych w fizyce. Również sama dziedzina procesów stochastycznych ciągle się rozwija.

2. Układy z pojedynczym źródłem szumu

2.1 Równanie Langevina

Pochodzenie równania Langevina łączy się bezpośrednio z zagadnieniem ruchów Browna. Zjawisko to wzięło swoją nazwę od biologa Roberta Browna, który w 1827 roku jako pierwszy obserwował ruch ziarenka pyłku zawieszonego w wodzie. Zagadnienie pozostało niewyjaśnione do roku 1905 kiedy Albert Einstein opublikował swoją pracę poświęconą opisowi ruchu punktów materialnych zawieszonych w cieczach. To samo wyjaśnienie niezależnie opublikował Smoluchowski któremu przypisywany jest dalszy rozwój oraz eksperymentalna weryfikacja teorii ruchów Browna. Jakiś czas później Langevin przedstawił zupełnie inną metodę (metoda w [4]) podejścia do tego problemu. Oba podejścia prowadzą do tego samego rozwiązania. Jego metoda opisu jest jednak znacznie prostsza od opisu Einsteina i Smoluchowskiego. Mimo to matematyczne uzasadnienie tego podejścia powstało dopiero po ponad 40 latach kiedy Ito przedstawił swoją koncepcję stochastycznych równań różniczkowych.

Zapiszmy równanie Langevina opisujące ewolucję procesu w czasie:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \sigma(x)\xi(t) \quad (2.1.1)$$

gdzie: x to wartość procesu, $F(x)$ to dryft, $\sigma(x)$ to amplituda szumu, $\xi(t)$ jest „gwałtownie zmieniającą się, wysoce nieregularną funkcją” w tej pracy będziemy zakładać, że $\xi(t)$ jest białym szumem Gaussowskim opisanym w rozdziale 1.4.

Szum spełnia założenia $\langle \xi(t) \rangle = 0$ oraz $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$. Drugi warunek oznacza brak korelacji między wartościami procesu $\xi(t)$ dla różnicy czasów $t - t'$ różnej od zera. Warunek nieskorelowania prowadzi do patologicznego wniosku o nieskończonej wariancji szumu $\xi(t)$ (zachodzi $\lim_{t' \rightarrow t} \delta(t - t') = \infty$). Oczywiście żaden rzeczywisty proces nie może mieć nieskończonej wariancji, biały szum Gaussowski jest jednak pewną idealizacją procesu rzeczywistego (więcej wiadomości na temat rzeczywistych procesów znajduje się w [4]).

Równanie Langevina jest fundamentalnym równaniem w opisie procesów losowych, które przy spełnieniu następujących kryteriów:

$$|F(u,t) - F(v,t)| + |\sigma(u,t) - \sigma(v,t)| \leq C|u - v| \quad (2.1.2)$$

$$|F(u,t)|^2 + |\sigma(u,t)|^2 \leq C^2(1 + |u|^2) \quad (2.1.3)$$

Dla dowolnych wartości procesu X , u, v należących do \mathfrak{R} i wartości $t \in [t_0, t_n]$,

gdzie przedział $[t_0, t_n]$ to przedział czasu w którym szukamy rozwiązania równania (2.1.1) postaci $x(t)$ oraz dla dowolnej stałej dla dowolnej stałej spełniającej $C < \infty$, ma jednoznaczne rozwiązanie $x(t)$. Kryterium (2.1.2) nosi nazwę kryterium Lipschitza i oznacza ono, że dowolne przyrosty funkcji $F(x)$ i $\sigma(x)$ muszą być skończone dla dowolnych wartości u, v należących, do \mathfrak{R} . Niespełnienie kryterium (2.1.3) może spowodować, że rozwiązanie równania $x(t)$ będzie nieskończone. Kryterium (2.1.2) jest spełnione dla prawie każdego równania stochastycznego z którym możemy się spotkać w rzeczywistych układach stochastycznych.

Teoria stochastycznych równań różniczkowych jest obecnie tak zaawansowana, że trudno o zjawisko w mechanice klasycznej którego nie da się opisać choć w pewnym stopniu za pomocą tych równań. Podstawowym równaniem teorii stochastycznych równań różniczkowych jest równanie Langevina.

2.2 Równanie Ito a równanie Stratonowicza

Trudnością w interpretacji równania Langevina jest fakt, że zawiera ono wyraz $\xi(t)$, kiedy wycałkujemy owo równanie obustronnie po czasie otrzymamy:

$$\int_0^t \frac{dx}{dt'} dt' = \int_0^t F(x) dt' + \int_0^t \sigma(x) \xi(t') dt'$$

Zastanówmy się nad interpretacją wyrazu $\int_0^t \xi(t') dt'$. Można pokazać, że zachodzi

związek $\int_0^t \xi(t') dt' = W(t)$, stąd wynika, że zachodzi $\xi(t) = \frac{dW(t)}{dt}$. Z własności

procesu Wienera wiemy jednak, że jest on nieróżniczkowalny. Z uwagi na ten wyraz równanie Langevina jest trudne w interpretacji z matematycznego punktu widzenia w tej pracy jednak nie będziemy się zastanawiać się nad jego sensem.

Równanie Langevina (2.1.1) jest równoważne równaniu całkowemu postaci:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t F(x(s))ds + \int_0^t \sigma(x(s))dW(s) \quad (2.2.1)$$

Gdzie całka $\int_0^t \sigma(x(s))dW(s)$ jest całką Ito bądź Stratonowicza, gdyż została ona zdefiniowana (i w ten sposób wyjaśniona) przez Ito a następnie Stratonowicza.

Ito interpretował całkę stochastyczną przybliżając ją przez sumę pól w następujący sposób:

$$\int_0^t \sigma(x(s))dW(s) = \text{ms} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma\left(t_{i-1}\right) \left[W(t_i) - W(t_{i-1}) \right] \right\}$$

Nieco inaczej całkę stochastyczną interpretował Stratonowicz:

$$\int_0^t \sigma(x(s))dW(s) = \text{ms} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) \left[W(t_i) - W(t_{i-1}) \right] \right\}$$

Jeżeli szum jest w istocie biały to zwykle przyjmuje się jest to całka Ito. Jeżeli nie jest on całkowicie biały (jego funkcja korelacji nie jest funkcją typu funkcja delta Diraca) wtedy przyjmuje się, że jest to całka Stratonowicza.

W naturalnych warunkach biały szum tak naprawdę nie występuje jest to pewna idealizacja. Stąd we wszystkich układach badanych w tej pracy będziemy analizować równanie Stratonowicza, które będziemy przekształcać następnie do równania Ito korzystając z niżej udowodnionej zależności.

Mając równanie Ito:

$$dx = F(x)dt + \sigma(x)dW(t) \quad (2.2.2)$$

Odpowiadające mu równanie Stratonowicza jest postaci:

$$dx = \left[F(x) - \frac{1}{2} \sigma(x) \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} \right] dt + \sigma(x)dW(t) \quad (2.2.3)$$

Natomiast mając równanie Stratonowicza postaci:

$$dx = F(x)dt + \sigma(x)dW(t) \quad (2.2.4)$$

Równoważne równanie Ito jest postaci:

$$dx = \left[F(x) + \frac{1}{2} \sigma(x) \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} \right] dt + \sigma(x)dW(t) \quad (2.2.5)$$

Uzasadnienie 1. Rozważmy równanie Stratonowicza w postaci:

$$dx = F(x)dt + \sigma(x) \circ dW(t)$$

Gdzie $\sigma(x) \circ dW(t)$ oznacza:

$$\begin{aligned} \sigma(x) \circ dW(t) &= \sigma\left(\frac{x(t+dt) + x(t)}{2}\right) dW(t) \\ &= \sigma\left(x(t) + \frac{x(t+dt) - x(t)}{2}\right) dW(t) = \sigma\left(x(t) + \frac{1}{2}dx\right) dW(t) = \dots \end{aligned}$$

Zastosujmy rozwinięcie funkcji w szereg Taylora:

$$f(x+a) = f(x) + a \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \dots \quad (2.2.6)$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} \dots &= \left[\sigma(x(t)) + \frac{dx}{2} \frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} \right] dW(t) = \\ &= \left[\sigma(x(t)) + \frac{1}{2} (F(x)dt + \sigma(x)dW(t)) \frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} \right] dW(t) = \dots \end{aligned}$$

Następnie uśrednijmy powyższe wyrażenie i z własności procesu Wienera

($\langle dW \rangle = 0$ oraz $\langle (dW)^2 \rangle = dt$) wynika, że:

$$\sigma(x) \circ dW(t) = \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2} \sigma(x) \frac{\partial \sigma(x(t))}{\partial x} dt$$

Pokazaliśmy, więc postaci równoważnych równań stochastycznych Ito i Stratonowicza.

$$dx = F(x)dt + \sigma(x)dW(t) \quad \leftarrow \text{Stratonowicz}$$

$$= \left[F(x) + \frac{1}{2} \sigma(x) \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} \right] dt + \sigma(x)dW(t) \quad \leftarrow \text{Ito}$$

Zauważmy, że jeżeli σ jest nie zależy od zmiennej X to oba równania są identyczne.

2.3 Równanie Fokkera - Plancka a równanie Ito

Zapiszmy równanie Fokkera - Plancka:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [F(x)P(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x)P(x,t)] \quad (2.3.1)$$

Gdzie $P(x,t)$ to funkcja rozkładu procesu $X(t)$.

Jeżeli funkcje $P(x,t)$, $F(x)$ oraz $\sigma(x)$ oraz ich wszystkie pochodne występujące, w równaniu Fokkera - Plancka są ciągłe dla $t > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ oraz ograniczone to równanie Fokkera - Plancka odpowiada następującemu równaniu Ito:

$$dx = F(x)dt + \sigma(x)dW(t) \quad (2.3.2)$$

Uzasadnienie 2. rozważmy równanie Ito następującej postaci:

$$dx = F(x)dt + \sigma(x)dW$$

Wyznaczmy momenty warunkowe dane wyrażeniem:

$$\begin{aligned} \langle (x(t+dt) - x(t))^n | x(t) = x_0 \rangle &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t+dt) - x(t))^n P(x, t+dt | x_0, t) dx \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Można pokazać, że pierwszy moment dla powyższego równania wynosi:

$$\langle dx(t) / x_0 \rangle = F(x_0)dt \quad (2.3.4)$$

Natomiast drugi moment (przy założeniu, $dt \rightarrow 0$ stąd $(dt)^2 \cong 0$) wynosi:

$$\langle (dx(t))^2 / x_0 \rangle = \sigma^2(x_0)dt \quad (2.3.5)$$

Pozostałe momenty znikają przy powyższych założeniach.

Rozważmy funkcję warunkowej gęstości rozkładu prawdopodobieństwa i korzystając z odwrotnej transformaty Fouriera (funkcja $C(z,t,dt,x')$ jest transformatą Fouriera funkcji $P(x,t+dt/x',t)$) uzyskujemy:

$$P(x, t+dt / x', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-x')z} C(z, t, dt, x') dz \quad (2.3.6)$$

Oraz, z rozwinięcia funkcji charakterystycznej w szereg otrzymujemy:

$$P(x, t + dt / x', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-x')z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} \mu_k(x', t, dt) dz$$

Gdzie $\mu_k(x', t, dt)$ to momenty warunkowe zdefiniowane wcześniej.

Można pokazać, że zachodzi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \mu_k(x', t, dt) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z^k e^{-i(x-x')z} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \mu_k(x', t, dt) \frac{1}{(-i)^k} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \delta(x - x')$$

Zatem po prostych przekształceniach otrzymaliśmy zależność:

$$P(x, t + dt / x', t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mu_k(x', t, dt) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \delta(x - x') \quad (2.3.7)$$

Zapiszmy równanie Chapmana - Kołmogorowa:

$$P(x, t + dt / y, s) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t + dt / x', t) P(x', t / y, s) dx' \quad (2.3.8)$$

Podstawiając wcześniej obliczone wyrażenie (2.3.7) otrzymujemy związek:

$$P(x, t + dt / y, s) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x', t / y, s) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mu_k(x', t, dt) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \delta(x - x') dx'$$

Rozpisujemy sumę na dwa składniki, wyraz dla k=0 i pozostałą część sumy, i mamy:

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x', t / y, s) \delta(x - x') dx' + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_k(x', t, dt) P(x', t / y, s) \delta(x - x') dx' \\ &= P(x, t / y, s) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} [\mu_k(x, t, dt) P(x, t / y, s)] \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy równanie:

$$P(x, t + dt / y, s) - P(x, t / y, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} [P(x, t / y, s) \mu_k(x, t, dt)]$$

Czyli możemy zapisać:

$$\frac{\partial P(x, t / y, s)}{\partial t} = \frac{1}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} [P(x, t / y, s) \mu_k(x, t, dt)]$$

Następnie korzystając z faktu, że momenty rzędu wyższego niż drugi wynoszą zero i podstawiając wcześniej obliczone momenty (2.3.4) i (2.3.5) otrzymaliśmy równanie (2.3.1) czyli równanie Fokkera - Plancka.

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [F(x)P(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x)P(x,t)]$$

2.4 Rozwiązanie stacjonarne równania Fokkera – Plancka

Szukanie rozwiązania stacjonarnego równania Fokkera – Plancka ma sens jedynie gdy funkcja rozkładu procesu $X(t)$ pozostaje stała w czasie, poza tym istnieje ono jedynie przy spełnieniu naturalnych warunków brzegowych (sprecyzowane niżej) lub istnieniu barier redukujących dziedzinę procesu do skończonego przedziału. Barrierami nie będziemy zajmować się w tej pracy omówione zostaną natomiast przykłady procesów przy założeniu istnienia naturalnych warunków brzegowych.

Rozważmy równanie Fokkera - Plancka (2.3.1) zapisane wyżej.

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [F(x)P(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x)P(x,t)]$$

Jeżeli zakładamy, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa pozostaje niezmienna w czasie wtedy $P(x,t)=P(x)$ i równanie (2.3.1) sprowadza się do równania następującej postaci:

$$- \frac{\partial}{\partial x} [F(x)P(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x)P(x,t)] = 0$$

Wielkość $J(x)$ nazywamy prądem prawdopodobieństwa.

$J(x)$ jest zdefiniowany poprzez:

$$J(x) = F(x)P(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\sigma^2(x)P(x)]$$

Zakładamy naturalne warunki brzegowe tzn. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} P(x) = 0$, lub istnienie granic odbijających, dla których zachodzi $J(x) = 0$. Z tego warunku otrzymujemy:

$$-F(x)P(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\sigma^2(x)P(x)] = 0 \quad (2.4.1)$$

Rozwiązujemy równanie (2.4.1) i otrzymujemy stacjonarne rozwiązanie równania Fokkera – Plancka postaci:

$$P_{st}(x) = \frac{C}{\sigma^2(x)} \exp \left(\int \frac{2F(x)}{\sigma^2(x)} dx \right) \quad (2.4.2)$$

Jest to, co prawda rozwiązanie dla pewnej szczególnej klasy procesów. Mimo to jest ono bardzo ważne gdyż w wielu przypadkach procesy są stacjonarne lub w przybliżeniu stacjonarne albo też dają się poprzez różne zabiegi do takowych sprowadzić. W przypadku, gdy badany proces nie jest stacjonarny rozwiązanie równania Fokkera – Plancka jak również obliczenie parametrów procesu jest niezwykle trudne.

2.5 przejście indukowane parametrem

Niekiedy dla szczególnych postaci równania Langevina jesteśmy w stanie dostrzec pewne zjawiska jak na przykład zmianę rozwiązania stacjonarnego równania Fokkera – Plancka z rozkładu o jednym maksimum (układu monostabilnego) w rozkład o dwóch maksimach (układ bistabilny) przy zmianie jednego z parametrów równania. Taką zmianę będziemy nazywać przejściem indukowanym parametrem a zjawisko przejścia jednego ekstremum lokalnego w trzy ekstrema nazywać będziemy bifurkacją natomiast zjawisko pojawienia się maksimum i minimum nazywać będziemy rozdzieleniem. Są to zjawiska stosunkowo podobne do przejść fazowych zachodzących w stanie równowagi termodynamicznej. W niniejszym rozdziale postaramy się porównać różnice i podobieństwa obydwóch zjawisk.

Należy jeszcze raz zaznaczyć, że zmienną której dynamikę opisuje równanie Langevina nie musi być położenie cząstki. Może być to zarówno dowolna wielkość fizyczna jak i dowolna wielkość interesująca nas w ramach dowolnej innej dziedziny naukowej.

Przykład.

Rozważmy równanie Stratonowicza (jak zostało już zaznaczone wcześniej dla stałej wartości s interpretacja Ito jest tożsama z interpretacją Stratonowicza) postaci:

$$dx = [-x + a \sin(x)] dt + s dW(t) \quad (2.5.1)$$

Wtedy przy powyższych założeniach równanie Fokkera - Plancka odpowiadające równaniu (2.5.1) jest postaci:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [-x + (a \sin(x)) P(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (s^2 P(x,t)) \quad (2.5.2)$$

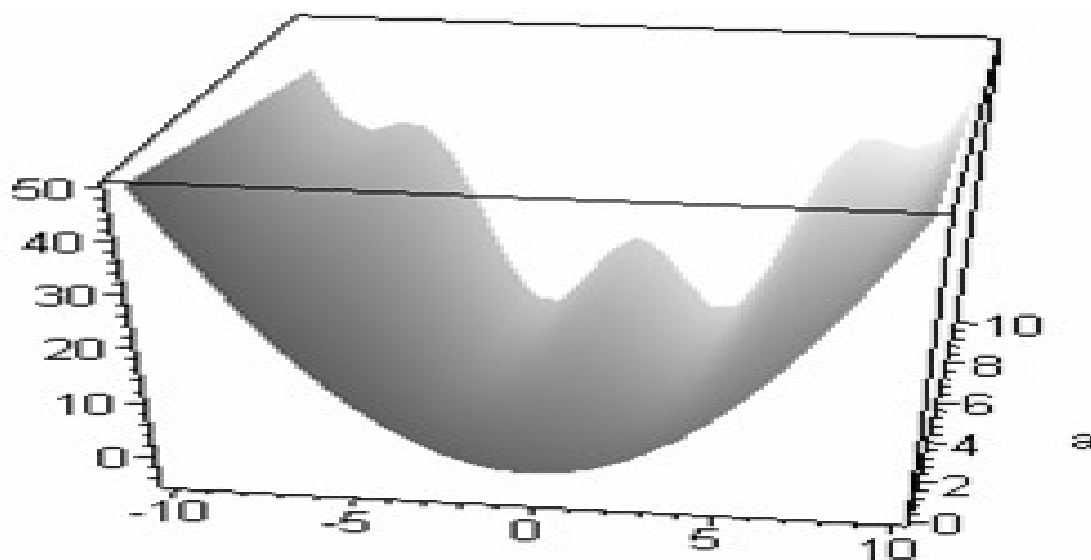
Stąd rozwiązanie stacjonarne dla naturalnych warunków brzegowych jest postaci:

$$P_{st}(x) = C \exp\left(\frac{-x^2 - 2a \cos(x)}{s^2}\right) \quad (2.5.3)$$

Czynnik normujący C znajdujemy z warunku Normalizacyjnego (1.1.1). C przyjmuje różne wartości np. $C=167, \dots$ dla $a=3$ i $s=0,5$; $C=7 \cdot 10^{-13}$ dla $a=5$ i $s=0,25$.

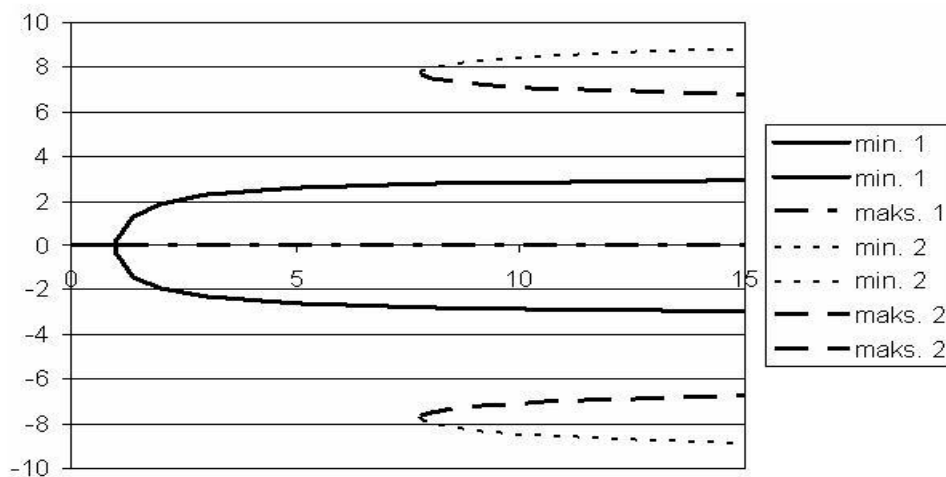
Zbadajmy potencjał

$$V(x) = \frac{1}{2} x^2 + a \cos(x) \quad (2.5.4)$$



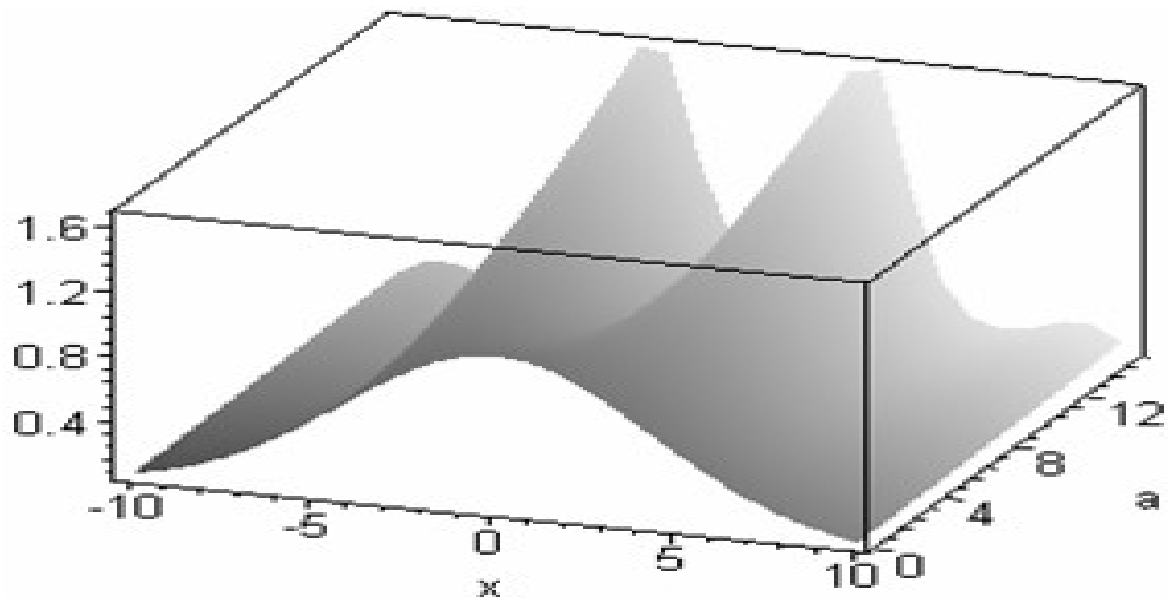
Rys. 2.5.1 Wykres przedstawia potencjał (2.5.4) w zależności od parametru a .

Jak widać zachodzi to przejście indukowane parametrem. Owo rozszczepienie jednego minimum na dwa minima i jedno maksimum nazywamy bifurkacją.



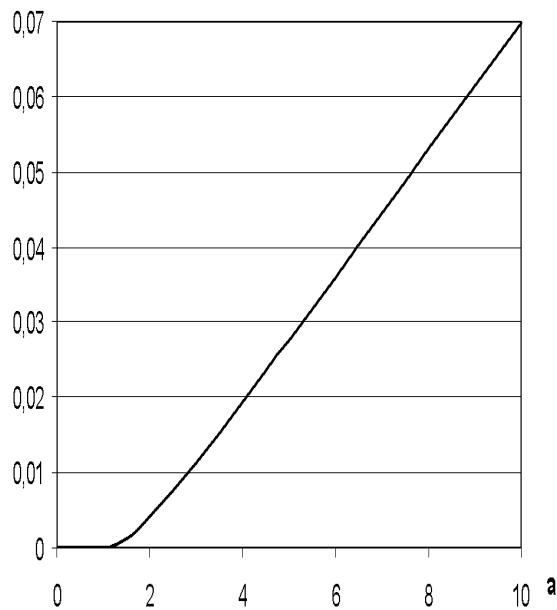
Rys. 2.5.2 Diagram bifurkacji rozwidleniowej, która zachodzi przy zmianie parametru a .

Ekstrema potencjału odpowiadają ekstremom funkcji gęstości rozkładu. W funkcji gęstości rozkładu także dochodzi do bifurkacji.

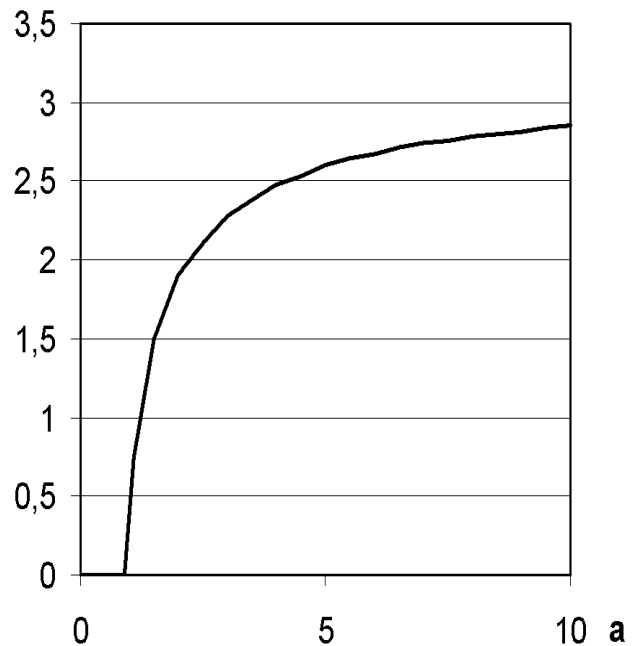


Rys. 2.5.3 Wykres funkcji gęstości w zależności od parametru a dla ustalonej wartości parametru $s = 6$.

Oznaczmy przez d_1 różnicę między ekstremami (maks.-min.) funkcji gęstości rozkładu a przez d_2 różnicę między położeniami ($d_2 = |\text{położenie maksimum} - \text{położenie minimum}|$) wtedy widać, że $d_1, d_2 = f(a)$. Wykresy przedstawiają zależności funkcji od parametru a .



Rys. 2.5.4 Wykres różnicy między wysokością maksimum i minimum d_1 .

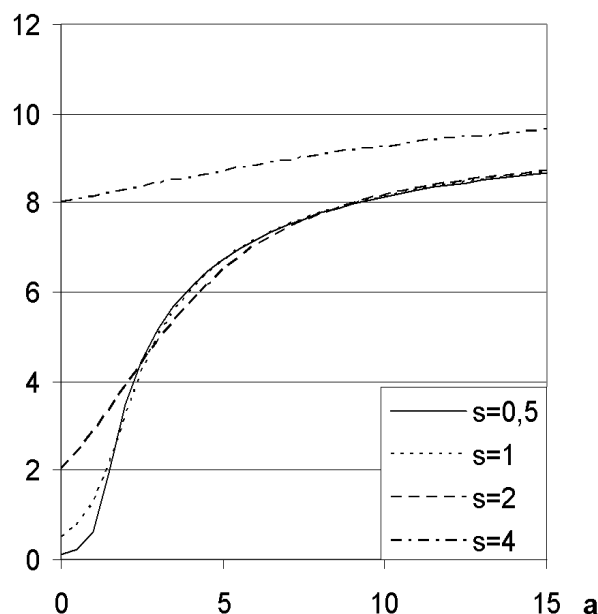


Rys. 2.5.5 Wykres różnicy między położeniem maksimum i minimum d_2 .

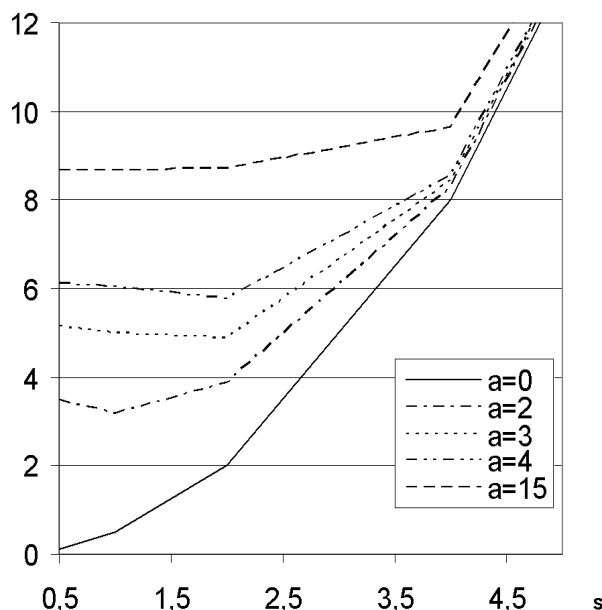
Zarówno wykresu funkcji gęstości widać, że wartość średnia wynosi zero niezależnie od wartości parametrów a i s . Zarówno potencjał jak i funkcja gęstości rozkładu są funkcjami parzystymi, zatem ich skośność wynosi zero. Zbadajmy zależność wariancji i odstępstwo rozkładu stacjonarnego od rozkładu Gaussa (kurtozę) w zależności od parametru a oraz s . Przy wartości $a=0$ można porównać rozkład z rozkładem Gaussa i zapisać równanie $s^2 = 2\sigma^2$ gdzie σ^2 oznacza wariancję

rozwiązując owo równanie otrzymujemy: $\sigma^2 = \frac{s^2}{2}$ można na tej podstawie dojść do

błédnego wniosku, że w miarę jak rośnie s wariancja zawsze będzie rosnać. Na wykresie wariancji dla ustalonego parametru a widać jednak, że dla wartości $a=2$, $a=3$ oraz $a=4$ wariancja może maleć. Dla małych wartości parametru s w miarę jak rośnie a wariancja rośnie, przy większych wartościach s przyrost a nie ma na wariancję większego wpływu.

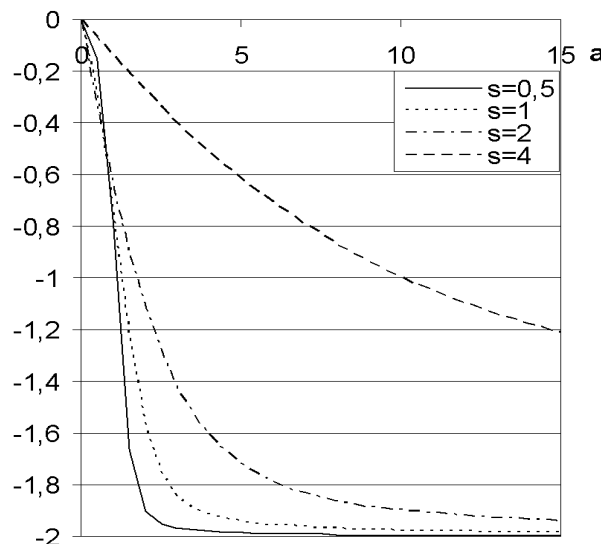


Rys. 2.5.6 wykres wariacji w zależności od parametru a dla ustalonych wartości s .

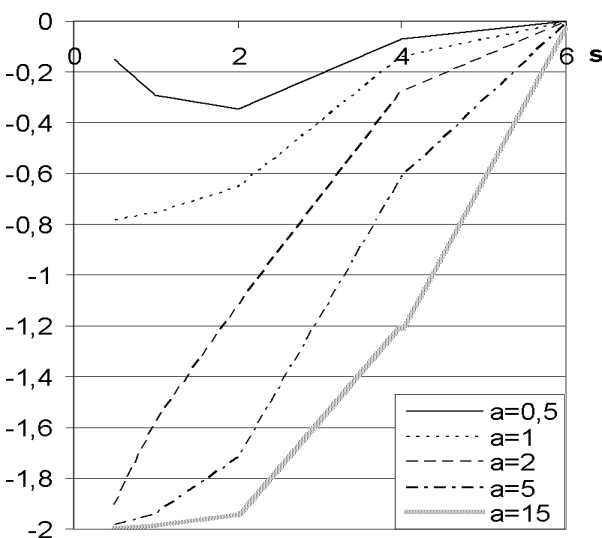


Rys. 2.5.7 wykres wariacji w zależności od parametru s dla ustalonych wartości a .

Oczywiste jest to, że dla wartości $a=0$ kurtoza rozkładu także wynosi 0 wynika to z faktu, że dla $a=0$ funkcja jest rozkładem Gaussa. Ujemne wartości kurtozy oznaczają tzw. „chude ogony”, oznacza to, że badany rozkład ma stosunkowo niską szczytowość. W miarę jak rośnie s wartość a przestaje mieć znaczenie i kurtoza dąży do zera.



Rys. 2.5.8 wykres kurtozy w zależności od parametru a dla ustalonych wartości s .



Rys. 2.5.9 wykres kurtozy w zależności od parametru s dla ustalonych wartości a .

Rozważany przykład jest stosunkowo podobny do modelu przejścia paramagnetyka w ferromagnetyk (model Isinga [6]) podczas oziębiania układu.

Analogicznie do wartości krytycznej parametru a w modelu przejścia fazowego występuje wartość krytyczna temperatury T_c . Analogiczna do modelu Isinga wielkość X byłaby średnim namagnesowaniem nazywanym także „parametrem porządku”. Przejście charakteryzuje model Isinga i jest następujące: dla temperatur poniżej wartości T_c występują dwie najbardziej prawdopodobne wartości średniego namagnesowania (większość spinów ułożona w górę lub w dół). Dla temperatur powyżej T_c spiny są ułożone w taki sposób, że średnie namagnesowanie wynosi zero. W badanym układzie natomiast wartość średnia zawsze wynosi zero więc nie jest ona na parametrem porządku. Nie znaczy to, że wartość obserwowalna wynosi zero, z funkcji rozkładu wynika, że w eksperymencie obserwowalibyśmy najczęściej dwie wartości odpowiadające maksimum funkcji rozkładu. Za parametr porządku można w tym przykładzie obrać różnicę między ekstremami funkcji rozkładu (Rys. 2.5.4 oraz Rys. 2.5.5). Mimo powyższych podobieństw przejścia indukowane parametrem nie są przejściami fazowymi. Między tymi dwoma zjawiskami występują zasadnicze różnice. Mianowicie w badanym układzie (2.5.1) nie ma odpowiednika liczby cząstek stąd nie może być mowy o przejściu do granicy termodynamicznej (opisanej w [6] oraz we wstępie) a co za tym idzie żadne przejście fazowe nie może zachodzić.

Przykład.

Rozważmy równanie Ito (jako że s jest stałe równie dobrze równanie (2.5.5) można nazywać równaniem Stratonowicza) postaci:

$$dx = (-x - a \cos(x))dt + s dW \quad (2.5.5)$$

Równanie Fokkera - Plancka ma postać:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [(-x - a \cos(x))P(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (s^2 P(x,t)) \quad (2.5.6)$$

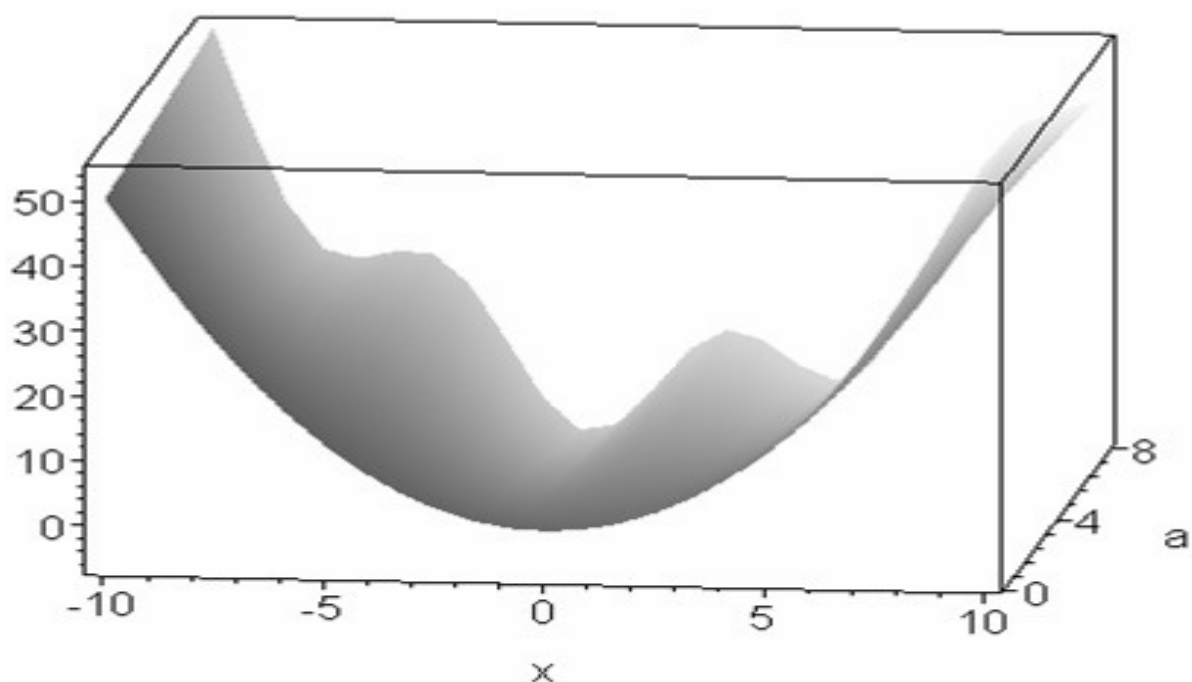
Stąd rozwiązanie stacjonarne dla naturalnych warunków brzegowych jest postaci:

$$P_{st}(x) = C \exp \left(\frac{-x^2 - 2a \sin(x)}{s^2} \right) \quad (2.5.7)$$

Potencjał odpowiadający tej funkcji gęstości rozkładu ma postać:

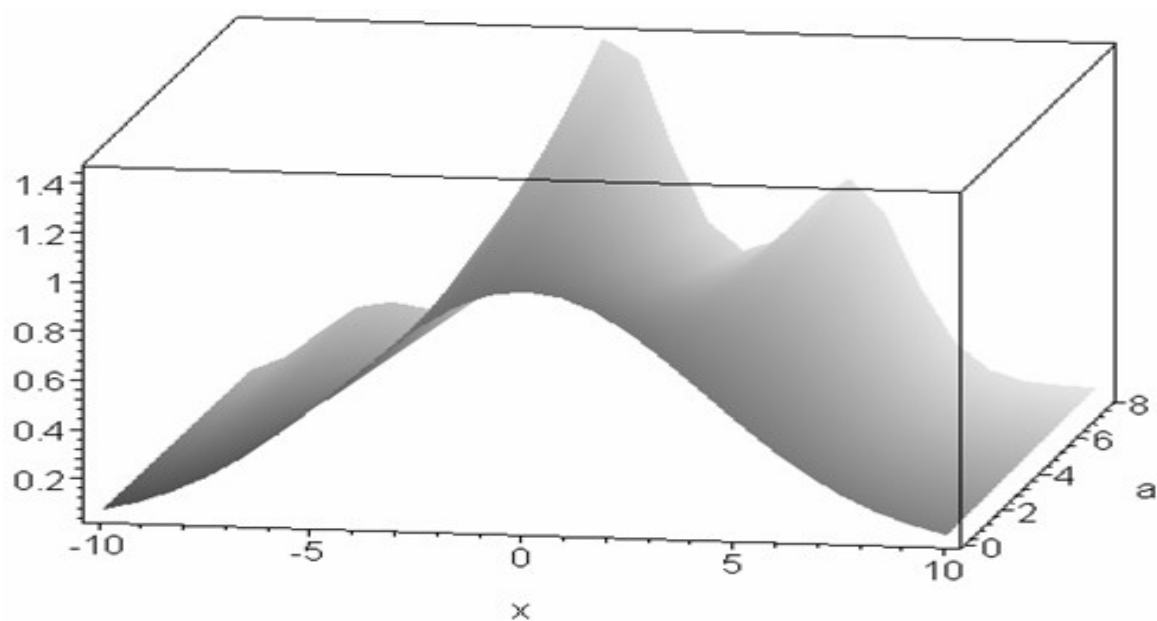
$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \sin(x) \quad (2.5.8)$$

Zbadajmy potencjał w zależności od parametru a . Jak widać potencjał nie jest funkcją parzystą stąd jest to przypadek asymetryczny.



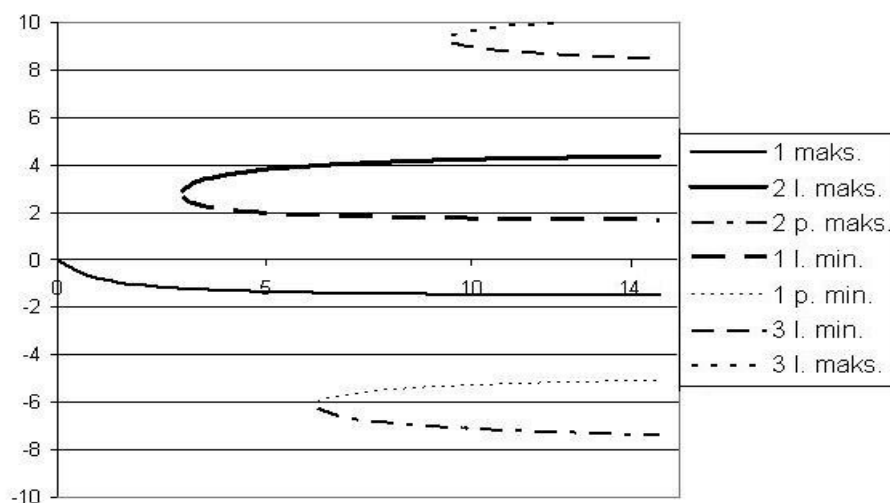
Rys. 2.5.10 wykres potencjału dla różnych wartości parametru a .

Zbadajmy funkcję rozkładu przy różnych wartościach parametru a , oraz parametry rozkładu dla różnych wartości parametrów a i s .



Rys. 2.5.11 wykres funkcji rozkładu dla różnych wartości parametru a oraz przy ustalonej wartości parametru $s=6$.

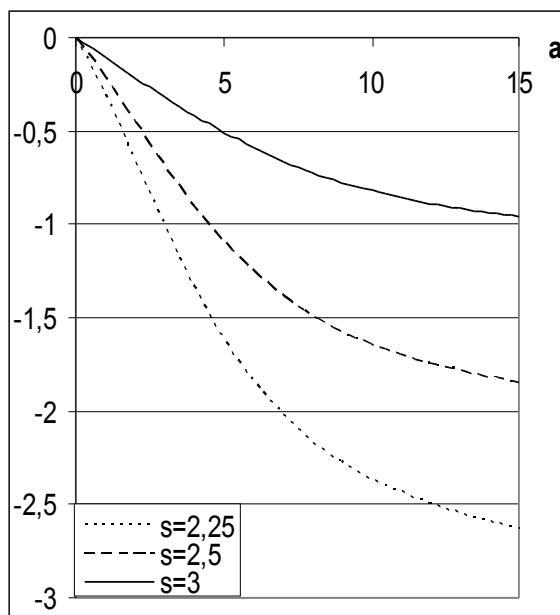
Z powyższych wykresów widać, że w tym przypadku zachodzą rozdwojenia, których diagram przedstawiono poniżej.



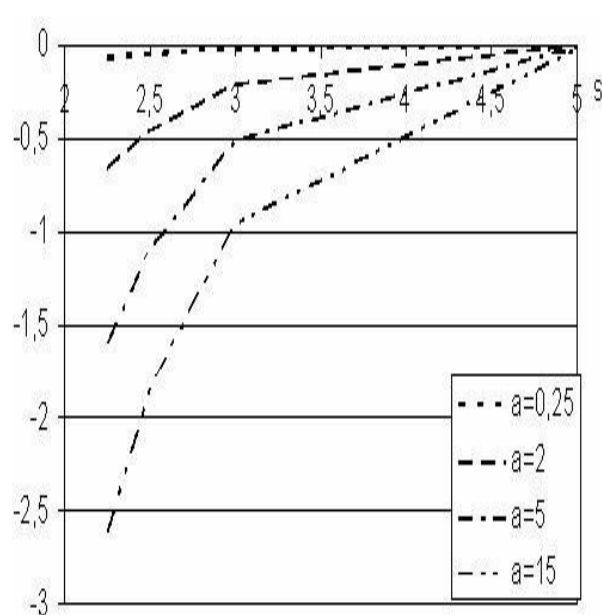
Rys.2.5.12 diagram rozdwojeń dla rozkładu stacjonarnego przy wartości parametru $s=6$ w zależności od parametru a .

Zbadajmy parametry rozkładu. W poprzednim przykładzie odrzuciliśmy wartość średnią i skośność ze względu na symetryczność rozkładu bez względu na wartości parametrów, ten przypadek jest asymetryczny stąd zachodzi potrzeba zbadania nie tylko wariancji i kurtozy ale również wartości średniej i skośności.

Wartość średnia maleje wraz ze wzrostem parametru a (rysunek 2.5.13), natomiast ze wzrostem s dla ustalonego a średnia dąży do zera (rysunek 2.5.14).

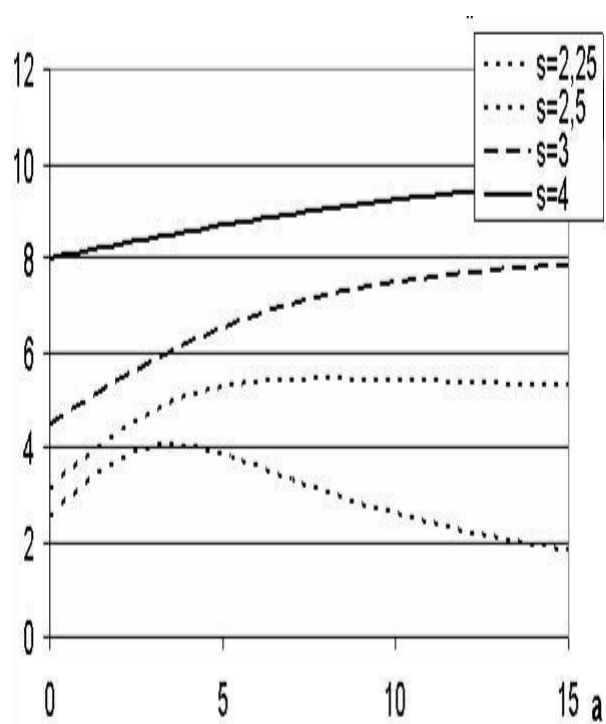


Rys. 2.5.13 wykres wartości średniej w zależności od wartości parametru a dla ustalonych wartości parametru s .

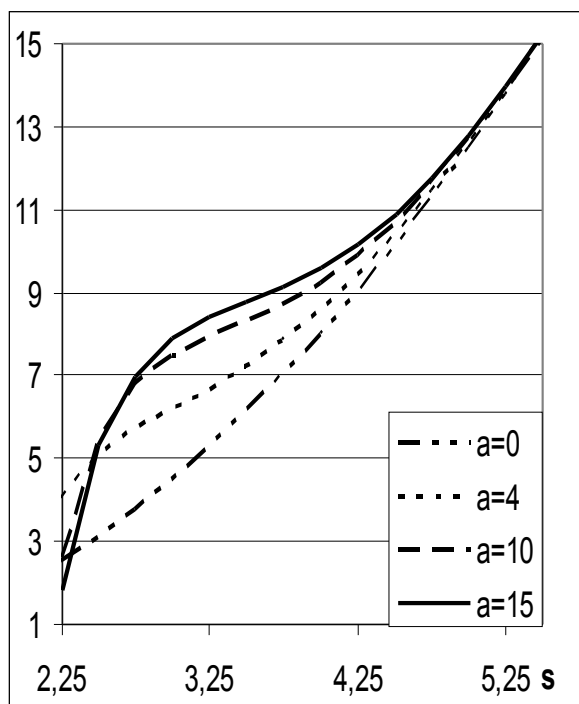


Rys. 2.5.14 wykres wartości średniej w zależności od wartości parametru s dla ustalonych wartości parametru a .

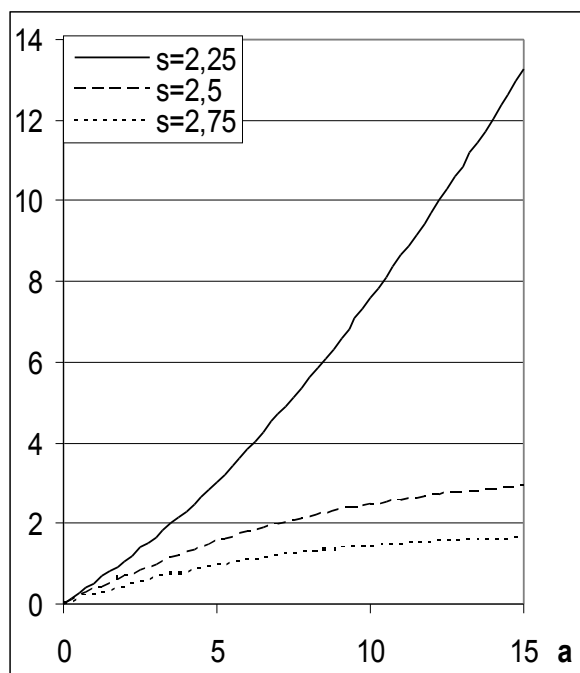
Dla wartości $s=2,25$ wariancja może maleć wraz z przyrostem parametru a (rysunek 2.5.15), w tym przypadku wraz ze wzrostem parametru a funkcja gęstości rozkładu dąży do funkcji delta, przy ustalonej wartości parametru a przy wzroście s rośnie także wariancja (rysunek 2.5.16). Wraz ze wzrostem parametru a rośnie parametr asymetrii rozkładu skośność. Świadczy to o prawostronnej asymetrii (rysunek 2.5.17). Dodatnia wartość kurtozy świadczy o tak zwanych „grubych ogonach”, czyli rozkład o stosunkowo dużej szczytowości rozkładu (rysunek 2.5.19). Zarówno skośność jak i kurtoza w miarę jak rośnie s znikają (rysunki 2.5.18 oraz 2.5.20). Wykresy parametrów rozkładu przedstawiono poniżej.



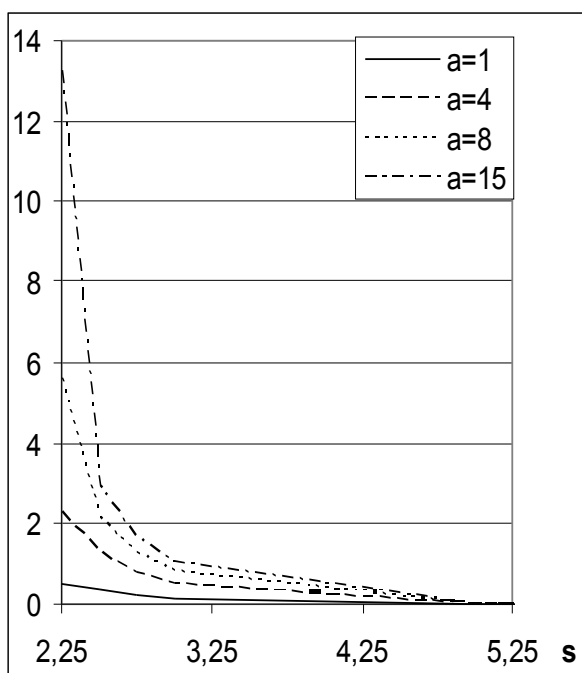
Rys. 2.5.15 wykres wariancji w zależności od wartości parametru a dla ustalonych wartości parametru s .



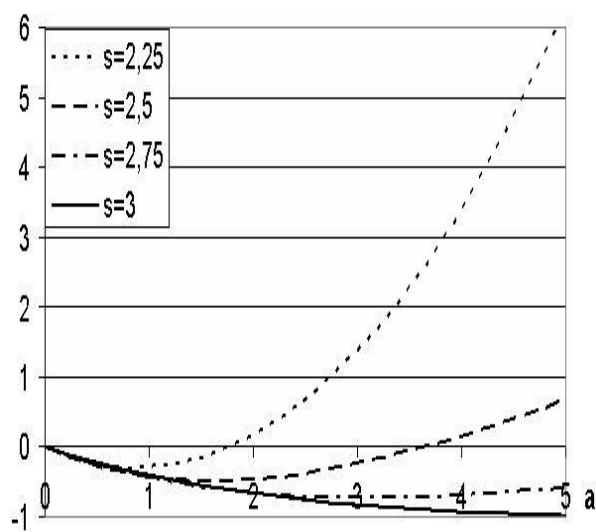
Rys. 2.5.16 wykres wariancji w zależności od wartości parametru s dla ustalonych wartości parametru a .



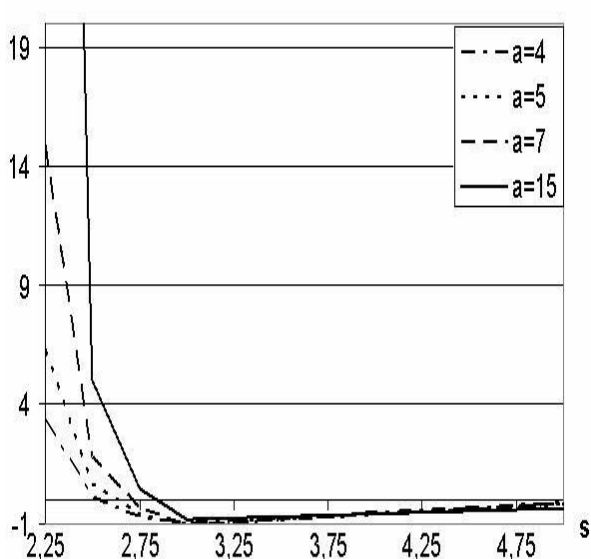
Rys. 2.5.17 wykres skośności
w zależności od wartości parametru a
dla ustalonych wartości parametru s .



Rys. 2.5.18 wykres skośności
w zależności od wartości parametru s
dla ustalonych wartości parametru a .



Rys. 2.5.19 wykres kurtოzy
w zależności od wartości parametru a
dla ustalonych wartości parametru s .



Rys. 2.5.20 wykres kurtοzy
w zależności od wartości parametru s
dla ustalonych wartości parametru a .

W tym przykładzie możemy obrać wartość średnią za parametr porządku z uwagi na jej zmianę podczas zmiany wartości parametru a . Ten przykład jest z tego powodu jeszcze bliższą analogią przejścia fazowego.

3. Układ dwóch szumów nieskorelowanych

Jak napisano już we wstępie na układ może wpływać wiele szumów. Przypadki dwóch szumów zostaną omówione w dalszej części pracy. Zbadany zostanie wpływ na dynamikę układu, różnego rodzaju funkcji amplitudy szumu (opis rozdział 3.1) zbadana zostanie także zależność działania szumów na układ w zależności od różnych parametrów.

3.1 Klasyfikacja szumów

Zapiszmy równanie Langevina postaci:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \sigma(x)\xi(t) \quad (3.1.1)$$

σ jest w tym równaniu amplitudą szumu.

W zależności od funkcji σ szumy klasyfikujemy na:

Szum addytywny: występuje dla stałej amplitudy szumu.

Szum multiplikatywny: występuje, kiedy amplituda jest funkcją x .

3.2 Efektywne równanie Ito

Niech równanie Ito ma postać:

$$dx = F(x)dt + \sigma_1(x)dW_1(t) + \sigma_2(x)dW_2(t) \quad (3.2.1)$$

Wtedy na mocy uzasadnienia 3, (należy skorzystać z wzorów otrzymanych w rozdziale 4.1 dla układu szumów skorelowanych a następnie przyjąć, że stopień

korelacji $r = 0$ oraz siły szumów $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$) wtedy zachodzi:

$$\langle dW_1 dW_2 \rangle = \langle dW_2 dW_1 \rangle = 0$$

Równanie Ito postaci (3.2.1) formalnie odpowiada, równaniu Fokkera - Plancka postaci:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [P(x,t)F(x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [P(x,t)(\sigma_1^2(x) + \sigma_2^2(x))] \quad (3.2.2)$$

Na mocy uzasadnienia 2 można więc zapisać równanie efektywne:

$$dx = F(x)dt + \sqrt{\sigma_1^2(x) + \sigma_2^2(x)} d\tilde{W}(t) \quad (3.2.3)$$

Gdzie $\tilde{W}(t)$ jest efektywnym procesem Wienera.

W przypadku, gdy szumy występujące w układzie są nieskorelowane równanie typu (3.2.1) możemy zastąpić równaniem efektywnym (3.2.3) które formalnie odpowiada temu samemu równaniu Fokkera – Plancka co równanie z dwoma szumami.

3.3 Przejście indukowane szumem

Przejścia omawiane w rozdziale 2.5 nie są jedynymi które mogą zachodzić w rozwiązaniu stacjonarnym równania Fokkera – Plancka. Zjawiska podobne do tych opisanych w rozdziale 2.5 mogą zachodzić przy zmianie wartości parametru od którego zależy amplituda szumu w równaniu Langevina. Takie zjawiska nazywać będziemy przejściami indukowanymi szumem.

Przykład.

Niech równanie Langevina ma postać:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 \sin^2(x) + s^2} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{a^2 \sin^2(x) + s^2} - \frac{a^2}{2} \cos(x) \sin(x) + a \sin(x) \xi_1(t) + s \xi_2(t) \quad (3.3.1)$$

Niech będzie spełnione założenie o nieskorelowaniu szumów:

$$\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = \langle \xi_1 \xi_2 \rangle = 0$$

Zauważmy, że ξ_1 to szum multiplikatywny a ξ_2 to szum addytywny.

Równoważne Ito jest postaci:

$$dx = \left[-x + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 \sin^2(x) + s^2} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{a^2 \sin^2(x) + s^2} \right] dt + a \sin(x) dW_1(t) + s dW_2(t)$$

Oznaczmy powyższe równanie przez (3.3.2).Efektywne równanie Ito ma formę:

$$dx = \left(-x + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 \sin^2(x) + s^2} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{a^2 \sin^2(x) + s^2} \right) dt + \sqrt{a^2 \sin^2(x) + s^2} dW(t) \quad (3.3.3)$$

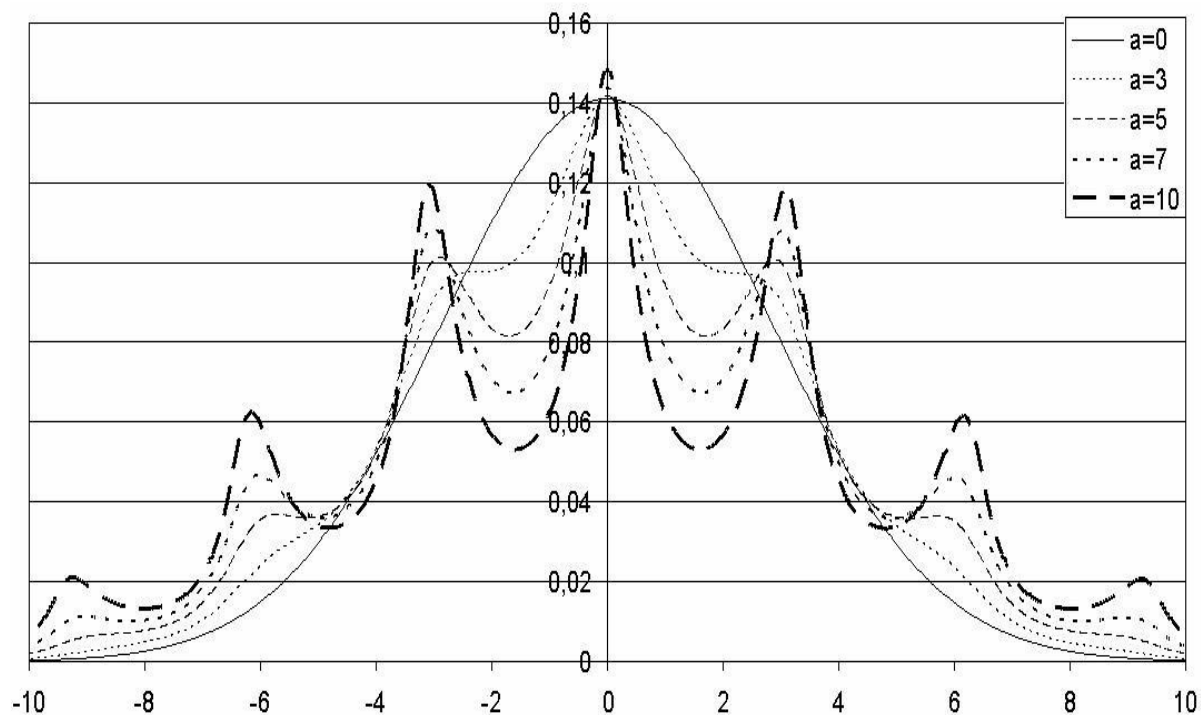
Gdzie $dW(t)$ jest przyrostem efektywnego procesu Wienera.

Natomiast formalnie odpowiadające mu równanie Fokkera - Plancka jest postaci:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[P \left(-x + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 \sin^2(x) + s^2} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{a^2 \sin^2(x) + s^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(a^2 \sin^2(x) + s^2) P] \quad (3.3.4)$$

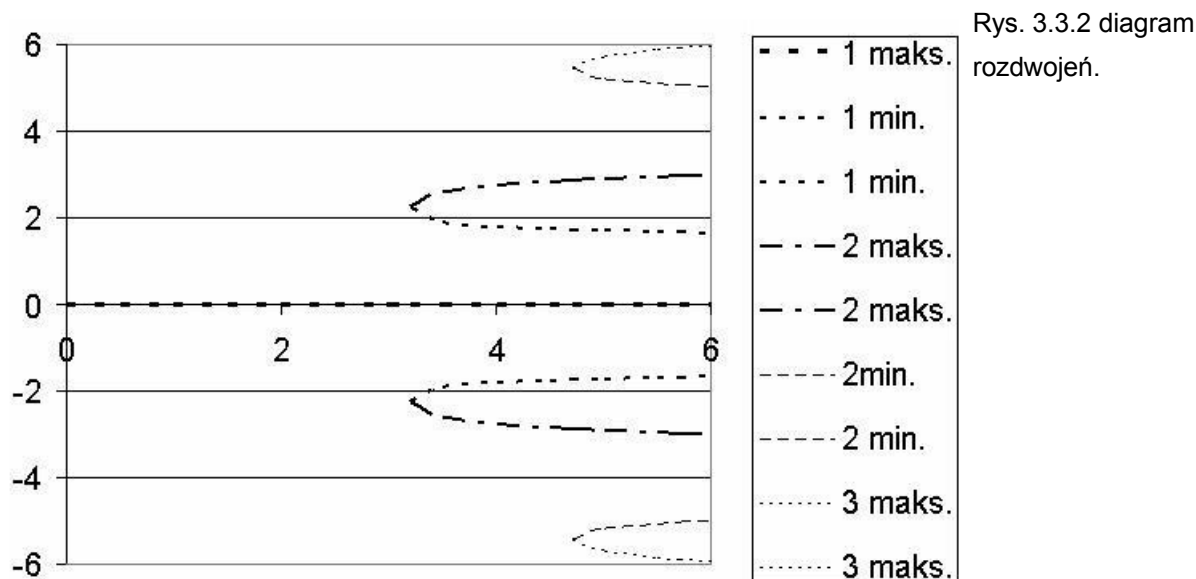
Rozwiązanie stacjonarne równania Fokkera – Plancka w tym przypadku jest następujące:

$$P_{st} = \frac{C}{\sqrt{s^2 + a^2 \sin^2(x)}} \exp \left(- \int \frac{2x}{s^2 + a^2 \sin^2(x)} dx \right) \quad (3.3.5)$$

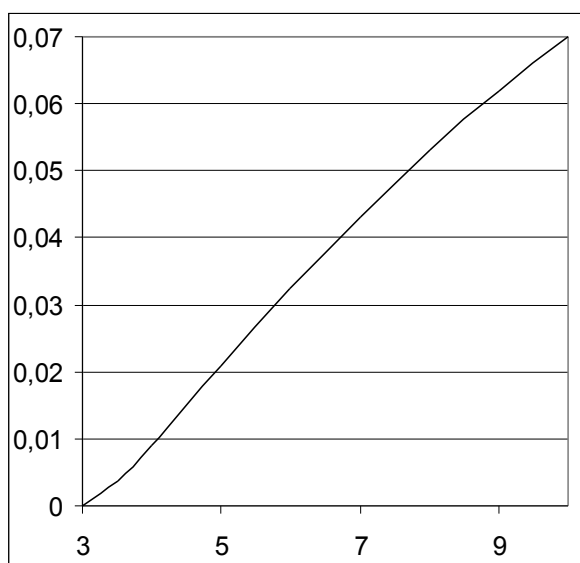


Rys.3.3.1 wykres funkcji gęstości rozkładu (3.3.5) dla różnych wartości parametru a oraz dla ustalonej wartości parametru $s=4$.

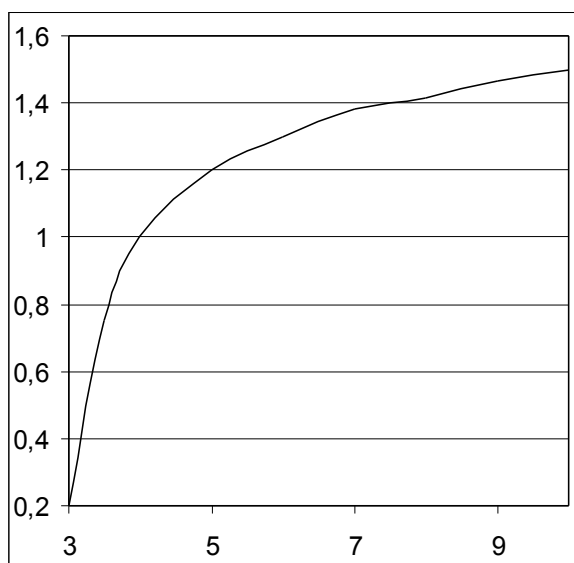
Jak widać także i w tym przypadku zachodzą rozdwojenia (diagram niżej).



Jest to przypadek symetryczny. Różnice w wysokości między 2 maksimum a 1 minimum po (rysunek 3.3.3) oraz różnice między położeniem 2 maksimum i 1 minimum (rysunek 3.3.4).

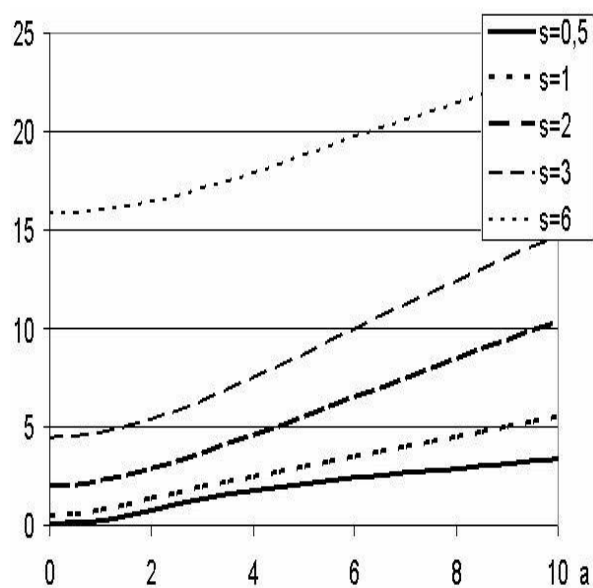


Rys. 3.3.3 Wykres różnicy między wysokością 2 maksimum i 1 minimum.

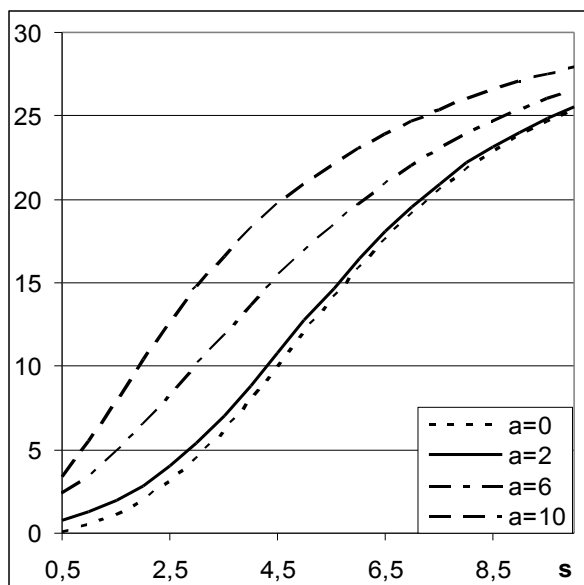


Rys. 3.3.4 Wykres różnicy między położeniem 2 maksimum i 1 minimum.

Zbadajmy parametry rozkładu w zależności od parametrów a i s . Zarówno wartość średnia jak i skośność nie zmieniają się wraz ze zmianą żadnego z parametrów wynika to z faktu, że funkcja wykresu jest funkcją parzystą. Wariancja jak widać na poniższych wykresach rośnie zarówno wraz ze wzrostem parametru a jak i parametru s (rysunki 3.3.5 i 3.3.6)

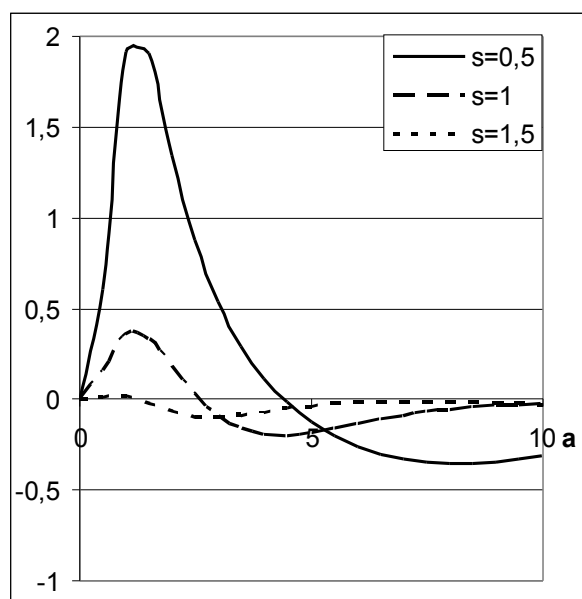


Rys. 3.3.5 Wykres wariacji dla ustalonych s w zależności od a .

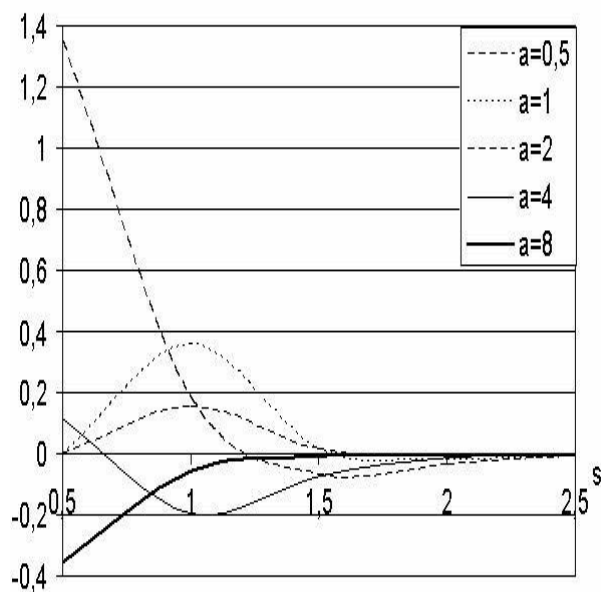


Rys. 3.3.6 Wykres wariacji dla ustalonych a w zależności od s .

Kurtoza dąży do zera wraz ze wzrostem parametru s , natomiast wraz ze wzrostem parametru a kurtoza dąży do zera asymptotycznie.



Rys. 3.3.7 Wykres kurtozy dla ustalonego s w zależności od a .



Rys. 3.3.8 Wykres kurtozy dla ustalonego a w zależności od s .

Jest to przypadek symetryczny więc wartość średnia nie może być w tym przypadku parametrem porządku. Warunek przejścia do granicy termodynamicznej nie jest spełniony więc nie może to być przejście fazowe.

4. Układ dwóch szumów skorelowanych

Przypadki omawiane w poprzednich rozdziałach są układami w których czynnik wywołujący przejście występuje w równaniu Langevina w sposób jawny. Jak będzie przedstawione w poniższych przykładach przejście może wywoływać także stopień skorelowania szumów oraz siły szumów (rozdział 4.1).

4.1 Równanie Langevina a równanie Fokkera – Plancka

Rozważmy układ szumów:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \sigma_1(x)\xi_1(t) + \sigma_2(x)\xi_2(t) \quad (4.1.1)$$

Przy czym zachodzi:

$$\langle d\xi_i \rangle = 0 \quad (4.1.2)$$

$$\langle d\xi_i(t)d\xi_j(t') \rangle = \langle d\xi_j(t)d\xi_i(t') \rangle = 2\alpha_{ij}\delta(t-t') \quad (4.1.3)$$

Dla prostoty oznaczmy $\alpha_{ii} = \alpha_i$ oraz zapiszmy, że zachodzi $\alpha_{12} = \alpha_{21} = r\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ gdzie przez r oznaczmy stopień skorelowania szumów a współczynniki α_i to „siły” poszczególnych szumów. Z zależności 4.1.3 można pokazać, że zachodzi:

$$\langle dW_i dW_j \rangle = 2\alpha_{ij}dt$$

Postępując z równaniem (4.1.1) analogicznie jak w uzasadnieniu 1 przy założeniach (4.1.2) oraz (4.1.3) można pokazać, że równanie Ito w tym przypadku ma postać:

$$dx = F_1(x)dt + \sigma_1(x)dW_1(t) + \sigma_2(x)dW_2(t) \quad (4.1.4)$$

Gdzie $F_1(x)$ oznacza:

$$F_1(x) = F(x) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_j}{\partial x} \sum_{i=1}^2 \sigma_i \alpha_{ij} \quad (4.1.5)$$

Stosowne równanie Fokkera - Plancka ma postać:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \{ P(x,t) [F_1(x)] \} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(\sigma_1^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \alpha_2 + 2\sigma_1 \sigma_2 r \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \right) \right] \quad (4.1.6)$$

Uzasadnienie 3 Rozważmy następujące równanie Ito:

$$dx = F_1(x)dt + \sigma_1(x)dW_1(t) + \sigma_2(x)dW_2(t) \quad (4.1.7)$$

Gdzie wyrazy dW_i definiujemy przez $\langle dW_i \rangle = 0$ oraz $\langle dW_i dW_j \rangle = \langle dW_j dW_i \rangle = 2\alpha_{ij}dt$. Dla prostoty oznaczmy $\alpha_{ii} = \alpha_i$. Wprowadźmy dowolną dwukrotnie różniczkowalną funkcję $U(x)$. Przyrost funkcji dU wynosi $dU = U[x(t+dt)] - U[x(t)]$. Można pokazać, że zachodzi:

$$dU(X) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{(dx)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots \quad (4.1.8)$$

Następnie podstawiamy dx pamiętając o własnościach procesów Wienera w tym przypadku oraz zakładając, że $dt \rightarrow 0$ (czyli $dt \cong 0$) otrzymujemy:

$$dU(X) = dt \frac{\partial U}{\partial x} F_1(x) + dt \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} (\sigma_1^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \alpha_2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \alpha_{12}) \quad (4.1.9)$$

Zdefiniujmy wartość średnią funkcji $U(x)$:

$$\langle U(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) P(x, t) dx$$

Stąd:

$$\langle dU(X) \rangle = dt \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial U}{\partial x} F_1(x) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} (\sigma_1^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \alpha_2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \alpha_{12}) \right] P(x, t) dx \quad (4.1.10)$$

Jako, że funkcja $U(x)$ nie zależy w sposób jawny od czasu możemy zapisać:

$$\langle dU(X) \rangle = dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} U(x) dx \quad (4.1.11)$$

Następnie porównujemy równania (4.1.10) i (4.1.11) i otrzymujemy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} U(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial U}{\partial x} F_1(x) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} (\sigma_1^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \alpha_2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \alpha_{12}) \right] P(x, t) dx$$

Rozwiązujemy przez części całki po prawej stronie równania a następnie zakładamy:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = 0 \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial P(x)}{\partial x} = 0$$

Stąd otrzymujemy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} U(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} [F_1(x)P(x,t)] \right\} dx + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(\sigma_1^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \alpha_2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \alpha_{12}) P(x,t) \right] dx$$

Porównując wyrażenia podcałkowe otrzymujemy równanie Fokkera – Plancka (4.1.6):

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (F_1(x)P(x,t)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(\sigma_1^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \alpha_2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \alpha_{12}) P(x,t) \right]$$

4.2 Przykłady przejść w układach dwóch szumów skorelowanych

Przykład 1 [2].

Rozważmy równanie, Langevina postaci:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 + x\xi_1(t) + \xi_2(t) \quad (4.2.1)$$

Przy założeniach, że:

$$\langle \xi_1(t) \xi_1(t') \rangle = 2D \delta(t - t')$$

$$\langle \xi_2(t) \xi_2(t') \rangle = 2a \delta(t - t')$$

$$\langle \xi_1(t) \xi_2(t') \rangle = \langle \xi_2(t) \xi_1(t') \rangle = 2r\sqrt{Da} \delta(t - t')$$

Równanie Fokkera – Plancka jest następujące:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ P(x,t) \left[-x^3 + (1+D)x + r\sqrt{aD} \right] \right\} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(Dx^2 + 2r\sqrt{aD}x + a) P \right] \quad (4.2.2)$$

Rozwiązanie stacjonarne równania Fokkera - Plancka jest następującej postaci:

$$P_{st}(x) = N \{ Dx^2 + 2r\sqrt{Da}x + a \}^{C-0,5} \times \\ \times \exp \left\{ f(x) + \frac{E}{\sqrt{(1-r^2)Da}} \arctg \left[\frac{Dx + r\sqrt{Da}}{\sqrt{(1-r^2)Da}} \right] \right\}$$

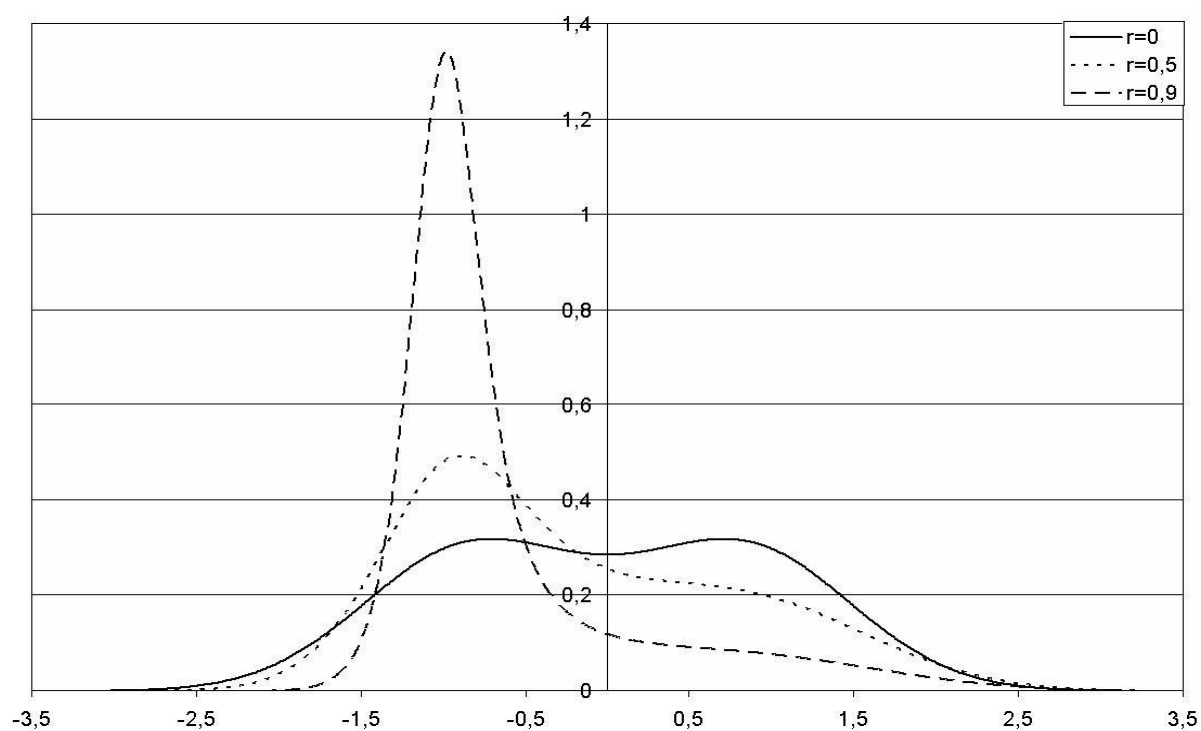
Gdzie poszczególne funkcje oznaczają:

$$f(x) = -\frac{x^2}{2D} + 2r\sqrt{\frac{a}{D}}\frac{x}{D}$$

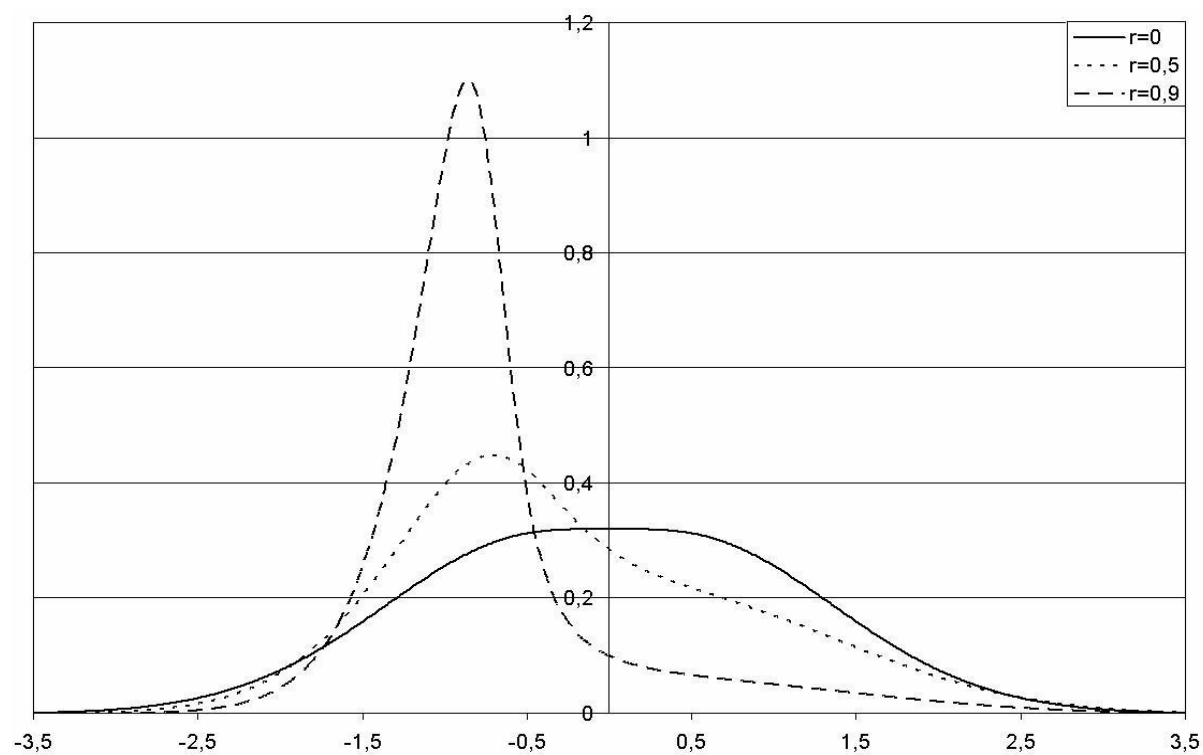
$$E = r\sqrt{\frac{a}{D}}\left[\left(4r^2 - 3\right)\frac{a}{D} - 1\right]$$

$$C = \frac{1}{2D}\left[1 - \left(4r^2 - 1\right)\frac{a}{D}\right] \quad (4.2.3)$$

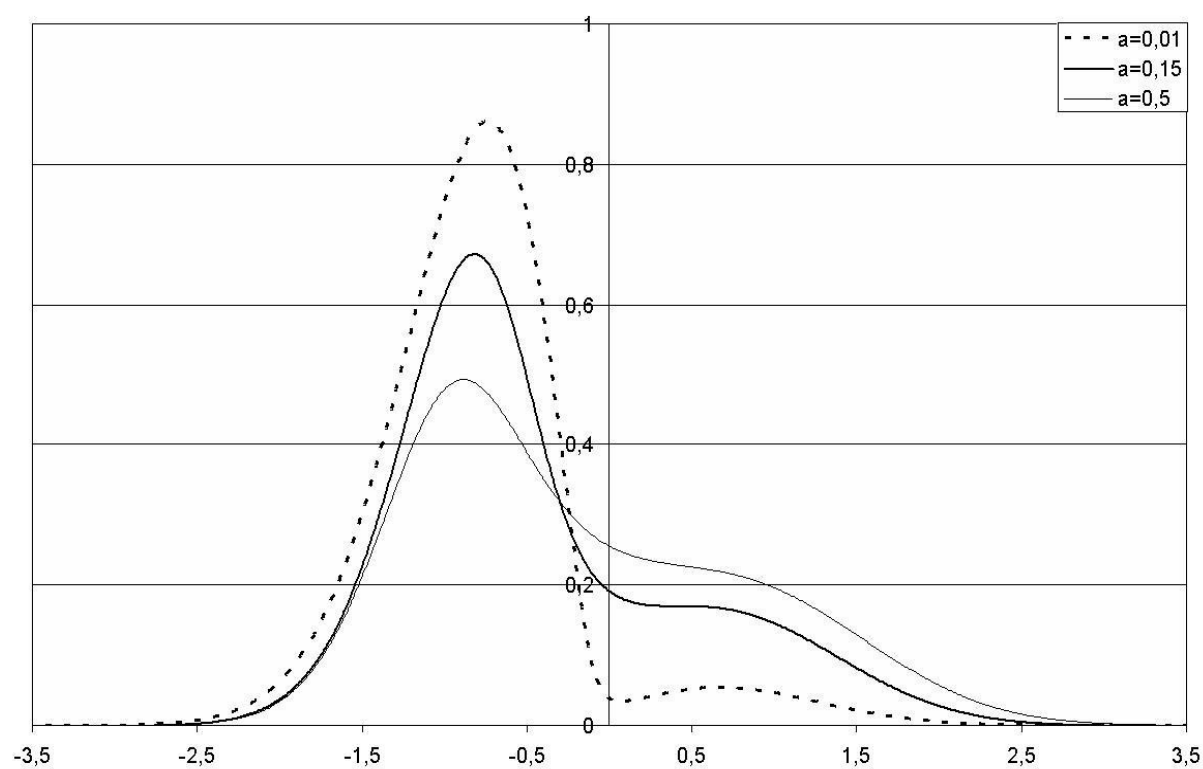
Oznaczmy rozwiązanie stacjonarne razem z wszystkimi jego funkcjami przez (4.2.3). Zbadajmy wykres funkcji ze względu na zmianę każdego z trzech parametrów. Na poniższych wykresach widać, że przejścia układu ze stanu bistabilnego do stanu monostabilnego mogą być indukowane zarówno przez jeden z szumów jak i stopień ich skorelowania.



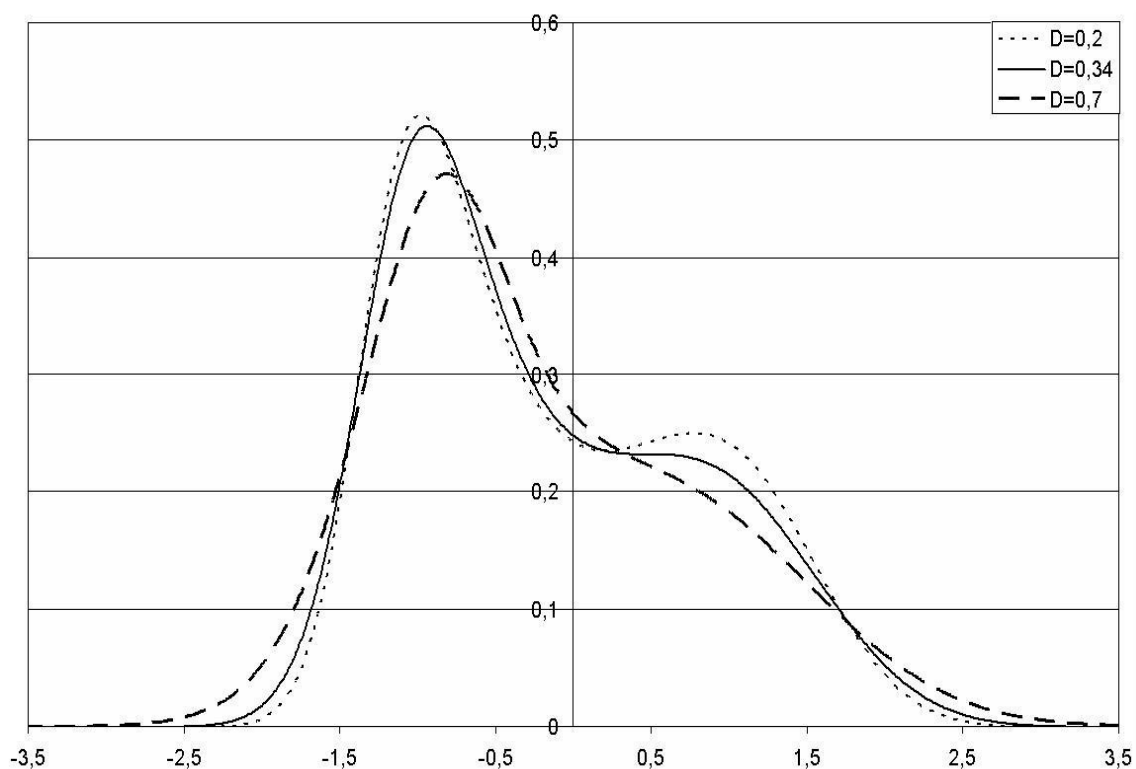
Rys. 4.2.1 Wykres funkcji gęstości (4.2.3) dla wartości parametrów $a, D=0,5$ oraz różnych wartości r .



Rys. 4.2.2 Funkcja gęstości (4.2.3) dla wartości parametrów $a=0,5$; $D=1$ oraz różnych wartości r .

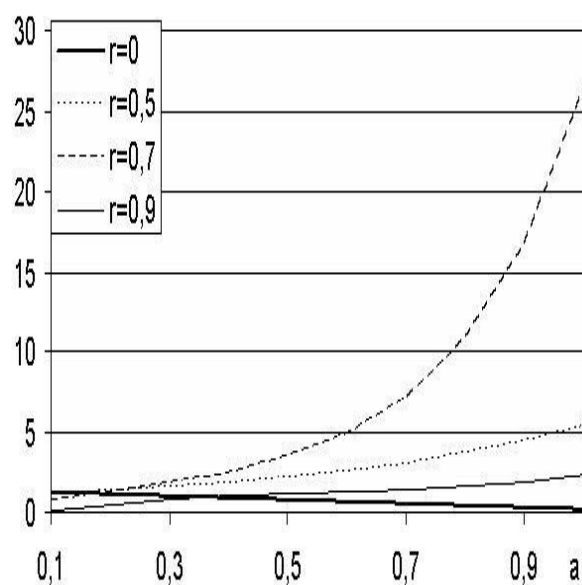


Rys. 4.2.3 Wykres funkcji gęstości (4.2.3) dla wartości parametrów $D,r=0,5$ oraz różnych wartości a .

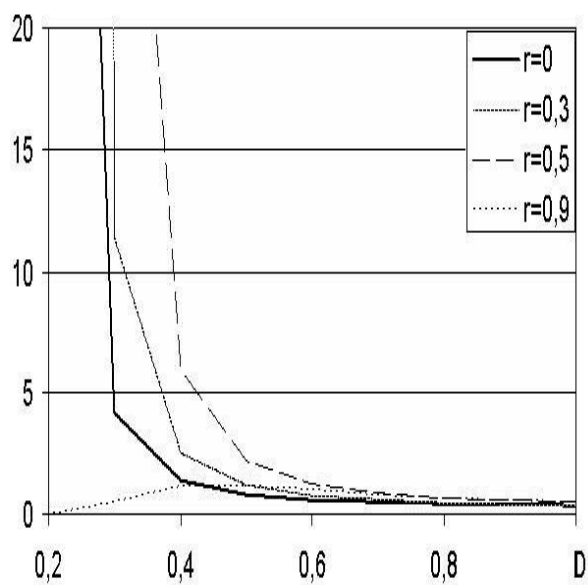


Rys. 4.2.4 Wykres funkcji gęstości (4.2.3) dla wartości parametrów $a, r=0,5$ oraz różnych wartości D .

Zbadajmy parametry rozkładu stacjonarnego dla wybranych wartości parametrów a , D oraz r .

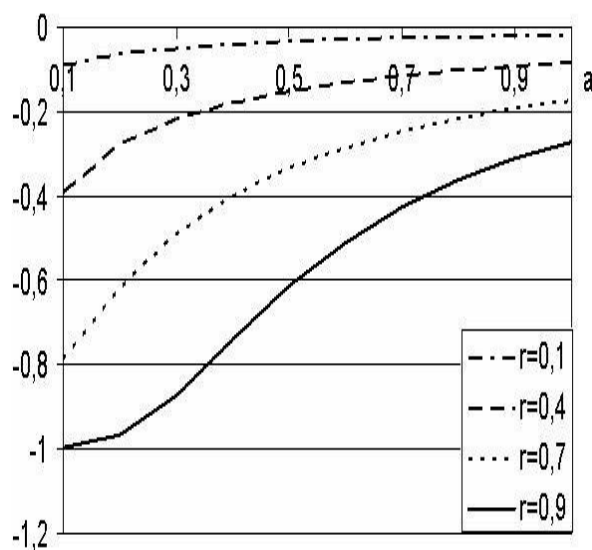


Rys. 4.2.5 Wykres czynnika normującego dla ustalonego $D=0,5$ w zależności od a .

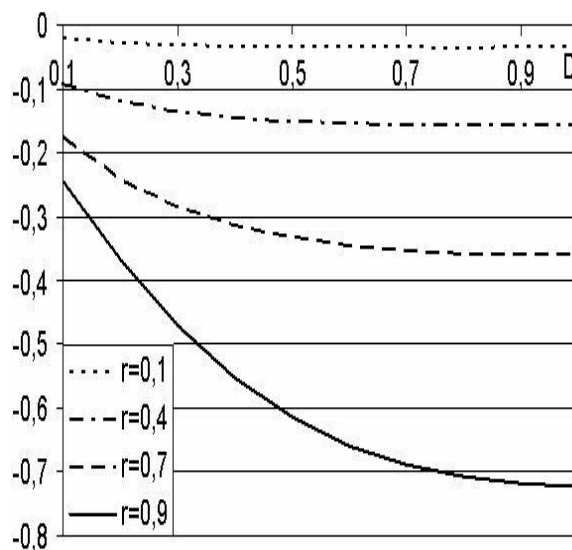


Rys. 4.2.6 Wykres czynnika normującego dla ustalonego $a=0,5$ w zależności od D .

Z powyższych wykresów widzimy, że wraz ze wzrostem parametru a czynnik normujący N rośnie natomiast ze wzrostem parametru D wartość N dąży do zera.

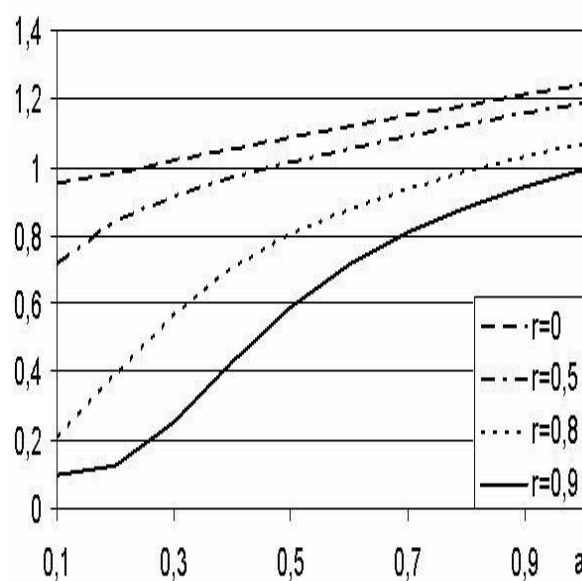


Rys. 4.2.7 Wykres wartości średniej dla ustalonego $D=0,5$ w zależności od a .

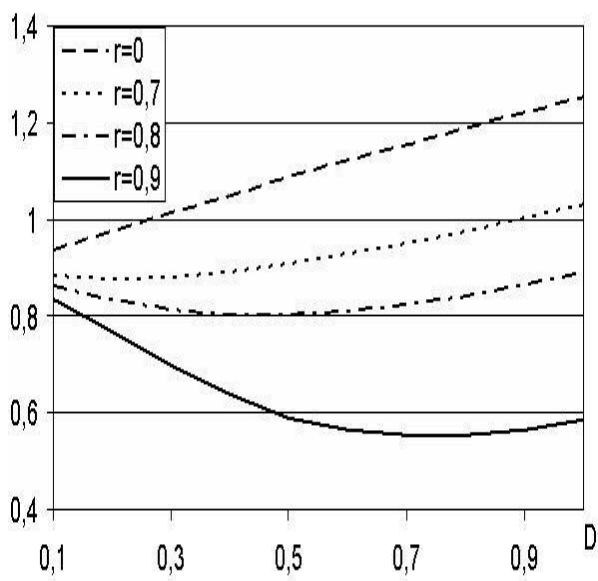


Rys. 4.2.8 Wykres wartości średniej dla ustalonego $a=0,5$ w zależności od D .

Wartość średnia dąży do zera wraz ze wzrostem a , ze wzrostem D wartość średnia jest podatniejsza na zmiany r .



Rys. 4.2.9 Wykres wariancji dla ustalonego $D=0,5$ w zależności od a .

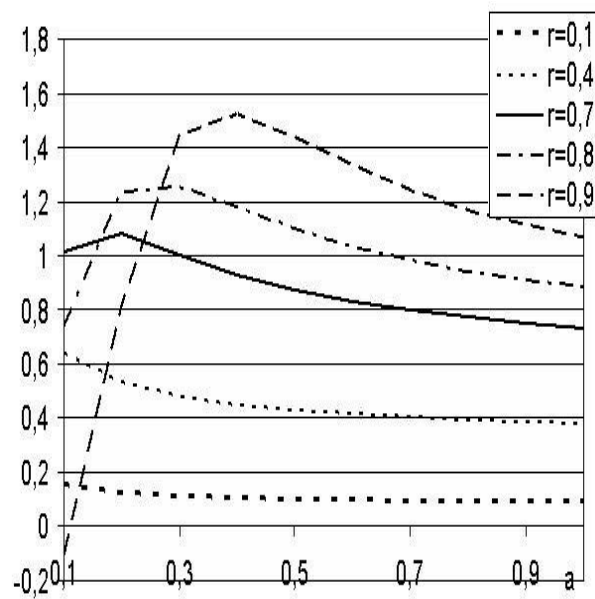


Rys. 4.2.10 Wykres wariancji dla ustalonego $a=0,5$ w zależności od D .

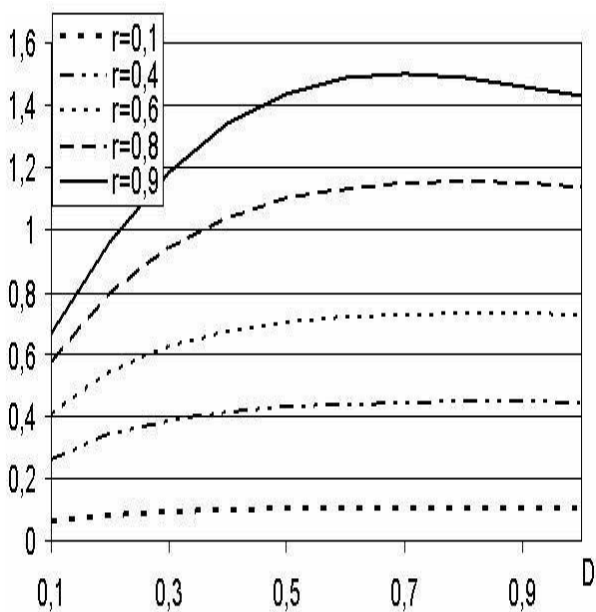
Wraz ze wzrostem parametru a wariancja rośnie, natomiast wraz ze wzrostem D wariancja dla pewnych wartości r może chwilowo maleć.

Rys. 4.2.11 Wykres skośności

Rys. 4.2.12 Wykres skośności

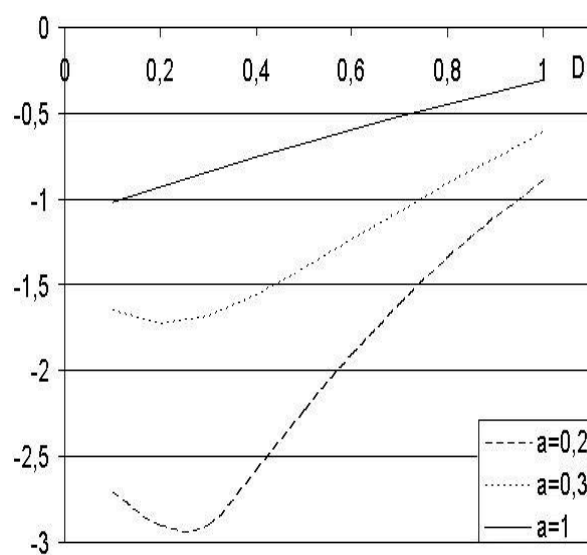


dla ustalonego $D=0,5$ w zależności od a .

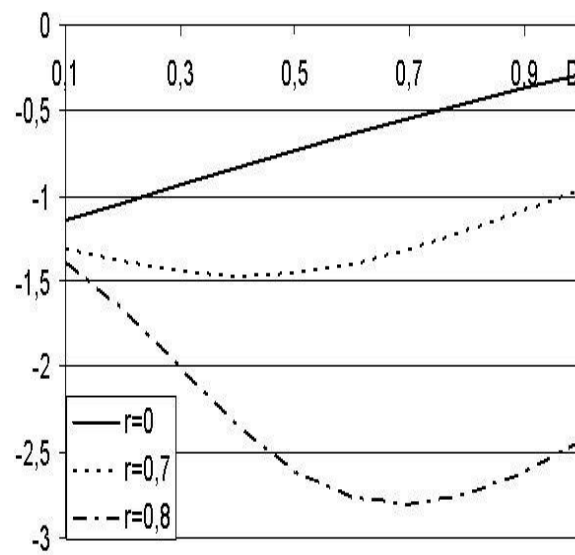


dla ustalonego $a=0,5$ w zależności od D .

Skośność dla małych wartości a może być ujemna następnie zaczyna rosnąć następnie dąży do zera. Wraz ze wzrostem parametru D skośność ogólnie rośnie.



Rys. 4.2.13 Wykres kurtozy
dla ustalonego $r=0,5$ w zależności od D .



Rys. 4.2.14 Wykres kurtozy
dla ustalonego $a=0,5$ w zależności od D .

Kurtoza ze wzrostem parametru a oraz D dąży do zera.

Przykład 2 [1].

Rozważmy równanie Stratonowicza postaci:

$$dx = -axdt + b \frac{x^2}{1+x^2} dW_1(t) + dW_2(t) \quad (4.2.4)$$

Dla $a, b > 0$ oraz gdy spełnione jest:

$$\langle dW_i \rangle = 0$$

$$\langle (dW_1)^2 \rangle = 2\alpha dt$$

$$\langle (dW_2)^2 \rangle = 2\beta dt$$

$$\langle dW_1 dW_2 \rangle = \langle dW_1 dW_2 \rangle = 2r\sqrt{\alpha\beta} dt$$

Stąd na mocy uzasadnień 1 oraz 3 otrzymujemy rozwiązanie stacjonarne równania Fokkera - Plancka postaci:

$$P_{st}(x) = N \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} \{Ax^4 + Bx^2 + \beta\}^D \exp \left\{ -\frac{ax^2}{2A} + E \arctg \left(\frac{2Ax^2 + B}{\sqrt{4A\beta - B^2}} \right) \right\}$$

Gdzie odpowiednie funkcje oznaczają:

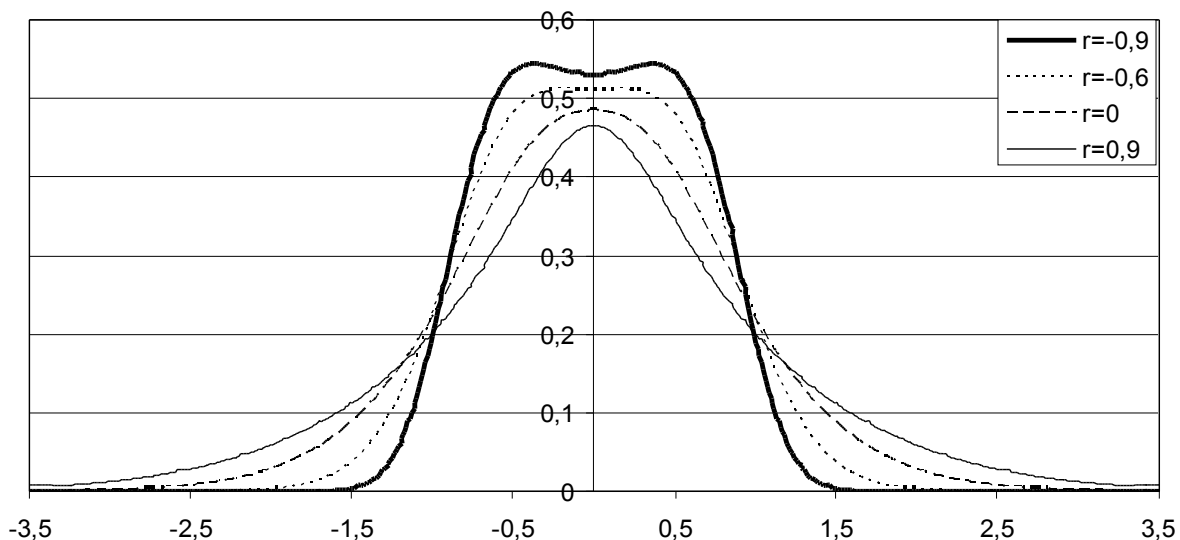
$$D = -\frac{a}{4A} \left(2 - \frac{B}{A} \right) - 0,5 \quad E = \frac{a \left(\frac{B + \beta}{A} - \frac{B^2}{A^2} - 1 \right)}{\sqrt{4A\beta - B^2}}$$

$$A = b^2\alpha + 2br\sqrt{\alpha\beta} + \beta \quad B = 2(\beta + br\sqrt{\alpha\beta}) \quad (4.2.5)$$

Oznaczmy taką funkcję rozkładu przez (4.2.5)

Zbadajmy funkcję gęstości oraz jej parametry w zależności od α , β oraz r (przyjmijmy, że pozostałe parametry a i b wynoszą $a, b=1$).

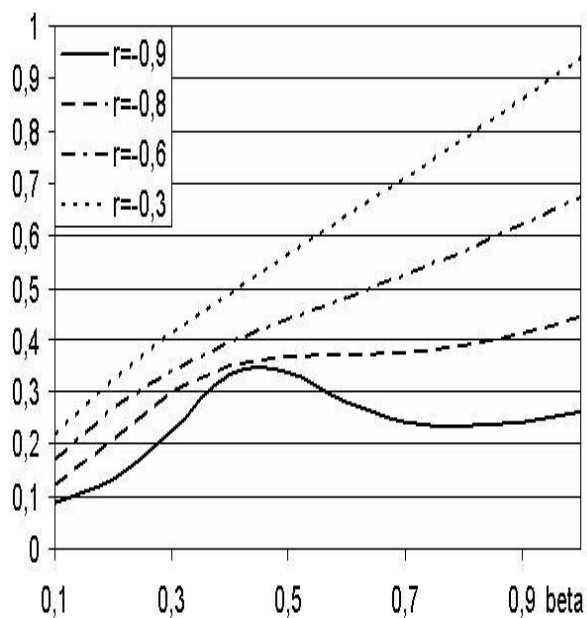
Tak jak w przykładzie 1 jest to przejście z układu monostabilnego do bistabilnego. Jak widać funkcja rozkładu jest funkcją parzystą, zatem jej wartość średnia i skośność wynoszą zero niezależnie od wartości parametrów.



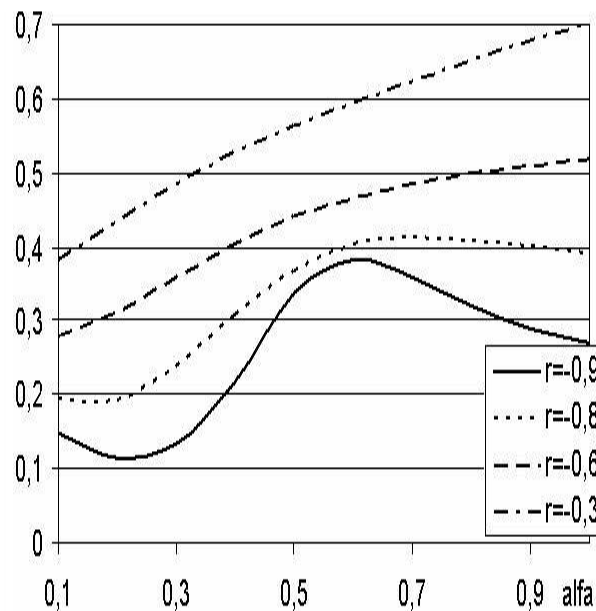
Rys. 4.2.15 Wykres funkcji rozkładu (4.2.5) dla wartości parametrów $\alpha, \beta = 0,5$.

Nie zachodzi zatem złamanie symetrii układu, stąd porównując układ z modelem przejścia fazowego nie możemy obrać za parametr porządku wartości średniej.

Zbadajmy pozostałe interesujące nas w ramach tej pracy parametry rozkładu (4.2.5) czyli wariancję i kurtozę.

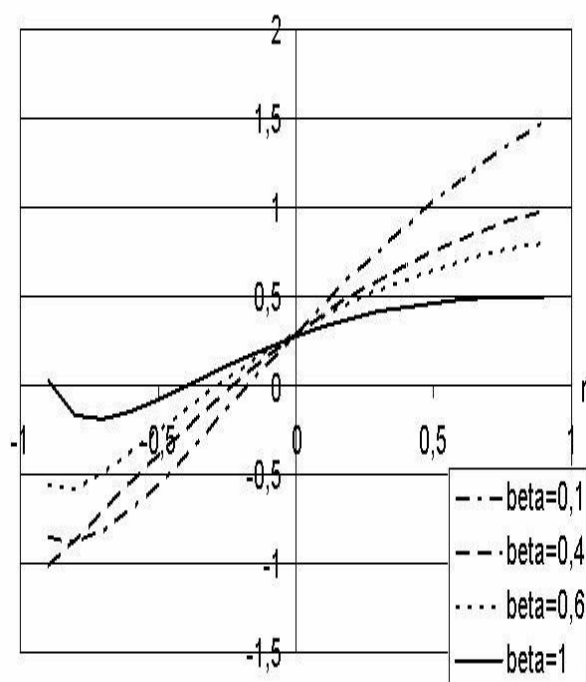


Rys. 4.2.16 Wykres wariancji dla ustalonego $\alpha = 0,5$ w zależności od β .

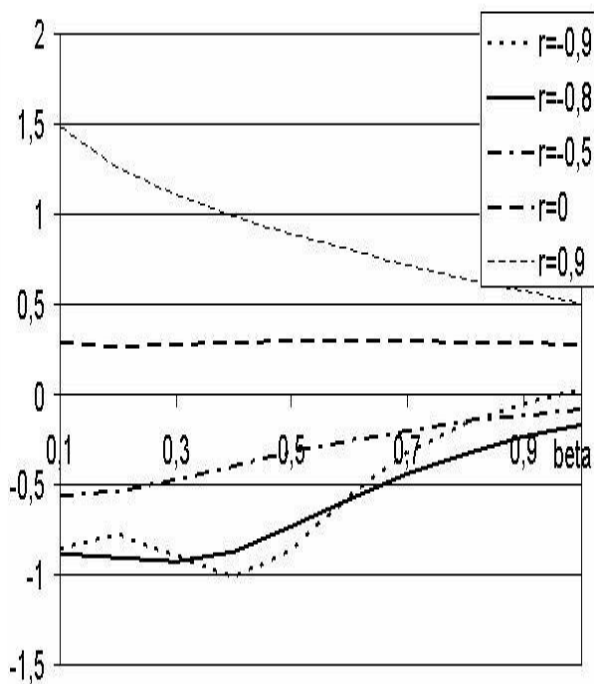


Rys. 4.2.17 Wykres wariancji dla ustalonego $\beta = 0,5$ w zależności od α .

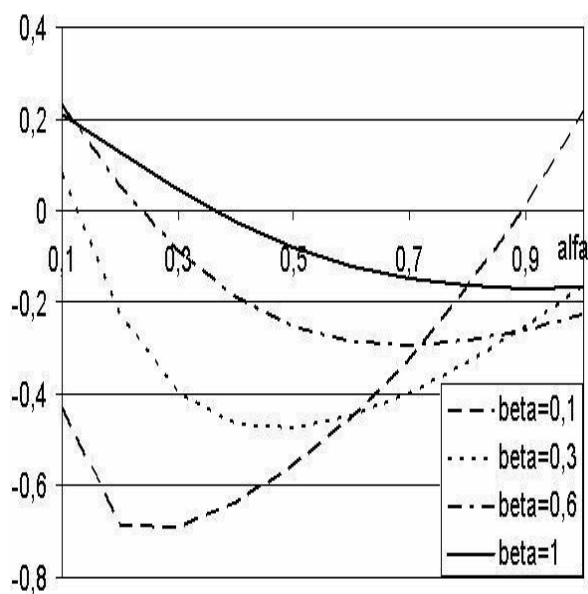
Wariancja rośnie wraz ze wzrostem parametru r , natomiast wraz ze wzrostem zarówno α jak i β może także maleć, co widać na powyższych wykresach.



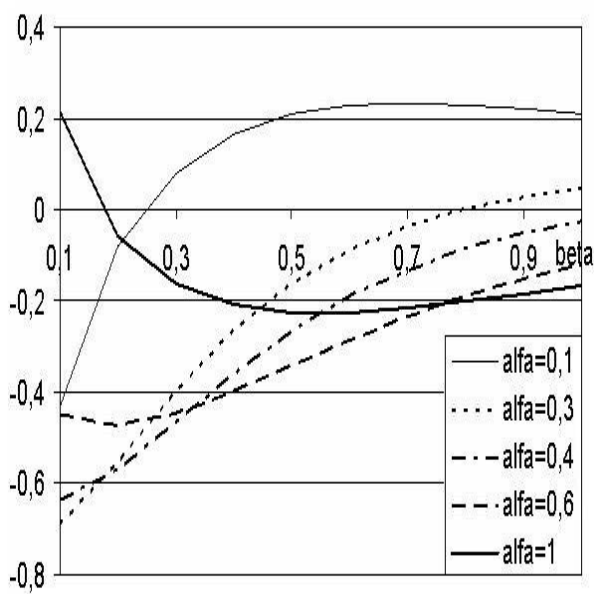
Rys. 4.2.18 wykres kurtozy
dla $\alpha=0,5$.



Rys. 4.2.19 wykres kurtozy
dla $\alpha=0,5$.



Rys. 4.2.20 wykres kurtozy
dla $r=-0,5$.



Rys. 4.2.21 wykres kurtozy
dla $r=-0,5$.

Na powyższych wykresach widać, że kurtoza przeważnie rośnie w miarę jak rośnie r . W miarę jak rośnie β kurtoza zmierza do zera. W miarę jak rośnie α kurtoza ma różną ewolucję w zależności od wartości β .

Przykład 3 [1].

Rozważmy równanie Stratonowicza postaci:

$$dx = -ax^3 dt + b \frac{x^4}{1+x^4} dW_1(t) + dW_2(t) \quad (4.2.6)$$

Gdzie $a, b > 0$ oraz spełnione jest:

$$\langle dW_i \rangle = 0$$

$$\langle (dW_1)^2 \rangle = 2\alpha dt$$

$$\langle (dW_2)^2 \rangle = 2\beta dt$$

$$\langle dW_1 dW_2 \rangle = \langle dW_1 dW_2 \rangle = 2r\sqrt{\alpha\beta} dt$$

Z powyższych warunków otrzymujemy następujące rozwiązanie stacjonarne:

$$P_{st}(x) = N \sqrt{x^8 + 2x^4 + 1} \{Ax^8 + Bx^4 + \beta\}^D \exp \left\{ -\frac{ax^4}{4A} + E \arctg \left(\frac{2Ax^4 + B}{\sqrt{4A\beta - B^2}} \right) \right\}$$

Gdzie odpowiednie funkcje oznaczają:

$$A = b^2\alpha + 2br\sqrt{\alpha\beta} + \beta$$

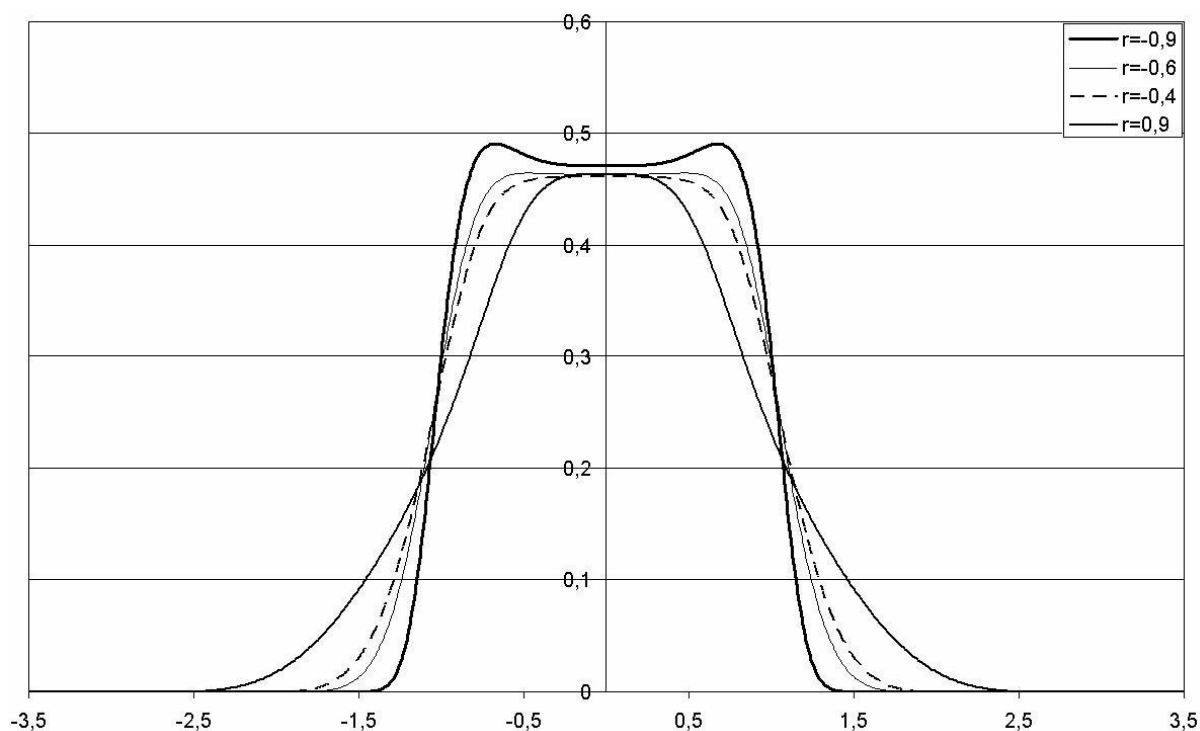
$$B = 2(\beta + br\sqrt{\alpha\beta})$$

$$D = -\frac{a}{8A} \left(2 - \frac{B}{A} \right) - 0,5$$

$$E = \frac{\frac{a}{2} \left[\frac{B}{2A} \left(2 - \frac{B}{A} \right) + \left(\frac{\beta}{A} - 1 \right) \right]}{\sqrt{4A\beta - B^2}}$$

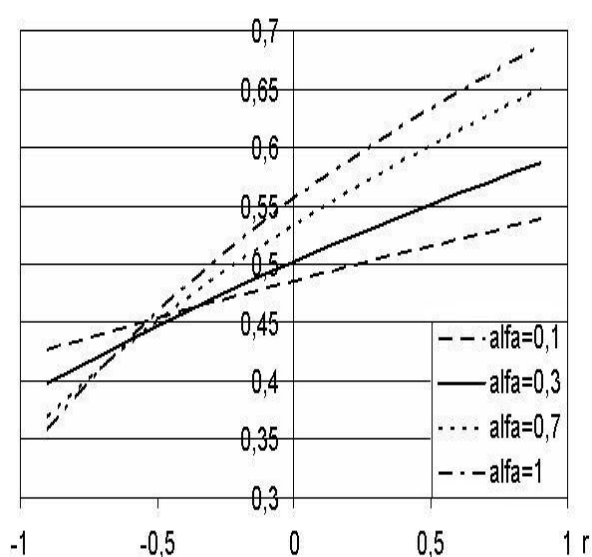
Oznaczmy ten rozkład stacjonarny wraz z jego funkcjami przez (4.2.7)

Zbadajmy funkcję gęstości oraz jej wariancję i kurtozę w zależności od α , β (wartość średnia i skośność wynoszą zero) oraz r (przyjmijmy, że pozostałe parametry a i b wynoszą 1).

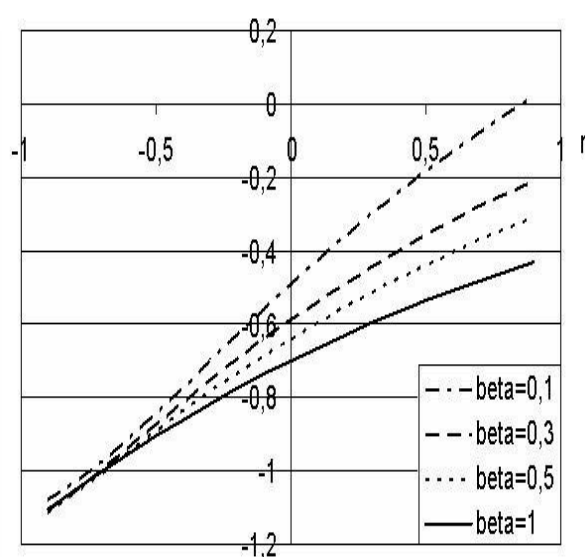


Rys. 4.2.22 wykres funkcji gęstości rozkładu dla $\alpha, \beta=0,5$.

Zbadajmy parametry rozkładu w zależności od parametrów α, β oraz r .



Rys. 4.2.23 wykres wariancji dla $\beta=0,5$



Rys. 4.2.24 wykres kurtozy $\alpha=0,5$

Wariancja rozkładu rośnie zarówno ze wzrostem parametru β jak i parametru r . Zmiany wariancji w zależności od czynnika α są różne w zależności od wartości parametru r . Kurtoza rozkładu jest ujemna, co oznacza, że funkcja rozkładu jest płaska w stosunku do rozkładu Gaussa. Wartość kurtozy rośnie wraz ze wzrostem r i maleje ze wzrostem β . Wartość parametru α niema jednoznacznego wpływu, na kurtozę.

5. Analogie między przejściami fazowymi i analizowanymi przejściami w układach stochastycznych

Istotną częścią tej pracy jest porównanie pewnych szczególnych zjawisk występujących w analizowanych tu przykładach rozkładów z przejściami fazowymi.

Układami idealnymi nazywamy układy w których możemy pominąć wzajemne oddziaływania jego składników. Prowadzi to do uproszczenia rozważań nad układem do rozważania pojedynczego jego składnika. Przykładem może być sieć drgających atomów w wyniku czego oddziałujących ze sobą, taki układ oddziaływań jest zwykle redukowany do oddziaływań najbliższych sąsiadujących ze sobą atomów lub paramagnetyk którego własności opisuje prawo Curie jak również gaz opisywany równaniem Clapeyrona (równanie gazu doskonałego).

Istnieją także układy których opisu nie można w żaden sposób zredukować do opisu układów idealnych. Wynika to z faktu istnienia silnych oddziaływań między składnikami układu których to oddziaływań nie można pominąć. Układy tego typu nazywa się czasem układami kolektywnymi a zjawiska jakie zachodzą w tych układach nazywa się zjawiskami kolektywnymi. Do zjawisk kolektywnych zaliczamy między innymi przejścia fazowe. Przykładem przejścia fazowego może być: skraplanie gazu metodą sprężania, przemiana paramagnetyka w ferromagnetyk przy oziębieniu do temperatur niższych niż temperatura Curie. Przyjmuje się, że w trakcie przejścia fazowego substancja przyjmuje nowy typ struktury lub nabywa nowych cech, które nie występowały przed przejściem fazowym. Czasami zjawiska socjologiczne, biologiczne oraz rynkowe można traktować jako przejścia fazowe. Układ pozostający w stanie równowagi termodynamicznej zwykle opisujemy za pomocą niewielkiej liczby parametrów termodynamicznych. Parametry te dzieli się zwykle na dwie grupy, pierwsza to parametry ekstensywne do których należą między innymi takie parametry jak objętość, entropia, energia swobodna i tym podobne,

druga grupa to parametry intensywne czyli na przykład temperatura i ciśnienie. Parametry ekstensywne zależą ściśle od liczby elementarnych składników tworzących układ czyli cząstek, spinów i tak dalej, parametry intensywne pozostają niezmiennie przy powiększaniu liczby składników układu.

Wielkości termodynamiczne (szczególnie suma statystyczna) są zwykle funkcjami odcinkami ciągłymi parametrów stanu. Wyjątkiem od tej reguły są punkty odpowiadające przejściom fazowym w których mogą doznawać mniej lub bardziej gwałtownych zmian co powoduje, że ciągłość funkcji w tych punktach nie jest zachowana. Mechanika statystyczna oferuje wiele rozkładów (autorzy opisują to w [6] np. Zespoły Gibbsa) za pomocą których można otrzymać wyrażenia na wielkości termodynamiczne. Niezależnie jednak od wybranego do opisu układu rozkładu otrzymujemy te same wartości parametrów. Mimo to nie zawsze jesteśmy w stanie opisać zachodzenie przejścia fazowego (nie zawsze jest możliwe zaistnienie nieciągłości sumy statystycznej). Na podstawie powyższego można wyciągnąć wniosek, że istnieją pewne ograniczenia odnośnie badanego układu oraz charakteru oddziaływań między składnikami owego układu. Mianowicie układ ten powinien być na tyle duży aby można było założyć $N \rightarrow \infty$ oraz $V \rightarrow \infty$ przy czym stosunek wielkości N/V pozostaje stały. Owo przejście graniczne nazywa się często przejściem do granicy termodynamicznej. Konieczność zaistnienia tego przejścia uzasadnia się przez konieczność jednorodności układu (eliminacja efektów związanych z istnieniem brzegów układu) oraz przez to, że jest to warunek ujawnienia osobliwości występujących w sumie statystycznej i innych wielkościach termodynamicznych które informują nas o zaistnieniu przejścia fazowego.

5.1 Podobieństwa

W przypadku przejść indukowanych szumem lub parametrem występuje jakościowa zmiana funkcji rozkładu. Zjawiskiem analogicznym w przejściach fazowych są osobliwości występujące w sumie statystycznej.

W niektórych przypadkach możemy uznać wartość średnią za analogię parametru porządku, który w mechanice statystycznej używany jest do opisu przejścia. W pozostałych przypadkach możemy za parametry porządku obrać różnice między maksimum a minimum funkcji rozkładu lub inną wartość informującą nas o zachodzeniu przejść.

5.2 Różnice

Najistotniejszą różnicą obu zjawisk jest fakt konieczności spełnienia przejścia do granicy termodynamicznej ($N \rightarrow \infty$ oraz $V \rightarrow \infty$ gdzie stosunek N/V pozostaje stały) w przypadku przejść fazowych oraz niespełnieniu tego przejścia w omawianych tu przykładach przejść indukowanych szumem bądź parametrem (omawiana jest jedna cząstka).

Następną różnicą jest fakt, że omawiany w niniejszej pracy szum nie jest ani szumem rzeczywistym (określonym przez funkcję autokorelacji postaci $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle \sim \exp\{-|t_1 - t_2|/\tau_c\}$, gdzie τ_c to tak zwany czas korelacji) ani szumem termicznym (opisanym we wstępie) w odróżnieniu od czynników losowych które mogą wstępować w rzeczywistych układach (takich w których zachodzą przejścia fazowe).

W pracy opisane zostały przykłady układów stochastycznych w których zachodziły przejścia indukowane szumem oraz parametrem jak również układy dwóch szumów w których z różnych przyczyn zachodziły przejścia. Zjawiska te zostały porównane z przejściami fazowymi.

Podsumowanie

W niniejszej pracy omówiony został wpływ jaki na układ mogą mieć parametry wpływające zarówno na część deterministyczną jak i dyfuzyjną układu stochastycznego. Przedstawione zostały przykłady układów zawierających zarówno jedno jak i kilka źródeł szumów w szczególności omówione zostały przypadki gdy szumy te są skorelowane. Siła szumu addytywnego jest bezpośrednio powiązana z wartością wariancji w rozkładzie stacjonarnym, która rośnie zwykle wykładniczo wraz z siłą szumu. Siła szumu multiplikatywnego ma różny wpływ na rozkład w zależności od funkcji amplitudy szumu. Działanie stopnia skorelowania szumów nie jest zagadnieniem trywialnym. Pojawienie się zależności między wartościami szumów może diametralnie zmieniać rozkład stacjonarny oraz jego parametry. Zwiększanie wartości siły szumu multiplikatywnego oraz zmiana korelacji między dowolnym szumem a szumem multiplikatywnym może spowodować

wystąpienie przejść w układzie (np. Zmiana rozkładu o jednym ekstremum w rozkład o dwóch maksimach i jednym minimum).

Układy w których zachodziły przejścia w postaci bifurkacji i rozdwojeń zostały porównane z przejściami fazowymi. W przejściach fazowych istotną rolę odgrywa przejście do granicy termodynamicznej [6] oraz parametr porządku [5] (np. Średnie namagnesowanie w modelu Isinga). W żadnym z omawianych w tej pracy przykładów nie było spełnione przejście do granicy termodynamicznej, a wartość średnią tylko czasem można było przyjąć za parametr porządku gdyż często była ona niezmienna podczas zmiany parametru wywołującego przejście. Skoro wartość średnia pozostawała niezmienna to nie zachodziło złamanie symetrii układu, która jest złamana w przejściach fazowych. W pozostałych przypadkach można było przyjąć za parametr porządku różnice między ekstremami funkcji rozkładu. Istotnie dla krótkich czasów obserwacji zaobserwowalibyśmy wartości najbardziej prawdopodobne a nie wartości średnie. Stąd dopuszczalne jest przyjęcie różnic między ekstremami rozkładu za parametry porządku. Szumy te nie są szumami termicznymi, trudno o wyizolowanie temperatury jako takiej w rozwiązaniu stacjonarnym równania Fokkera – Plancka. Z uwagi na powyższą charakterystykę przejścia omawiane w tej pracy nie są przejściami fazowymi, są one jednak dość bliską ich analogią.

Literatura

- [1] S. I. Denisov, A. N. Vitrenko, W. Horsthemke, Phys. Rev. E 68 046132 (2003).
- [2] Wu Da-jin, Cao Li, Ke Sheng-zhi, Phys. Rev. E 50 2496 (1994)
- [3] N.G. van Kampen, „*Procesy stochastyczne w fizyce i w chemii*”, PWN, Warszawa 1990.
- [4] C. W. Gardiner, „*Handbook of stochastic methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*”, Springer – Verlag, Berlin 1983.
- [5] H. Haken, „*Synergetics, An Introduction, Nonequilibrium Phase Transitions and Self – Organization in Physics, Chemistry and Biology*”, Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1977.
- [6] M. Toda, R. Kubo, N. Saitô, „*fizyka statystyczna, Tom 1, mechanika statystyczna stanów równowagowych*”, PWN, Warszawa 1991.