

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Análisis Matemático II

Grado en Estadística

Curso 2017/18

Índice

1. El espacio euclídeo	3
2. Topología en \mathbb{R}^n	5
Referencias	6

El espacio euclídeo

Como punto de partida para el estudio de las funciones de varias variables reales, debemos familiarizarnos con la estructura y propiedades del espacio en el que dichas funciones tendrán su conjunto de definición, el espacio euclídeo n -dimensional, donde n es un número natural. Al tiempo que estudiamos algunas propiedades de dicho espacio, las iremos abstrayendo, para entender ciertos conceptos generales que son importantes en Análisis Matemático. Partimos de la definición de \mathbb{R}^n y su estructura algebraica básica, la de espacio vectorial. Al estudiar el producto escalar en \mathbb{R}^n , completamos la definición del espacio euclídeo, así llamado porque formaliza analíticamente los axiomas y resultados de la geometría de Euclides.

Definición 1.1 (Espacio euclídeo). Definimos el espacio euclídeo n -dimensional como el producto cartesiano de n copias de \mathbb{R} , es decir, el conjunto de todas las posibles n -uplas de números reales:
$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in 1 \dots n\}$$

Sin embargo, no siempre es conveniente usar subíndices para denotar las componentes de los elementos de \mathbb{R}^n , pues podemos necesitar los subíndices para otra finalidad. Para valores concretos de n , podemos denotar las componentes con letras diferentes, siendo habitual escribir:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

En \mathbb{R}^n disponemos de las operaciones de suma y producto por escalares, definidas, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, por

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Proposición 1.1. Sea $n \in \mathbb{N}$, $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

- a) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Propiedad asociativa)
- b) $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \implies x + 0 = 0 + x = x$
- c) Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \implies \exists! v \in \mathbb{R}^n : x + v = v + x = 0 \implies v = (-x_1, \dots, -x_n) = -x$
- d) $x + y = y + x$
- e) $1 * x = x$
- f) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$
- g) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- h) $(\lambda\beta)y = \lambda(\beta y)$

Definición 1.2 (Producto escalar). Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos el producto escalar de $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Proposición 1.2. Sea $n \in \mathbb{N}$:

- a) $x, y, z \in \mathbb{R}^n \implies \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- b) $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \implies \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- c) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Proposición 1.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Sean $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

Demostración.

Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, es cierto que $0 \leq \sum_{i=1}^n (ax_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a^2 x_i^2 + y_i^2 + 2ax_i y_i) = a^2 (\sum_{i=1}^n x_i^2) + (\sum_{i=1}^n y_i^2) + 2a (\sum_{i=1}^n x_i y_i)$ para todo número real a y es igualdad si, y sólo si, cada término de la suma es cero. Esta desigualdad puede escribirse en la forma: $Ax^2 + Bx + C$ donde $A = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $B = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $C = \sum_{i=1}^n y_i^2$. En particular, la desigualdad se cumple para $\frac{-B}{2A}$: $A(\frac{-B}{2A})^2 + 2B(\frac{-B}{2A}) + C \geq 0 \implies C \geq \frac{B^2}{2} \implies B^2 \leq AC$. \square

Definición 1.3 (Norma). Dado $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define la norma de x como:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Proposición 1.4. Sea $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- a) $\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \iff x = 0 \in \mathbb{R}^n$
- b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdad triangular)

Demostración. (Desigualdad triangular)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned} \quad \square$$

Definición 1.4 (Distancia). Sea $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define la distancia de x a y como

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Proposición 1.5. Sea $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

a) $d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

b) $d(x, y) = d(y, x)$

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Topología en \mathbb{R}^n

Definición 2.1 (Bola de centro a y radio r). Sea $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 0$. Se definen las bolas abiertas, cerradas y esferas, respectivamente, de centro a y radio r como:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\}$$

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) = r\}$$

Definición 2.2 (Sucesión convergente en \mathbb{R}^n). Sea $n \in \mathbb{N}$, y $\{x_n\}$ una sucesión convergente en \mathbb{R}^n . Diremos que $\{x_n\}$ es convergente hacia un límite $a \in \mathbb{R}^n$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies d(x_n, a) < \varepsilon$$

Referencias

.