Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Grado en Estadística

Curso 2017/18

Índice

El espacio euclídeo

Como punto de partida para el estudio de las funciones de varias variables reales, debemos familiarizarnos con la estructura y propiedades del espacio en el que dichas funciones tendrán su conjunto de definición, el espacio euclídeo n-dimensional, donde n es un número natural. Al tiempo que estudiamos algunas propiedades de dicho espacio, las iremos abstrayendo, para entender ciertos conceptos generales que son importantes en Análisis Matemático. Partimos de la definición de $\mathbb{R}^n$ y su estructura algebraica básica, la de espacio vectorial. Al estudiar el producto escalar en $\mathbb{R}^n$, completamos la definición del espacio euclídeo, así llamado porque formaliza analíticamente los axiomas y resultados de la geometría de Euclides.

Definición 1.1 (Espacio euclídeo). Definimos el espacio euclídeo n-dimensional como el producto cartesiano de n copias de $\mathbb{R}$, es decir, el conjunto de todas las posibles n-uplas de números reales:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \ \ x \ \ \mathbb{R} \ \ x \ \ ...^{(n)} \ \ x \ \ \mathbb{R} = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in R, \forall i \in 1...n\}$$

Sin embargo, no siempre es conveniente usar subíndices para denotar las componentes de los elementos de $\mathbb{R}^n$, pues podemos necesitar los subíndices para otra finalidad. Para valores concretos de n, podemos denotar las componentes con letras diferentes, siendo habitual escribir:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in R\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$$

En $\mathbb{R}^n$ disponemos de las operaciones de suma y producto por escalares, definidas, para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, por

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

Proposición 1.1. Sea $n \in \mathbb{N}, x, y, z \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

$a)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Propiedad asociativa)

$b)$ $0 = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n \implies x + 0 = 0 + x = x$

$c)$ Dado $x = (x_1, ..., x_n) \implies \exists! v \in \mathbb{R}^n : x + v = v + x = 0 \implies v = (-x_1, ..., -x_n) = -x$

$d)$ $x + y = y + x$

$e)$ $1 * x = x$

$f)$ $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$

$g)$ $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

$h)$ $(\lambda\beta)y = \lambda(\beta y)$

Definición 1.2 (Producto escalar). Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos el producto escalar de $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Proposición 1.2. Sea $n \in \mathbb{N}$:

$a)$ $x, y, z \in \mathbb{R}^n \implies < x + y, z >=< x, z > + < y, z >$

$b)$ $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \implies < \lambda x, y >= \lambda < x, y >$

$c)$ $< x, y >=< y, x > \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Proposición 1.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Sean $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$(< x, y >)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$$

Demostración.
Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n)$, es cierto que $0 \leq \sum_{i=1}^{n}(ax_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a^2x_i^2 + y_i^2 + 2ax_iy_i) = a^2(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) + (\sum_{i=1}^{n} y_i^2) + 2a(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)$ para todo número real y es igualdad si, y sólo si, cada término de la suma es cero. Esta desigualdad puede escribirse en la forma: $Ax^2 + Bx + C$ donde $A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$, $C = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$. En particular, la desigualdad se cumple para $\frac{-B}{2A}$: $A(\frac{-B}{A})^2 + 2B(\frac{-B}{A}) + C \geq 0 \implies C \geq \frac{B^2}{2} \implies B^2 \leq AC$. □

Definición 1.3 (Norma). Dado $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define la norma de x como:

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{< x, x >}$$

Proposición 1.4. Sea $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$a)$ $||x|| \geq 0 \wedge ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n$

$b)$ $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$

$c)$ $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Desigualdad triangular)

Demostración. (Desigualdad triangular)
$||x + y||^2 =< x + y, x + y >=< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y >= ||x||^2 + ||y||^2 + 2 < x, y >$
$\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||||y|| = (||x|| + ||y||)^2$ □

Definición 1.4 (Distancia). Sea $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}^n$, se define la distancia de x a y como

$$d(x,y) = ||x - y||$$

Proposición 1.5. Sea $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}^n$.

$a)$ $d(x,y) \geq 0 \wedge d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$b)$ $d(x,y) = d(y,x)$

$c)$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Topología en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1 (Bola de centro a y radio r). Sea $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^n, r > 0$. Se definen las bolas abiertas, cerradas y esferas, respectivamente, de centro a y radio r como:

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}$$

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \leq r\}$$

$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,y) = r\}$$

Definición 2.2 (Sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$). Sea $n \in \mathbb{N}$, y $\{x_n\}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$. Diremos que $\{x_n\}$ es convergente hacia un límite $a \in \mathbb{R}^n$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies d(x_n, a) < \varepsilon$$

Proposición 2.1. Sea $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}^n, \{x_n\}, \{y_n\}$ dos sucesiones en $\mathbb{R}^n$.

$a)$ $\{x_n\} \to x, \{x_n\} \to y \implies x = y$ (Unicidad de límites)

$b)$ $\{x_n\} \to x, \{y_n\} \to y \implies \{x_n + y_n\} \to x + y$

$c)$ $\{x_n\} \to x, \lambda \in \mathbb{R} \implies \{\lambda x_n\} \to \lambda x$

$d)$ $\{x_n\}$ converge $\implies$ $\{x_n\}$ acotada. ($\exists M \in \mathbb{N} : ||x_n|| \leq M \; \forall n \in N$) (Acotación)

$e)$ $\{x_n\} \to x, \{y_n\} \to y \implies \{< x_n, y_n >\} \to < x, y >$

$f)$ $\{x_n\} \to x \implies \{||x_n||\} \to ||x||$

Demostración. (Unicidad de límites)
Supongamos $\{x_n\} \to x, \{x_n\} \to y$. Fijo $\varepsilon > 0$ y demuestro $||x - y|| < \varepsilon \implies ||x - y|| = 0 \implies x = y$.
Dado $\varepsilon > 0, \{x_n\} \to x \implies \exists m_1 \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq m_1$ y $\exists m_2 \in \mathbb{N} : ||x_n - y|| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq m_2$. Tomo $n \geq max\{m_1, m_2\} \implies ||x - y|| = ||(x - x_n) + (x_n - y)|| \leq ||x_n - x|| + ||x_n - y|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies x = y$ $\square$

Demostración. (Acotación)

Supongamos $\{x_n\} \to x \implies \exists m \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < 1 \; \forall n \geq m \implies ||x_n|| \leq 1 + ||x|| \implies ||x_n|| \in max\{||x_1||, ||x_2||, ..., ||x_m||, 1 + ||x|| = M\}$ □

Proposición 2.2. Sea $N \in \mathbb{N}$. Tomo $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^N$con $x = (x^1, ..., x^N), x_n = (x_n^1, ..., x_n^N)$. Entonces

$$\{(x_n^1, ..., x_n^N)\} \to (x^1, ..., x^N) \Leftrightarrow \{x_n^i\} \to x^i \; \forall i \in \{1...N\}$$

Demostración. POR HACER □

Definición 2.3 (Interior, adherente y frontera). Sea $n \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:

a) Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es adherente a A si $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \implies \overline{A} = \{x_n \in \mathbb{R}^n : x$ adherente a $A\}$ y A cerrado si $A = \overline{A}$.

b) Un punto $a \in A$ es interior a A si $\exists r > 0 : B(a, r) \subseteq A$. Denotaremos $\mathring{A} = \{a \in A : a$ interior a $A\}$ y A abierto si $A = \mathring{A}$.

c) Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es frontera de A si $x \in \overline{A}$ pero $x \notin \mathring{A}$. Denotaremos $Fr(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ es frontera de $A\}$

Ejemplo 2.1. .

a) $A = [0, 1[\cup\{4\} \implies \overline{A} = [0, 1] \cup \{4\},\; \mathring{A} =]0, 1[,\; Fr(A) = \{0, 1, 4\}$

b) $A = B(a, r) \implies \overline{A} = \overline{B}(a, r),\; \mathring{A} = A,\; Fr(A) = \overline{B}(a, r) - B(a, r)$ DEMOSTRAR

Referencias