Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Grado en Estadística

Curso 2017/18

Índice

El espacio euclídeo y su topología

Como punto de partida para el estudio de las funciones de varias variables reales, debemos familiarizarnos con la estructura y propiedades del espacio en el que dichas funciones tendrán su conjunto de definición, el espacio euclídeo n-dimensional, donde n es un número natural. Al tiempo que estudiamos algunas propiedades de dicho espacio, las iremos abstrayendo, para entender ciertos conceptos generales que son importantes en Análisis Matemático. Partimos de la definición de $\mathbb{R}^n$ y su estructura algebraica básica, la de espacio vectorial. Al estudiar el producto escalar en $\mathbb{R}^n$, completamos la definición del espacio euclídeo, así llamado porque formaliza analíticamente los axiomas y resultados de la geometría de Euclides.

Definición 1.1 (Espacio euclídeo). Definimos el espacio euclídeo n-dimensional como el producto cartesiano de n copias de $\mathbb{R}$, es decir, el conjunto de todas las posibles n-uplas de números reales: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\ \ x\ \ \mathbb{R}\ \ x\ \ ...^{(n)}\ \ x\ \ \mathbb{R} = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in R, \forall i \in 1...n\}$

Sin embargo, no siempre es conveniente usar subíndices para denotar las componentes de los elementos de $\mathbb{R}^n$, pues podemos necesitar los subíndices para otra finalidad. Para valores concretos de n, podemos denotar las componentes con letras diferentes, siendo habitual escribir:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in R\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$$

En $\mathbb{R}^n$ disponemos de las operaciones de suma y producto por escalares, definidas, para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, por

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

Proposición 1.1. Sea $n \in \mathbb{N}, x, y, z \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

$a)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Propiedad asociativa)

$b)$ $0 = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n \implies x + 0 = 0 + x = x$

$c)$ Dado $x = (x_1, ..., x_n) \implies \exists! v \in \mathbb{R}^n : x + v = v + x = 0 \implies v = (-x_1, ..., -x_n) = -x$

$d)$ $x + y = y + x$

$e)$ $1 * x = x$

$f)$ $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$

$g)$ $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

$h)$ $(\lambda\beta)y = \lambda(\beta y)$

Definición 1.2 (Producto escalar). Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos el producto escalar de $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Proposición 1.2. Sea $n \in \mathbb{N}$:

$a)$ $x, y, z \in \mathbb{R}^n \implies < x + y, z >=< x, z > + < y, z >$

$b)$ $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \implies < \lambda x, y >= \lambda < x, y >$

$c)$ $< x, y >=< y, x > \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Proposición 1.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Sean $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$(< x, y >)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$$

Demostración.

Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n)$, es cierto que $0 \leq \sum_{i=1}^{n}(ax_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a^2x_i^2 + y_i^2 + 2ax_iy_i) = a^2(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) + (\sum_{i=1}^{n} y_i^2) + 2a(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)$ para todo número real y es igualdad si, y sólo si, cada término de la suma es cero. Esta desigualdad puede escribirse en la forma: $Ax^2 + Bx + C$ donde $A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$, $C = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$. En particular, la desigualdad se cumple para $\frac{-B}{2A}$: $A(\frac{-B}{A})^2 + 2B(\frac{-B}{A}) + C \geq 0 \implies C \geq \frac{B^2}{2} \implies B^2 \leq AC$. $\square$

Referencias