

UNIVERSIDAD DE GRANADA

---

# Análisis Matemático II

---

Grado en Estadística

Curso 2017/18

## Índice

1. El espacio euclídeo y su topología	3
2.	4
Referencias	5

## El espacio euclídeo y su topología

Como punto de partida para el estudio de las funciones de varias variables reales, debemos familiarizarnos con la estructura y propiedades del espacio en el que dichas funciones tendrán su conjunto de definición, el espacio euclídeo  $n$ -dimensional, donde  $n$  es un número natural. Al tiempo que estudiamos algunas propiedades de dicho espacio, las iremos abstrayendo, para entender ciertos conceptos generales que son importantes en Análisis Matemático. Partimos de la definición de  $\mathbb{R}^n$  y su estructura algebraica básica, la de espacio vectorial. Al estudiar el producto escalar en  $\mathbb{R}^n$ , completamos la definición del espacio euclídeo, así llamado porque formaliza analíticamente los axiomas y resultados de la geometría de Euclides.

**Definición 1.1 (Espacio euclídeo).** Definimos el espacio euclídeo  $n$ -dimensional como el producto cartesiano de  $n$  copias de  $\mathbb{R}$ , es decir, el conjunto de todas las posibles  $n$ -uplas de números reales:  
$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in 1 \dots n\}$$

Sin embargo, no siempre es conveniente usar subíndices para denotar las componentes de los elementos de  $\mathbb{R}^n$ , pues podemos necesitar los subíndices para otra finalidad. Para valores concretos de  $n$ , podemos denotar las componentes con letras diferentes, siendo habitual escribir:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

En  $\mathbb{R}^n$  disponemos de las operaciones de suma y producto por escalares, definidas, para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , por

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

**Proposición 1.1.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Entonces:

- a)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (Propiedad asociativa)
- b)  $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \implies x + 0 = 0 + x = x$
- c) Dado  $x = (x_1, \dots, x_n) \implies \exists! v \in \mathbb{R}^n : x + v = v + x = 0 \implies v = (-x_1, \dots, -x_n) = -x$
- d)  $x + y = y + x$
- e)  $1 * x = x$
- f)  $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$
- g)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- h)  $(\lambda\beta)y = \lambda(\beta y)$

**Definición 1.2 (Producto escalar).** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos el producto escalar de  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

**Proposición 1.2.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ :

- a)  $x, y, z \in \mathbb{R}^n \implies \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- b)  $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \implies \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- c)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

**Proposición 1.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz).** Sean  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , entonces:

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

*Demostración.*

Para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , es cierto que  $0 \leq \sum_{i=1}^n (ax_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a^2 x_i^2 + y_i^2 + 2ax_i y_i) = a^2 (\sum_{i=1}^n x_i^2) + (\sum_{i=1}^n y_i^2) + 2a (\sum_{i=1}^n x_i y_i)$  para todo número real  $a$  y es igualdad si, y sólo si, cada término de la suma es cero. Esta desigualdad puede escribirse en la forma:  $Ax^2 + Bx + C$  donde  $A = \sum_{i=1}^n x_i^2$ ,  $B = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ,  $C = \sum_{i=1}^n y_i^2$ . En particular, la desigualdad se cumple para  $\frac{-B}{2A}$ :  $A(\frac{-B}{2A})^2 + 2B(\frac{-B}{2A}) + C \geq 0 \implies C \geq \frac{B^2}{2} \implies B^2 \leq AC$ .  $\square$

**Definición 1.3 (Norma).** Dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , se define la norma de  $x$  como:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

## Referencias

.