Bündeltheorie

Adrian Pegler

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Arbeitsgruppe Geometrie
Prof. Dr. Hartmut Weiß
24098 Kiel

3. August 2018

Einleitung

Dieses Dokument stellt eine Verschriftlichung meines Seminarvortrages in *Differenzierbare Mannigfaltigkeiten* dar. Der Vortrag und dieses Dokument folgen weiterstgehend dem Aufbau des Vorlesungsskriptes *Gauge Theory* von Bär [1]. Nachdem der vorangegangene Vortrag Lie-Gruppen und -Algebren sowie Vektorfelder und adjungierte Darstellungen zum Thema hatte sollen hier unterschiedliche Bündel eingeführt werden. Beginnend mit Faserbündeln werden nacheinander Vektorbündel, Hauptfaserbündel, assoziierte Bündel sowie Rahmenbündel eingeführt und einige Eigenschaften festgehalten und Beispiele vorgestellt. Auf Grund des geforderten Umfanges werde ich auf eigene Beweisführungen verzichten und verweise auf Quellen in denen die entsprechenden Beweise geführt wurden.

Wiederholung

Definition 0.1. ***Lie-Gruppe***
*Eine Differenzierbare Mannigfaltigkeit G, die gleichzeitig eine Gruppenstruktur aufweist wird **Lie-Gruppe** gennant, falls die Abbildung*

$$G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2 \text{ und}$$
$$G \to G, g \mapsto g^{-1}$$

glatt sind.

Definition 0.2. ***Darstellung***
*Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und G eine Lie-Gruppe. Ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\rho\colon G \to Aut(V)$ heißt **Darstellung** von G.*

1 Faserbündel

Definition 1.1. ***Faserbündel***
Seien E, B, F Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\pi\colon E \to B$ eine glatte surjektive Funktion.
Falls es um jeden Punkt $x \in B$ eine Umgebung U sowie einen Diffeomorphismus $\varPhi_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$ gibt, sodass

$$\pi_U \circ \varPhi_U = \pi \tag{1}$$

gilt, nennen wir $(E, \pi, B; F)$ ***Faserbündel*** *mit* ***typischer Faser*** *F. Nach Gleichung 1 kommutiert also folgendes Schema:*

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \subset E \arrow[rr, "\varPhi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_U"] \\
& U \subset B &
\end{tikzcd}$$

B heißt ***Basisraum*** *und E* ***Totalraum*** *des Faserbündels. Die Abbildung $\varPhi_U$ wird auch* ***lokale Trivialisierung*** *oder* ***Bündelkarte*** *genannt. Mit $E_x := \pi^{-1}(x)$ bezeichnen wir für alle $x \in B$ die* ***Faser*** *über x.*

Diese Definition ist in Abbildung 1 veranschaulicht. Neben der Beziehung zwischen dem Totalraum E und dem Basisraum B, sind in blau ein Punkt $x \in B$

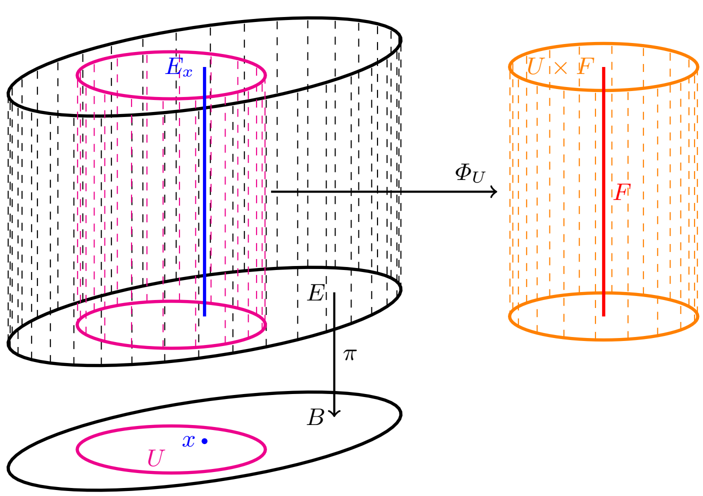

Abb. 1: Skizze eines Faserbündels.

und sein Urbild E_x bezüglich π sowie in magenta die Umgebung U um x und deren Urbild unter π dargestellt. Zudem sind die typische Faser F in rot und der Diffeomorphismus Φ_U sowie dessen Bild $U \times F$ in orange abgebildet.

Definition und Bemerkung 1.2.
Für alle $x \in B$ sei folgende Abbildung definiert:

$$\Phi_{U,x} \colon E_x \to F,\ \Phi_{U,x} := \pi_F \circ \Phi_U.$$

Dann ist für jede Faser E_x durch $\Phi_{U,x}$ ein Isomorphismus auf die typische Faser F gegeben, was der Grund für deren Benennung ist.

Definition 1.3. *Isomorphie*
Seien (E, π, B) und $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, B)$ Faserbündel über dem gleichen Basisraum B. Wir nennen die Faserbündel isomorph, falls es einen Diffeomorphismus $\Psi \colon E \to \tilde{E}$ gibt, sodass $\tilde{\pi} \circ \Psi = \pi$. Schematisch gilt also Folgendes:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \tilde{E} \arrow[dl, "\tilde{\pi}"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Beispiel 1.4.
*Seien M und F Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\pi \colon M \times F \to M$ die Projektion auf die erste Komponente. Dann ist $(M \times F, \pi, M)$ ein Faserbündel. Jedes zu diesem Faserbündel isomorphe Faserbündel nennen wir **trivial**.*

Beispiel 1.5.
Sei M eine n-dimensionale Differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Folgenden Bündel sind Faserbündel mit Basisraum M:

1. *das Tangentialbündel: $(TM, \pi, M); \mathbb{R}^n$,*
2. *das Cotangentialbündel: $(T^*M, \pi, M); \mathbb{R}^n$,*
3. *das k-Formenbündel: $(\Omega^k M, \pi, M); \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.*

Beispiel 1.6.
Sei (B, g) eine n-dimensionale Riemansche Mannigfaltigkeit. Setze:

$$E := \{x \in TB \mid \|x\|_g = 1\},$$
$$\pi := \pi_{TB}\big|_E.$$

*Das Faserbündel (E, π, B) heißt **Einheits-Sphären-Bündel**.*

Dieser Name leitet sich von der typischen Faser $F = S^{n-1}$ her. Dies folgt, da mit den Definitionen von E und π für alle $p \in B$ gilt:

$$\pi^{-1}(p) = \{x \in T_pB \mid \|x\|_g = 1\}.$$

Die lokalen Trivialisierungen erhält man aus denen des Tangentialbündels.

1.1 Konstruktionen

Lemma und Definition 1.7. ***Rückzug***
Seien M, N Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Für ein Faserbündel (E, π, M) definieren wir $f^*(E, \pi, M) := (f^*E, \tilde{\pi}, N)$ durch:

$$\begin{aligned} f^*E &:= \{(y, e) \in N \times E \mid f(y) = \pi(e)\} \\ \tilde{\pi}(y, e) &:= y \end{aligned}$$

Damit ist $(f^*E, \tilde{\pi}, N)$ ein Faserbündel über N und heißt der ***Rückzug*** *(engl.: pull back) von (E, π, M) entlang f. Dabei bleibt die typische Faser erhalten.*

Bemerkung 1.8.
Sei F eine glatte Mannigfaltigkeit und $\varphi\colon F \to F$ ein Diffeomorphismus. Dann wirkt $\mathbb{Z}$ durch $(k, (t, f)) \mapsto (t + k, \varphi^k(f))$ eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{R} \times F$.

Mit $E := {}^{\mathbb{R}\times F}/_{\mathbb{Z}}$ und $\pi\colon E \to {}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}} \cong S^1 =: B$ ist (E, π, B) ein Faserbündel mit typischer Faser F.

Geometrisch wird der Totalraum E also aus den trivialen Bündeln $[0, 1] \times F \to [0, 1]$ durch "zusammenkleben" der Fasern durch den Diffeomorphismus φ konstruiert. Um lokale Trivialisierungen zu konstruieren, nutzt man die (globale) Trivialität der Projektion $\pi_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \times F \to \mathbb{R}$ sowie die eigentliche Diskontinuität der Wirkung.

1.2 Schnitte

Definition 1.9. ***Schnitt***
Unter einem glatten Schnitt eines Faserbündels (E, π, B) versteht man eine glatte Abbildung $s\colon B \to E$, sodass $\pi \circ s = id_B$. Mit $\Gamma(E)$ bezeichnen wir die Menge aller Schnitte in E.

Bemerkung 1.10.
Für ein triviales Faserbündel $(M \times F, \pi_M, M)$ gilt offensichtlich:

$$\Gamma(M \times F) = \mathcal{C}^\infty(M, F)$$

Weitere bekannte Objekte aus der Geometrie, die als Schnitte von Faserbündeln aufgefasst werden können sind:

ausarbeiten

$$\begin{array}{ll} \Gamma(TB) & \text{Vektorfelder über } B, \\ \Gamma(T^*B) & \text{1-Formen über } B, \\ \Gamma(\Omega^k T^*M) & k\text{-Formen über } B. \end{array}$$

Definition und Bemerkung 1.11. ***Vektorbündel***
Für ein beliebiges Faserbündel (E, π, B) mit typischer Faser F, kann die Menge der Schnitte $\Gamma(E) = \emptyset$ sein.

Nullschnitt?

Existiert jedoch ein Isomorphismus $F \to \mathbb{K}^n$, so gibt es immer Schnitte. Ein solches Faserbündel nennen wir auf $\mathbb{K}$-Vektorbündel.

2 Hauptfaser- und Rahmenbündel

Definition 2.1. ***Hauptfaserbündel***
*Sei (P, π, B) ein Faserbündel und G eine Lie-Gruppe. $(P, \pi, B) = (P, \pi, B; G)$ heißt G-**Hauptfaserbündel**, falls gilt:*

1. *G wirkt von rechts als Liesche Transformationsgruppe auf P. Die Wirkung ist frei, fasertreu und faserweise transitiv.*
2. *Es gibt einen Bündelatlas $\{\Phi_U\}$ aus G-äquivarianten (lokalen) Trivialisierungen. Das heißt:*
   (a) *$\Phi_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$ ist ein Diffeomorphismus.*
   (b) *$\pi_U \circ \Phi_U = \pi$* [a].
   (c) *$\Phi_U(p \cdot g) = \Phi_U(p) \cdot g$ für alle $p \in \pi^{-1}$, $g \in G$.*

Es gilt also folgendes Schema:

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \times G \arrow[rr, "\cdot_G"] \arrow[dr, "\Phi_U \times id_G"] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dr, "\pi_U"] & \\
& U \times G \times G \arrow[rr, "id_U \times \cdot_G"] & & U \times G
\end{tikzcd}
$$

*Die Lie-Gruppe G heißt auch **Strukturgruppe** des Hauptfaserbündels.*

Bemerkung 2.2.
Für alle $p \in P$ ist $L_p\colon G \to P_{\pi(p)}, g \mapsto p \cdot g$ ein Diffeomorphismus. Daher ist die Lie-Gruppe G die typische Faser von (P, π, B).

Trotz dieser natürlichen Diffeomorphie existiert im Allgemeinen keine Gruppenstruktur auf den Fasern von P.

2.1 Schnitte

Sei (P, π, B) ein Hauptfaserbündel. Sei $U \subset B$ eine offene Umgebung und setze $P|_U := \pi^{-1}(U)$. Ferner sei eine lokale Trivialisierung

$$\Phi_U\colon P|_U \to U \times G$$

gegeben. Dann kann wie folgt ein glatter Schnitt $s\colon U \to P|_U$ definiert werden:

$$s(x) := \Phi_U^{-1}(x, 1_G).$$

[a] π_U ist die Projektion $U \times G \to U$.

Für beliebiges $g \in G$ und $u \in U$ erhält man somit:

$$\Phi_U^{-1}(u,g) = \Phi_U^{-1}(u, 1_g \cdot g) = \Phi_U^{-1}(u, 1_G) \cdot g = s(u) \cdot g$$

Sei umgekehrt ein glatter Schnitt $s\colon U \to P|_U$ gegeben. Dann existiert für jedes $p \in P_x,\ x \in B$ ein eindeutig bestimmtes Element $g_p \in G$, sodass

$$p = s(\pi(p)) \cdot g_p$$

gilt, da die Gruppenwirkung frei und transitiv ist. Durch die Zuweisung

$$\Phi_U(p) := (\pi(p), g_p)$$

erhält man so eine lokale Trivialisierung $\Phi_U\colon P|_U \to U \times G$.

Folgerung 2.3.
Es existiert eine eins-zu-eins-Beziehung zwischen lokalen Trivialisierungen und lokalen Schnitten.

Hauptfaserbündel können lokal also auch durch ihre Schnitte beschrieben werden. Dies soll im Folgenden konkret festgehalten werden:

Lemma 2.4.
Alternativ kann Punkt 2 in Definition 2.1 mit dem zuvor erläuterten auch folgendermaßen formuliert werden:

2'. Es existieren eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von B und lokale Schnitte $\{s_i\colon U_i \to P\}_{i \in I}$, sodass

$$\Psi_{s_i}\colon P_{U_i} \to G, p = s_i(\pi(p)) \cdot g_p \mapsto g_p$$

glatt ist.

Nachdem wir nun eine alternative Charakterisierung für Hauptfaserbündel gefunden haben, muss noch definiert werden, wann Hauptfaserbündel isomorph sind. Anschließend wird erläutert, warum sich diese Definition von der Isomorphie von Faserbündeln unterscheidet.

Definition 2.5. ***Isomorphie***
Zwei G-Hauptfaserbündel (P, π, B) und $(\tilde{P}, \tilde{\pi}, B)$ über dem selben Basisraum B heißen isomorph, falls es einen G-äquivarianten Diffeomorphismus $\Phi\colon P \to \tilde{P}$ gibt, für den $\tilde{\pi} \circ \Phi = \pi$ gilt.

Bemerkung 2.6.
Die G-Äquivarianz ist wesentlich! Es gibt G-Hauptfaserbündel, die als Faserbündel betrachtet, nicht jedoch als Hauptfaserbündel isomorph sind.

Ein Gegenbeispiel ist leicht konstruiert, indem man bei identischen Faserbündeln die Gruppenwirkungderart definiert, dass Φ nicht G-äquivarianten ist. Die Faserbündel bleiben identisch, also insbesondere isomorph, als G-Hauptfaserbündel sind sie allerdings nicht isomorph.

Lemma 2.4 und Definition 2.5, insbesondere mit der vorigen Bemerkung 2.6, implizieren folgende Äquivalenz:

Folgerung 2.7. ***Trivialität***
Ein G-Hauptfaserbündel (P, π, B) ist genau dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt besitzt.

2.2 Konstruktionen

Lemma 2.8. ***Rückzug***
Sei (P, π, B) ein G-Hauptfaserbündel und sei $F : B \to \tilde{B}$ eine glatte Abbildung. Das durch den Rückzug (vgl. Definition 1.7) konstruierte Faserbündel $(f^* P, \tilde{\pi}, \tilde{B})$ ist bereits ein G-Hauptfaserbündel.

Beweis

Im Folgenden soll eine Möglichkeit aufgezeigt werden, die typische Faser und damit die Lie-Gruppe eines Hauptfaserbündels zu "ersetzen". Sei dazu ein G-Hauptfaserbündel (P, π, B) sowie eine Mannigfaltigkeit F und eine Transformationsgruppe $[F, G]$ gegeben.

Dann wirkt G durch

$$(p, f) \cdot g := (p \cdot g, g^{-1} \cdot f)$$

von rechts auf $P \times F$. Im Folgenden bezeichnet $P \times_G F := {}^{P \times F}/_{G}$ den Faktorraum und $[p, f]$ die Äquivalenzklasse von (p, f). Damit wird folgende Abbildung definiert:

$$\pi_{\times_G} : P \times_G F \to B, \ [p, f] \mapsto \pi(p)$$

Lemma und Definition 2.9. ***Assoziiertes Faserbündel***
Das Tupel $(P \times_G F, \pi_{\times_G}, B)$ ist ein Faserbündel über B mit typischer Faser F. Wir nennen es das zu (P, π, B) und der Transformationsgruppe $[F, G]$ ***assoziierte Faserbündel****.*

Beweis

Ist statt einer Transformationsgruppe $[F, G]$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\varphi : G \to F$ gegeben, so findet sich auch die Schreibweise $P \times_\varphi F$ als Alternative zu $P \times_G F$.

Spezialfälle assoziierter Bündel

Beispiel 2.10. ***Assoziiertes Vektorbündel***
Seien (P, π, B) ein G-Hauptfaserbündel, V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\rho : G \to Aut(V)$ eine Darstellung von G. Dann ist $(P \times_\rho V, \pi_{\times_\rho}, B)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel mit typischer Faser $\mathbb{K}^n$ und wird das zu (P, π, B) und ρ ***assoziierte Vektorbündel*** *genannt.*

Beispiel 2.11. ***Erweiterung und Reduktion***
Ist H eine Lie-Gruppe und $[H,G]$ eine Transformationsgruppe bzw. $\varphi\colon G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, so ist $(P\times_G H, \pi_{\times_G}, B)$ bzw $(P\times_\varphi H, \pi_{\times_\varphi}, B)$ ein H-Hauptfaserbündel.

- *Gilt $H \trianglerighteq G$ und φ ist eine Einbettung, so wird auch von einer (φ-)**Erweiterung** der Strukturgruppe gesprochen.*
- *Gilt umgekehrt $H \trianglelefteq G$, so wird auch von einer (φ-)**Reduktion** der Strukturgruppe gesprochen. Dies kann besonders hilfreich sein, wenn Eigenschaften der Strukturgruppe verschärft werden sollen. Beispielweise gibt es Aussagen, die eine Kompakte Strukturgruppe voraussetzen. Dies kann ggf. über eine solche Reduktion erreicht werden.*

Rahmenbündel Sei (V, π, B) ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel von Rang n. Dann ist für alle $b \in B$ die Faser V_b ein n-dimensionaler Vektorraum.

Setze nun $\mathfrak{B}_b := \{(b_1, \ldots, b_n) \in V_b \mid (b_1, \ldots, b_n)$ ist eine (geordnete) Basis von $V_b\}$ Dann wirkt $GL(n, \mathbb{K})$ durch

$$(b_1, \ldots, b_n) \cdot A := \left(\sum_{i=1}^{n} A_{i1} b_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} A_{in} b_n \right)$$

frei und transitiv von rechts auf $\mathfrak{B}_b$. Damit wird $(\mathfrak{B}, \tilde{\pi}, B)$ mit $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_V := \bigcup_{b\in B} \mathfrak{B}_b$ und $\tilde{\pi}\colon \mathfrak{B} \to B$, sodass $\tilde{\pi}|_{\mathfrak{B}_b} \equiv b$ gilt, zu einem $GL(n, \mathbb{K})$-Hauptfaserbündel.

Definition 2.12. ***Rahmenbündel***
*Sei B eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $V := TB \to B$ das Tangentialbündel. Dann heißt das durch obige Konstruktion gewonnen $GL(n, \mathbb{K})$-Hauptfaserbündel $(\mathfrak{B}_V, \tilde{\pi}, B)$ **Rahmenbündel** von B.*

*Ist (B, g) eine Riemansche Mannigfaltigkeit und sind in der Konstruktion die $\mathfrak{B}_b$ zusätzlich orthonormal gewählt, so heißt das entstehende $O(n)$-Hauptfaserbündel **orthonormales Rahmenbündel**.*

Natürlicherweise ergeben sich folgende G-Hauptfaserbündel als Bündel (geordneter) Basen:

$\mathbb{K}$	Vektorbündel	(geordnete) Basis	G
$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	beliebig	alle	$GL(n, \mathbb{K})$
$\mathbb{R}$	Riemannsch	orthonormal	$O(n)$
$\mathbb{C}$	Hermitisch	orthonormal	$U(n)$
$\mathbb{R}$	orientiert	pos. orientiert	$GL^+(n, \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	Riemannsch, orientiert	orthonormal, orientiert	$SO(n)$

Im Folgenden werden noch einige weitere Beispiele für Hauptfaserbündel gegeben:

Beispiel 2.13. ***Triviales Hauptfaserbündel***
Für alle Differenzierbaren Mannigfaltigkeiten B und Lie-Gruppen G ist $(B \times G, \pi_B, B; G)$ das triviale G-Hauptfaserbündel.

Beispiel 2.14. ***Homogenes Bündel***
Sei G eine Lie-Gruppe, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, ${}^{G}/_{H}$ der zugehörige homogene Raum und $\pi\colon G \to {}^{G}/_{H}$ die Projektion auf den Faktorraum. Dann ist $(G, \pi, {}^{G}/_{H}; H)$ ein H-Hauptfaserbündel, genannt das homogene Bündel.

Beispiel 2.15. ***Steifel- und Grassmann-Mannigfaltigkeit***
Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ (b) bezeichne $< \cdot, \cdot >_{\mathbb{K}^n}$ das Standard-Skalarprodukt.

Unter der Stiefelmannigfaltigkeit $V_k(\mathbb{K}^n)$ versteht man die Menge aller k-Tupel von orthonormalen Vektoren im $\mathbb{K}^n$:

$$V_k(\mathbb{K}^n) := \{(v1, \ldots, v_k) \mid v_i \in \mathbb{K}^n,\ < v_i, v_j >_{\mathbb{K}^n} = \delta_{ij}{}^{(c)}\}$$

versehen mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur.

Unter der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_k(\mathbb{K}^n)$ versteht man die Menge aller k-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{K}^n$ versehen mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur.

Durch

$$\pi\colon V_k(\mathbb{K}^n) \to G_k(\mathbb{K}^n), (v_1, \ldots, v_k) \mapsto span(v_1, \ldots, v_k)$$

wird $(V_k(\mathbb{K}^n), \pi, G_k(\mathbb{K}^n))$ zu einem $\mathfrak{G}$-Hauptfaserbündel. Die typische Faser $\mathfrak{G}$ ist dabei abhängig vom Körper $\mathbb{K}$:

$\mathbb{K}$	$\mathfrak{G}$
$\mathbb{R}$	$O(n)$
$\mathbb{C}$	$U(n)$
$\mathbb{H}$	$Sp(n)$

Literatur

[1] Christian Bär. *Gauge Theory.* Techn. Ber. Potsdam University, 2011.

(b) $\mathbb{H}$ bezeichnet den Quaternionenkörper.
(c) $\delta_{ij}\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ mit $\delta_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$ bezeichnet das Kronecker-Delta.