Hauptfaserbündel und Vektorbündel

Adrian Pegler

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Arbeitsgruppe Geometrie
24098 Kiel

1. August 2018

Zusammenfassung. This is my abstract.

1 Faserbündel

Definition 1.1. ***Faserbündel***
Seien E, B, F Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\pi\colon E \to B$ eine glatte surjektive Funktion.
Falls es um jeden Punkt $x \in B$ eine Umgebung U sowie einen Diffeomorphismus $\Phi_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$ gibt, sodass

$$\pi_U \circ \Phi_U = \pi \tag{1}$$

gilt, nennen wir (E, π, B) ***Faserbündel*** *mit* ***typischer Faser*** *F. Nach Gleichung 1 kommutiert also folgendes Schema:*

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \subset E \arrow[rr, "\Phi_U"] \arrow[dr, "\pi"] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_U"] \\
& U \subset B &
\end{tikzcd}$$

B heißt ***Basisraum*** *und E* ***Totalraum*** *des Faserbündels. Die Abbildung Φ_U wird auch* ***lokale Trivialisierung*** *oder* ***Bündelkarte*** *genannt. Mit $E_x := \pi^{-1}(x)$ bezeichnen wir für alle $x \in B$ die* ***Faser*** *über x.*

Diese Definition ist in Abbildung 1 veranschaulicht. Neben der Beziehung zwischen dem Totalraum E und dem Basisraum B, sind in blau ein Punkt $x \in B$ und sein Urbild E_x bezüglich π sowie in magenta die Umgebung U um x und deren Urbild unter π dargestellt. Zudem sind die typische Faser F in rot und der Diffeomorphismus Φ_U sowie dessen Bild $U \times F$ in orange abgebildet.

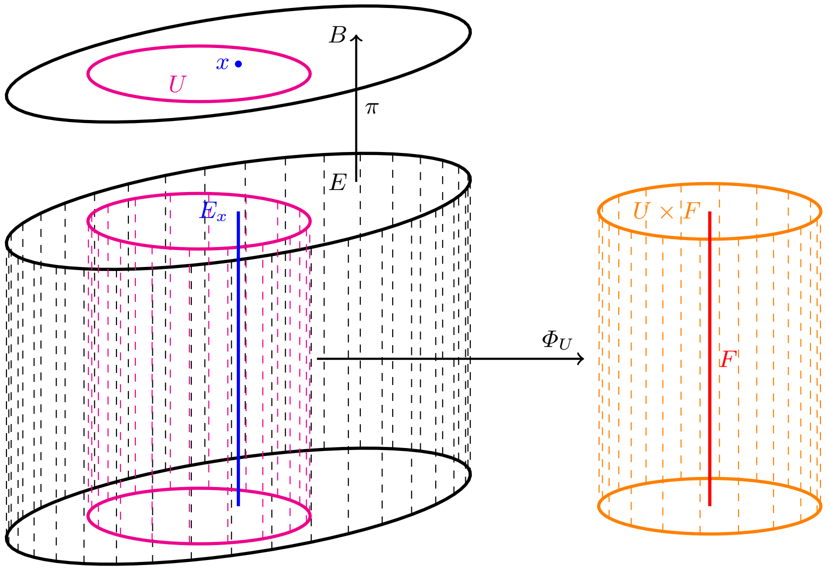

Abb. 1: Skizze eines Faserbündels.

Definition und Bemerkung 1.2.
Für alle $x \in B$ sei folgende Abbildung definiert:

$$\Phi_{U,x} \colon E_x \to F, \ \Phi_{U,x} := \pi_F \circ \Phi_U .$$

Dann ist für jede Faser E_x durch $\Phi_{U,x}$ ein Isomorphismus auf die typische Faser F gegeben, was der Grund für deren Benennung ist.

Definition 1.3. *Isomorphie*
Seien (E, π, B) und $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, B)$ Faserbündel über dem gleichen Basisraum B. Wir nennen die Faserbündel isomorph, falls es einen Diffeomorphismus $\Psi \colon E \to \tilde{E}$ gibt, sodass $\tilde{\pi} \circ \Psi = \pi$. Schematisch gilt also Folgendes:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \tilde{E} \arrow[dl, "\tilde{\pi}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Beispiel 1.4.
*Seien M und F Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\pi \colon M \times F \to M$ die Projektion auf die erste Komponente. Dann ist $(M \times F, \pi, M)$ ein Faserbündel. Jedes zu diesem Faserbündel isomorphe Faserbündel nennen wir **trivial**.*

Beispiel 1.5.
Sei M eine n-dimensionale Differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Folgenden Bündel sind Faserbündel mit Basisraum M:

1. *das Tangentialbündel:* $(TM, \pi, M); \mathbb{R}^n$,
2. *das Cotangentialbündel:* $(T^*M, \pi, M); \mathbb{R}^n$,
3. *das k-Formenbündel:* $(\Omega^k M, \pi, M); \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.

Beispiel 1.6.
Sei (B, g) eine n-dimensionale Riemansche Mannigfaltigkeit. Setze:

$$E := \{x \in TB \mid \|x\|_g = 1\},$$
$$\pi := \pi_{TB}\big|_E.$$

*Das Faserbündel (E, π, B) heißt **Einheits-Sphären-Bündel**.*

Dieser Name leitet sich von der typischen Faser $F = S^{n-1}$ her. Dies folgt, da mit den Definitionen von E und π für alle $p \in B$ gilt:

$$\pi^{-1}(p) = \{x \in T_pB \mid \|x\|_g = 1\}.$$

Die lokalen Trivialisierungen erhält man aus denen des Tangentialbündels.

Lemma und Definition 1.7. ***Rückzug***
Seien M, N Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Für ein Faserbündel (E, π, M) definieren wir $f^*(E, \pi, M) := (f^*E, \tilde{\pi}, N)$ durch:

$$f^*E := \{(y, e) \in N \times E \mid f(y) = \pi(e)\}$$
$$\tilde{\pi}(y, e) := y$$

*Damit ist $(f^*E, \tilde{\pi}, N)$ ein Faserbündel über N und heißt der **Rückzug** (engl.: pull back) von (E, π, M) entlang f. Dabei bleibt die typische Faser erhalten.*

Bemerkung 1.8.
Sei F eine glatte Mannigfaltigkeit und $\varphi\colon F \to F$ ein Diffeomorphismus. Dann wirkt $\mathbb{Z}$ durch $(k, (t, f)) \mapsto (t + k, \varphi^k(f))$ eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{R} \times F$.

Mit $E := {}^{\mathbb{R}\times F}/_{\mathbb{Z}}$ und $\pi\colon E \to {}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}} \cong S^1 =: B$ ist (E, π, B) ein Faserbündel mit typischer Faser F.

Geometrisch wird der Totalraum E also aus den trivialen Bündeln $[0, 1] \times F \to [0, 1]$ durch “zusammenkleben” der Fasern durch den Diffeomorphismus φ konstruiert. Um lokale Trivialisierungen zu konstruieren, nutzt man die (globale) Trivialität der Projektion $\pi_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \times F \to \mathbb{R}$ sowie die eigentliche Diskontinuität der Wirkung.

Definition 1.9. ***Schnitt***
Unter einem glatten Schnitt eines Faserbündels (E, π, B) versteht man eine glatte Abbildung $s\colon B \to E$, sodass $\pi \circ s = id_B$. Mit $\Gamma(E)$ bezeichnen wir die Menge aller Schnitte in E.

Bemerkung 1.10.
Für ein triviales Faserbündel $(M \times F, \pi_M, M)$ *gilt offensichtlich:*

$$\Gamma(M \times F) = \mathcal{C}^\infty(M, F)$$

Weitere bekannte Objekte aus der Geometrie, die als Schnitte von Faserbündeln aufgefasst werden können sind:

ausarbeiten

$$\begin{array}{ll} \Gamma(TB) & \textit{Vektorfelder über } B, \\ \Gamma(T^*B) & \textit{1-Formen über } B, \\ \Gamma(\Omega^k T^*M) & \textit{k-Formen über } B. \end{array}$$

Definition und Bemerkung 1.11. ***Vektorbündel***
Für ein beliebiges Faserbündel (E, π, B) *mit typischer Faser* F*, kann die Menge der Schnitte* $\Gamma(E) = \emptyset$ *sein.*

Nullschnitt?

Existiert jedoch ein Isomorphismus $F \to \mathbb{K}^n$*, so gibt es immer Schnitte. Ein solches Faserbündel nennen wir auf* $\mathbb{K}$*-Vektorbündel.*

2 Hauptfaser- und Rahmenbündel

Definition 2.1. ***Hauptfaserbündel***
Sei (P, π, B) ein Faserbündel und G eine Lie-Gruppe. $(P, \pi, B) = (P, \pi, B; G)$ heißt ***G-Hauptfaserbündel****, falls gilt:*

1. *G wirkt von rechts als Liesche Transformationsgruppe auf P. Die Wirkung ist frei, fasertreu und faserweise transitiv.*
2. *Es gibt einen Bündelatlas $\{\Phi_U\}$ aus G-äquivarianten (lokalen) Trivialisierungen. Das heißt:*
   (a) *$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ ist ein Diffeomorphismus.*
   (b) *$\pi_U \circ \Phi_U = \pi$.*[1]
   (c) *$\Phi_U(p \cdot g) = \Phi_U(p) \cdot g$ für alle $p \in \pi^{-1}$, $g \in G$.*

Es gilt also folgendes Schema:

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \times G \arrow[rr, "\cdot_G"] \arrow[dr, "\Phi_U \times id_G"] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dr, "\pi_U"] & \\
& U \times G \times G \arrow[rr, "id_U \times \cdot_G"] & & U \times G
\end{tikzcd}
$$

Die Lie-Gruppe G heißt auch ***Strukturgruppe*** *des Haputfaserbündels.*

[1] π_u ist die Projektion $U \times G \to U$.