

Bündeltheorie

Adrian Pegler

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Arbeitsgruppe Geometrie
Prof. Dr. Hartmut Weiß
24098 Kiel

11. August 2018

Einleitung

Dieses Dokument stellt eine Verschriftlichung meines Seminarvortrages in *Differenzierbare Mannigfaltigkeiten* dar. Der Vortrag und dieses Dokument folgen weitestgehend dem Aufbau des Vorlesungsskriptes *Gauge Theory* von Bär [1]. Nachdem der vorangegangene Vortrag Lie-Gruppen und -Algebren sowie Vektorfelder und adjungierte Darstellungen zum Thema hatte, sollen hier unterschiedliche Bündelstrukturen eingeführt werden. Beginnend mit Faserbündeln werden nacheinander Vektorbündel, Hauptfaserbündel, assoziierte Bündel sowie Rahmenbündel eingeführt, einige Eigenschaften festgehalten und Beispiele vorgestellt. Auf Grund des geforderten Umfangs werde ich auf eigene Beweisführungen verzichten und verweise auf Quellen, in denen die entsprechenden Beweise geführt wurden.

Wiederholung

Definition 0.1. Lie-Gruppe

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G , die gleichzeitig eine Gruppenstruktur aufweist, wird **Lie-Gruppe** genannt, falls die Abbildungen

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2 \text{ und} \\ G &\rightarrow G, g \mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

glatt sind.

Definition 0.2. Darstellung

Seien V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und G eine Lie-Gruppe. Ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ heißt **Darstellung** von G .

Schreibweise 0.3. Projektion

Seien M, N Mengen. Dann bezeichnen $\pi_M: M \times N \rightarrow M$ und $\pi_N: M \times N \rightarrow N$ die Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente.

1 Faserbündel

Definition 1.1. *Faserbündel*

Seien E, B, F differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\pi: E \rightarrow B$ eine glatte surjektive Funktion.

Falls es um jeden Punkt $x \in B$ eine Umgebung U sowie einen Diffeomorphismus $\Phi_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ gibt, sodass

$$\pi_U \circ \Phi_U = \pi \quad (1)$$

gilt, nennen wir $(E, \pi, B)^{(a)} = (E, \pi, B; F)$ **Faserbündel** mit **typischer Faser** F . Nach Gleichung 1 kommutiert also folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) \subset E & \xrightarrow{\Phi_U} & U \times F \\ \searrow \pi & & \swarrow \pi_U \\ & U \subset B & \end{array}$$

B heißt **Basisraum** und E **Totalraum** des Faserbündels. Die Abbildung Φ_U wird auch **lokale Trivialisierung** oder **Bündelkarte** genannt. Mit $E_x := \pi^{-1}(x)$ bezeichnen wir für alle $x \in B$ die **Faser** über x .

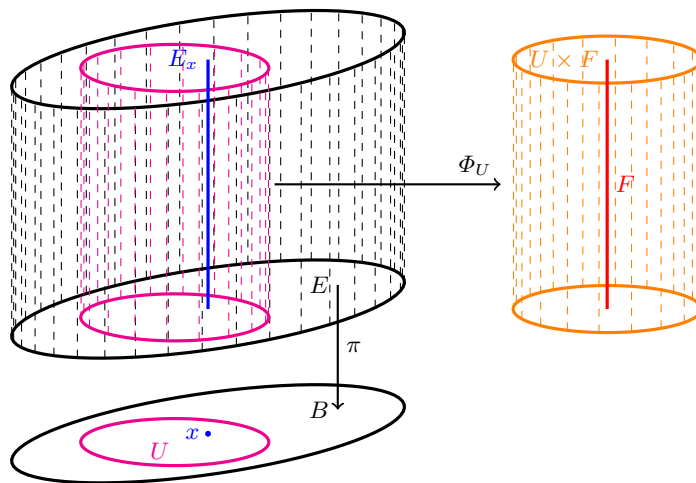


Abb. 1: Skizze eines Faserbündels.

^(a)Diese kürzere Schreibweise findet Verwendung, wenn F klar oder nicht relevant ist.

Abbildung 1 veranschaulicht die Komponenten aus Definition 1.1. Neben der Beziehung zwischen dem Totalraum E und dem Basisraum B sind in blau ein Punkt $x \in B$ und sein Urbild E_x bezüglich π sowie in magenta die Umgebung U um x und deren Urbild unter π dargestellt. Zudem sind die typische Faser F in rot und der Diffeomorphismus Φ_U sowie dessen Bild $U \times F$ in orange abgebildet.



Abb. 2: Alltagsbeispiel eines Faserbündels: Runde Haarbürste.^(b)

Ein Beispiel aus dem Alltag, das als Faserbündel aufgefasst werden kann, ist eine Haarbürste, wie sie in Abbildung 2 abgebildet ist. Der Basisraum B ist der Holzzylinder, der Totalraum E sind die Borsten. Die lokale Trivialisierung π bildet jeden Punkt der Borsten auf ihre jeweilige Wurzel auf dem Zylinder ab.^(c)

Definition und Bemerkung 1.2.

Für jede lokale Trivialisierung Φ_U und alle $x \in U$ sei folgende Abbildung definiert:

$$\Phi_{U,x}: E_x \rightarrow F, \quad \Phi_{U,x} := \pi_F \circ \Phi_U.$$

Dann ist für jede Faser E_x durch $\Phi_{U,x}$ ein Isomorphismus auf die typische Faser F gegeben, daher auch der Name.

Definition 1.3. Isomorphie

Seien (E, π, B) und $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, B)$ Faserbündel über dem gleichen Basisraum B . Wir nennen die Faserbündel isomorph, falls es einen Diffeomorphismus $\Psi: E \rightarrow \tilde{E}$ gibt, sodass $\tilde{\pi} \circ \Psi = \pi$. Schematisch gilt also Folgendes:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & \tilde{E} \\ & \searrow \pi & \swarrow \tilde{\pi} \\ & B & \end{array}$$

Beispiel 1.4.

Seien M und F differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\pi: M \times F \rightarrow M$ die Projektion auf die erste Komponente. Dann ist $(M \times F, \pi, M; F)$ ein Faserbündel. Jedes zu diesem Faserbündel isomorphe Faserbündel nennen wir **trivial**. [2]

^(b)Quelle: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/ca/Roundhairbrush.JPG/320px-Roundhairbrush.JPG>

^(c)Dieses Beispiel wurde auf https://en.wikipedia.org/wiki/Fiber_bundle gefunden.

Beispiel 1.5.

Sei M eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die folgenden Bündel sind Faserbündel mit Basisraum M [2]:

1. das Tangentialbündel: $(TM, \pi, M; \mathbb{R}^n)$,
2. das Cotangentialbündel: $(T^*M, \pi, M; \mathbb{R}^n)$,
3. das k -Formenbündel: $(\Omega^k M, \pi, M; \mathbb{R}^{\binom{n}{k}})$.

Beispiel 1.6.

Sei (B, g) eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Setze:

$$E := \{x \in TB \mid \|x\|_g = 1\},$$

$$\pi := \pi_{TB}|_E.$$

Das Faserbündel (E, π, B) heißt **Einheits-Sphären-Bündel**.

Dieser Name leitet sich von der typischen Faser $F = S^{n-1}$ her. Dies folgt, da mit den Definitionen von E und π für alle $p \in B$ gilt:

$$\pi^{-1}(p) = \{x \in T_p B \mid \|x\|_g = 1\}.$$

Die lokalen Trivialisierungen erhält man aus denen des Tangentialbündels. [1]

1.1 Cozykeln

Seien $(E, \pi, B; F)$ ein Faserbündel und $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von B mit zugehörigen lokalen Trivialisierungen $\mathfrak{T} = \{\Phi_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$. Für $U_i, U_k \in \mathfrak{U}$ und $\Phi_{U_i}, \Phi_{U_k} \in \mathfrak{T}$ erhält man durch Hintereinanderausführung die sogenannten **Übergangsfunktionen**:

$$\Phi_{U_i} \circ \Phi_{U_k}^{-1}: (U_i \cap U_k) \times F \rightarrow (U_i \cap U_k) \times F.$$

Durch die in Definition und Bemerkung 1.2 definierten Abbildungen erhält man aus den Übergangsfunktionen für $(i, k) \in I^2$ Abbildungen

$$\Phi_{ik}: U_i \cap U_k \rightarrow \text{Diff}(F), \quad x \mapsto \Phi_{U_i, x} \circ \Phi_{U_k, x}^{-1}.$$

Definition 1.7. Cozykeln

Die zuvor konstruierten Abbildungen $\{\Phi_{ik}\}_{i, k \in I}$ heißen **Cozykeln des Faserbündels**.

Lemma und Definition 1.8. Cozykelbedingung

Die Cozykeln $\{\Phi_{ik}\}_{i, k \in I}$ eines Faserbündels $(E, \pi, B; F)$ erfüllen für alle $i, j, k \in I$ folgende Eigenschaften:

1. $\Phi_{ik} \cdot \Phi_{kj} = \Phi_{ij}$
2. $\Phi_{ii} = \text{id}_F$

Dies wird die **Cozykelbedingung** genannt.

1.2 Konstruktionen

Lemma und Definition 1.9. Rückzug

Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $f: N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Für ein Faserbündel (E, π, M) definieren wir $f^*(E, \pi, M) := (f^*E, \tilde{\pi}, N)$ durch:

$$f^*E := \{(y, e) \in N \times E \mid f(y) = \pi(e)\}$$

$$\tilde{\pi}(y, e) := y$$

Damit ist $(f^*E, \tilde{\pi}, N)$ ein Faserbündel über N und heißt der **Rückzug** (engl.: pull back) von (E, π, M) entlang f . Dabei bleibt die typische Faser erhalten. Ein Beweis wird von Baum [2] geführt.

Bemerkung 1.10.

Sei F eine glatte Mannigfaltigkeit und $\varphi: F \rightarrow F$ ein Diffeomorphismus. Dann wirkt \mathbb{Z} durch $(k, (t, f)) \mapsto (t + k, \varphi^k(f))$ eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{R} \times F$.

Mit $E := \mathbb{R} \times F / \mathbb{Z}$ und $\pi: E \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{Z} \cong S^1 =: B$ ist (E, π, B) ein Faserbündel mit typischer Faser F . [1]

Geometrisch wird der Totalraum E also aus den trivialen Bündeln $[0, 1] \times F \rightarrow [0, 1]$ durch “Zusammenkleben” der Fasern durch den Diffeomorphismus φ konstruiert. Um lokale Trivialisierungen zu konstruieren, nutzt man die (globale) Trivialität der Projektion $\pi_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \times F \rightarrow \mathbb{R}$ sowie die eigentliche Diskontinuität der Wirkung. [1]

1.3 Schnitte

Definition 1.11. Schnitt

Unter einem glatten Schnitt eines Faserbündels (E, π, B) versteht man eine glatte Abbildung $s: B \rightarrow E$, sodass $\pi \circ s = \text{id}_B$. Mit $\Gamma(E)$ bezeichnen wir die Menge aller Schnitte in E .

Definition und Bemerkung 1.12. Vektorbündel

Für ein beliebiges Faserbündel $(E, \pi, B; F)$ kann für die Menge der Schnitte $\Gamma(E) = \emptyset$ gelten.

Existiert jedoch ein Isomorphismus $F \rightarrow \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, so gibt es immer Schnitte (vgl. Bemerkung 1.13). Ein solches Faserbündel nennen wir auch **\mathbb{K} -Vektorbündel von Rang n** .

Bemerkung 1.13. Nullschnitt

Sei $(E, \pi, B; F)$ ein Vektorbündel. Dann existiert wegen der Isomorphie zu K^n ein eindeutiges Element 0_F . Damit kann der sogenannte **Nullschnitt** wie folgt definiert werden:

$$s_0(x) := 0_F, \text{ für alle } x \in B.$$

Es gilt also $s_0 \in \Gamma(E) \neq \emptyset$.

Bemerkung 1.14.

Für ein triviales Faserbündel $(M \times F, \pi_M, M)$ gilt offensichtlich:

$$\Gamma(M \times F) = \mathcal{C}^\infty(M, F)$$

Weitere bekannte Objekte aus der Geometrie, die als Schnitte von Vektorbündeln aufgefasst werden können sind [1]:

| Vektorbündel | Schnitte |
|-----------------|-----------------------|
| TB | Vektorfelder über B |
| T^*B | 1-Formen über B |
| $\Omega^k T^*M$ | k-Formen über B |

2 Hauptfaser- und Rahmenbündel

Definition 2.1. Hauptfaserbündel

Sei (P, π, B) ein Faserbündel und G eine Lie-Gruppe. $(P, \pi, B) = (P, \pi, B; G)$ heißt **G -Hauptfaserbündel**, falls gilt:

1. G wirkt von rechts als Liesche Transformationsgruppe auf P . Die Wirkung ist frei, fasertreu und faserweise transitiv.
2. Es gibt einen Bündelatlas $\{\Phi_U\}$ aus G -äquivalenten (lokalen) Trivialisierungen. Das heißt:
 - (a) $\Phi_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ ist ein Diffeomorphismus.
 - (b) $\pi_U \circ \Phi_U = \pi$ ^(d).
 - (c) $\Phi_U(p \cdot g) = \Phi_U(p) \cdot g$ für alle $p \in \pi^{-1}(U)$, $g \in G$.

Es gilt also folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) \times G & \xrightarrow{\cdot G} & \pi^{-1}(U) \\
 \searrow \Phi_U \times id_G & & \searrow \Phi_U \\
 U \times G \times G & \xrightarrow{id_U \times \cdot G} & U \times G
 \end{array}$$

Die Lie-Gruppe G heißt auch **Strukturgruppe** des Hauptfaserbündels.

^(d) π_U ist die Projektion $U \times G \rightarrow U$.

Bemerkung 2.2.

Für alle $p \in P$ ist $L_p: G \rightarrow P_{\pi(p)}, g \mapsto p \cdot g$ ein Diffeomorphismus. Daher ist die Lie-Gruppe G die typische Faser von (P, π, B) .

Trotz dieser natürlichen Diffeomorphie existiert im Allgemeinen keine Gruppenstruktur auf den Fasern von P . [1]

Im Folgenden soll eine alternative Beschreibung für Hauptfaserbündel erläutert werden.

Sei $(P, \pi, B; G)$ ein G -Hauptfaserbündel. Sei $U \subset B$ eine offene Umgebung und setze $P|_U := \pi^{-1}(U)$. Ferner sei eine lokale Trivialisierung

$$\Phi_U: P|_U \rightarrow U \times G$$

gegeben. Dann kann wie folgt ein glatter Schnitt $s: U \rightarrow P|_U$ definiert werden:

$$s(x) := \Phi_U^{-1}(x, 1_G).$$

Für beliebiges $g \in G$ und $u \in U$ erhält man somit:

$$\Phi_U^{-1}(u, g) = \Phi_U^{-1}(u, 1_g \cdot g) = \Phi_U^{-1}(u, 1_G) \cdot g = s(u) \cdot g$$

Sei umgekehrt ein glatter Schnitt $s: U \rightarrow P|_U$ gegeben. Dann existiert für jedes $p \in P$, $x \in B$ ein eindeutig bestimmtes Element $g_p \in G$, sodass

$$p = s(\pi(p)) \cdot g_p$$

gilt, da die Gruppenwirkung frei und transitiv ist. Durch die Zuweisung

$$\Phi_U(p) := (\pi(p), g_p)$$

erhält man so eine lokale Trivialisierung $\Phi_U: P|_U \rightarrow U \times G$.

Folgerung 2.3.

Es existiert eine eins-zu-eins-Beziehung zwischen lokalen Trivialisierungen und lokalen Schnitten.

Hauptfaserbündel können lokal also auch durch ihre Schnitte beschrieben werden. Dies soll im Folgenden konkret festgehalten werden:

Lemma 2.4.

Alternativ kann Punkt 2 in Definition 2.1 mit dem zuvor Erläuterten auch folgendermaßen formuliert werden:

2'. *Es existieren eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von B und lokale Schnitte $\{s_i: U_i \rightarrow P\}_{i \in I}$, sodass*

$$\Psi_{s_i}: P_{U_i} \rightarrow G, p = s_i(\pi(p)) \cdot g_p \mapsto g_p$$

glatt ist.

Eine weitere Charakterisierung der Hauptfaserbündel kann über die zuvor definierten Cozykel und die folgenden G -Cozykel erfolgen [2].

Definition 2.5. G -Cozykeln

Seien M eine Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe. Weiterhin sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Eine Familie $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ glatter Funktionen $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$, die die Cozykelbedingung erfüllen, heißt **G -Cozykeln von M** .

Baum [2] beweist damit folgende Aussage:

Lemma 2.6.

Seien G eine Lie-Gruppe, P und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten sowie $\pi: P \rightarrow B$ eine glatte Funktion. Das Tupel $(P, \pi, B; G)$ ist genau dann ein G -Hauptfaserbündel, wenn

1. es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ sowie
2. zugehörige Trivialisierungen $\{\Phi_{U_i}\}_{i \in I}$ und G -Cozykeln $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ gibt,
3. sodass die Cozykeln Φ_{ij} von P gerade durch die Linkstranslation mit g_{ij}

$$\Phi_{ij}(x) = L_{g_{ij}(x)}$$

gegeben sind.

Nachdem wir nun alternative Charakterisierungen für Hauptfaserbündel gefunden haben, muss noch definiert werden, wann zwei Hauptfaserbündel isomorph sind. Anschließend wird erläutert, warum sich diese Definition von der Isomorphie von Faserbündeln unterscheidet.

Definition 2.7. Isomorphie

Zwei G -Hauptfaserbündel (P, π, B) und $(\tilde{P}, \tilde{\pi}, B)$ über demselben Basisraum B heißen isomorph, falls es einen G -äquivarianten Diffeomorphismus $\Phi: P \rightarrow \tilde{P}$ gibt, für den $\tilde{\pi} \circ \Phi = \pi$ gilt.

Bemerkung 2.8.

Die G -Äquivarianz ist wesentlich! Es gibt G -Hauptfaserbündel, die als Faserbündel betrachtet, nicht jedoch als Hauptfaserbündel isomorph sind.

Ein Gegenbeispiel ist leicht konstruiert, indem man bei identischen Faserbündeln die Gruppenwirkung derart definiert, dass Φ nicht G -äquivariant ist. Die Faserbündel bleiben identisch, also insbesondere isomorph, als G -Hauptfaserbündel sind sie allerdings nicht isomorph.

Lemma 2.4 und Definition 2.7, insbesondere mit der vorigen Bemerkung 2.8, implizieren folgende Äquivalenz:

Folgerung 2.9. Trivialität

Ein G -Hauptfaserbündel (P, π, B) ist genau dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt besitzt.

2.1 Konstruktionen

Lemma 2.10. Rückzug

Sei (P, π, B) ein G -Hauptfaserbündel und sei $f: \tilde{B} \rightarrow B$ eine glatte Abbildung. Das durch den Rückzug (vgl. Definition 1.9) konstruierte Faserbündel $(f^*P, \tilde{\pi}, \tilde{B})$ wird durch $f^*P := \{(\tilde{b}, p) \in \tilde{B} \times P \mid f(\tilde{b}) = \pi(p)\}$ und die Rechtswirkung $(\tilde{b}, p) \cdot g := (\tilde{b}, p \cdot g)$ ein G -Hauptfaserbündel. [1]

Im Folgenden soll eine Möglichkeit aufgezeigt werden, die typische Faser und damit die Lie-Gruppe eines Hauptfaserbündels zu “ersetzen”. Sei dazu ein G -Hauptfaserbündel $(P, \pi, B; G)$ sowie eine Mannigfaltigkeit F und eine Transformationsgruppe $[F, G]$ gegeben.

Dann wirkt G durch

$$(p, f) \cdot g := (p \cdot g, g^{-1} \cdot f)$$

von rechts auf $P \times F$. Im Folgenden bezeichnet $P \times_G F := P \times F / G$ den Faktorraum und $[p, f]$ die Äquivalenzklasse von (p, f) . Damit wird folgende Abbildung definiert:

$$\pi_{\times_G}: P \times_G F \rightarrow B, [p, f] \mapsto \pi(p)$$

Lemma und Definition 2.11. Assoziiertes Faserbündel

Das Tupel $(P \times_G F, \pi_{\times_G}, B; F)$ ist ein Faserbündel über B mit typischer Faser F . Wir nennen es das zu $(P, \pi, B; G)$ und der Transformationsgruppe $[F, G]$ **assoziierte Faserbündel**.

Ist statt einer Transformationsgruppe $[F, G]$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow F$ gegeben, so findet sich auch die Schreibweise $P \times_\varphi F$ als Alternative zu $P \times_G F$.

Spezialfälle assoziierter Bündel

Beispiel 2.12. Assoziiertes Vektorbündel

Seien (P, π, B) ein G -Hauptfaserbündel, V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ eine Darstellung von G . Dann ist $(P \times_\rho V, \pi_{\times_\rho}, B)$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel mit typischer Faser \mathbb{K}^n und wird das zu (P, π, B) und ρ **assoziierte Vektorbündel** genannt.

Beispiel 2.13. Erweiterung und Reduktion

Ist H eine Lie-Gruppe und $[H, G]$ eine Transformationsgruppe bzw. $\varphi: G \rightarrow H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, so ist $(P \times_G H, \pi_{\times_G}, B)$ bzw. $(P \times_\varphi H, \pi_{\times_\varphi}, B)$ ein H -Hauptfaserbündel.

- Gilt $H \supseteq G$ und φ ist eine Einbettung, so wird auch von einer (φ) -**Erweiterung** der Strukturgruppe gesprochen.
- Gilt umgekehrt $H \trianglelefteq G$, so wird auch von einer (φ) -**Reduktion** der Strukturgruppe gesprochen. Dies kann besonders hilfreich sein, wenn Eigenschaften der Strukturgruppe verschärft werden sollen. Beispielsweise gibt es Aussagen, die eine kompakte Strukturgruppe voraussetzen. Dies kann ggf. über eine solche Reduktion erreicht werden.

2.2 Rahmenbündel

Sei (V, π, B) ein \mathbb{K} -Vektorbündel von Rang n . Dann ist für alle $b \in B$ die Faser V_b ein n -dimensionaler Vektorraum. Setze nun

$$\mathfrak{B}_b := \{(b_1, \dots, b_n) \in V_b \mid (b_1, \dots, b_n) \text{ ist eine (geordnete) Basis von } V_b\}.$$

Dann wirkt $GL(n, \mathbb{K})$ durch

$$(b_1, \dots, b_n) \cdot A := \left(\sum_{i=1}^n A_{i1} b_i, \dots, \sum_{i=1}^n A_{in} b_i \right)$$

frei und transitiv von rechts auf \mathfrak{B}_b . Damit wird $(\mathfrak{B}, \tilde{\pi}, B)$ mit $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_V := \bigcup_{b \in B} \mathfrak{B}_b$ und $\tilde{\pi}: \mathfrak{B} \rightarrow B$, sodass $\tilde{\pi}|_{\mathfrak{B}_b} \equiv b$ gilt, zu einem $GL(n, \mathbb{K})$ -Hauptfaserbündel.

Definition 2.14. Rahmenbündel

Sei B eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $V := TB \rightarrow B$ das Tangentialbündel. Dann heißt das durch obige Konstruktion gewonnene $GL(n, \mathbb{K})$ -Hauptfaserbündel $(\mathfrak{B}_V, \tilde{\pi}, B)$ **Rahmenbündel** von B .

Ist (B, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sind in der Konstruktion die \mathfrak{B}_b zusätzlich orthonormal gewählt, so heißt das entstehende $O(n)$ -Hauptfaserbündel **orthonormales Rahmenbündel**.

Natürlicherweise ergeben sich folgende G -Hauptfaserbündel als Bündel (geordneter) Basen [1]:

| \mathbb{K} | Vektorbündel | (geordnete) Basis | G |
|--------------------------|------------------------|-------------------------|-----------------------|
| \mathbb{R}, \mathbb{C} | beliebig | alle | $GL(n, \mathbb{K})$ |
| \mathbb{R} | Riemannsch | orthonormal | $O(n)$ |
| \mathbb{C} | Hermitisch | orthonormal | $U(n)$ |
| \mathbb{R} | orientiert | pos. orientiert | $GL^+(n, \mathbb{R})$ |
| \mathbb{R} | Riemannsch, orientiert | orthonormal, orientiert | $SO(n)$ |

2.3 Beispiele

Im Folgenden werden noch einige weitere Beispiele für Hauptfaserbündel gegeben:

Beispiel 2.15. Triviales Hauptfaserbündel

Für alle Differenzierbaren Mannigfaltigkeiten B und Lie-Gruppen G ist $(B \times G, \pi_B, B; G)$ das triviale G -Hauptfaserbündel.

Beispiel 2.16. Homogenes Bündel

Sei G eine Lie-Gruppe, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, ${}^G/H$ der zugehörige homogene Raum und $\pi: G \rightarrow {}^G/H$ die Projektion auf den Faktorraum. Dann ist $(G, \pi, {}^G/H; H)$ ein H -Hauptfaserbündel, genannt das homogene Bündel. Den Beweis führt Baum [2].

Beispiel 2.17. Stiefel- und Grassmann-Mannigfaltigkeit

Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ ^(e) bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{K}^n}$ das Standard-Skalarprodukt.

Unter der Stiefelmannigfaltigkeit $V_k(\mathbb{K}^n)$ versteht man die Menge aller k -Tupel von orthonormalen Vektoren im \mathbb{K}^n

$$V_k(\mathbb{K}^n) := \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_i \in \mathbb{K}^n, \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{K}^n} = \delta_{ij}^{(f)}\}$$

versehen mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur.

Unter der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_k(\mathbb{K}^n)$ versteht man die Menge aller k -dimensionalen Untervektorräume des \mathbb{K}^n versehen mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur.

Durch

$$\pi: V_k(\mathbb{K}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{K}^n), (v_1, \dots, v_k) \mapsto \text{span}(v_1, \dots, v_k)$$

wird $(V_k(\mathbb{K}^n), \pi, G_k(\mathbb{K}^n))$ zu einem \mathfrak{G} -Hauptfaserbündel. Die typische Faser \mathfrak{G} ist dabei abhängig vom Körper \mathbb{K} :

| \mathbb{K} | \mathfrak{G} |
|--------------|----------------|
| \mathbb{R} | $SO(n)$ |
| \mathbb{C} | $U(n)$ |
| \mathbb{H} | $Sp(n)$ |

Nowakowski und Trautman [3] haben hierzu einen ausführlichen Artikel veröffentlicht.

Literatur

- [1] Christian Bär. *Gauge Theory*. Techn. Ber. Potsdam University, 2011.
- [2] Helga Baum. *Eichfeldtheorie*. Springer, 2009.
- [3] Jerzy Nowakowski und Andrzej Trautman. “Natural connections on Stiefel bundles are sourceless gauge fields”. In: *Journal of Mathematical Physics* 19.5 (1978), S. 1100–1103.

^(e) \mathbb{H} bezeichnet den Quaternionenkörper.

^(f) $\delta_{ij}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\delta_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$ bezeichnet das Kronecker-Delta.