Hauptfaserbündel und Vektorbündel

Adrian Pegler

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Arbeitsgruppe Geometrie
24098 Kiel

1. August 2018

Zusammenfassung. This is my abstract.

1 Faserbündel

Definition 1.1. ***Faserbündel***
Seien E, B, F Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\pi\colon E \to B$ eine glatte surjektive Funktion.
Falls es um jeden Punkt $x \in B$ eine Umgebung U sowie einen Diffeomorphismus $\Phi_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$ gibt, sodass

$$\pi_U \circ \Phi_U = \pi \tag{1}$$

gilt, nennen wir (E, π, B) ***Faserbündel*** *mit* ***typischer Faser*** *F. Nach Gleichung 1 kommutiert also folgendes Schema:*

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \subset E \arrow[rr, "\Phi_U"] \arrow[dr, "\pi"] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_U"] \\
& U \subset B &
\end{tikzcd}$$

B heißt ***Basisraum*** *und E* ***Totalraum*** *des Faserbündels. Die Abbildung Φ_U wird auch* ***lokale Trivialisierung*** *oder* ***Bündelkarte*** *genannt. Mit $E_x := \pi^{-1}(x)$ bezeichnen wir für alle $x \in B$ die* ***Faser*** *über x.*

Diese Definition ist in Abbildung 1 veranschaulicht. Neben der Beziehung zwischen dem Totalraum E und dem Basisraum B, sind in blau ein Punkt $x \in B$ und sein Urbild E_x bezüglich π sowie in magenta die Umgebung U um x und deren Urbild unter π dargestellt. Zudem sind die typische Faser F in rot und der Diffeomorphismus Φ_U sowie dessen Bild $U \times F$ in orange abgebildet.

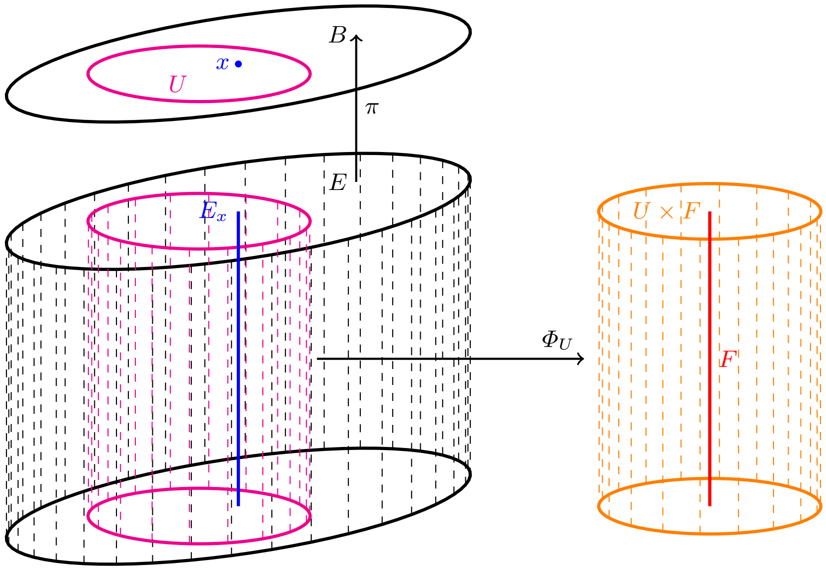

Abb. 1: Skizze eines Faserbündels.

Definition und Bemerkung 1.2.
Für alle $x \in B$ sei folgende Abbildung definiert:

$$\Phi_{U,x} \colon E_x \to F,\ \Phi_{U,x} := \pi_F \circ \Phi_U .$$

Dann ist für jede Faser E_x durch $\Phi_{U,x}$ ein Isomorphismus auf die typische Faser F gegeben, was der Grund für deren Benennung ist.

Definition 1.3. *Isomorphie*
Seien (E, π, B) und $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, B)$ Faserbündel über dem gleichen Basisraum B. Wir nennen die Faserbündel isomorph, falls es einen Diffeomorphismus $\Psi \colon E \to \tilde{E}$ gibt, sodass $\tilde{\pi} \circ \Psi = \pi$. Schematisch gilt also Folgendes:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \tilde{E} \arrow[dl, "\tilde{\pi}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Beispiel 1.4.
*Seien M und F Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\pi \colon M \times F \to M$ die Projektion auf die erste Komponente. Dann ist $(M \times F, \pi, M)$ ein Faserbündel. Jedes zu diesem Faserbündel isomorphe Faserbündel nennen wir **trivial**.*

Beispiel 1.5.
Sei M eine n-dimensionale Differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Die Folgenden Bündel sind Faserbündel mit Basisraum M:

1. *das Tangentialbündel:* $(TM, \pi, M); \mathbb{R}^n$,
2. *das Cotangentialbündel:* $(T^*M, \pi, M); \mathbb{R}^n$,
3. *das k-Formenbündel:* $(\Omega^k M, \pi, M); \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.

2 Vektorbündel

Definition 2.1. ***Hauptfaserbündel***
Hier folgt die Definition