Adrian Pineda Sanchez

A00834710 Tarea 2

Ejemplo

Sea $\mathrm{f(x)}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

1. Calcule el valor de la constante c para que $\mathrm{f(x)}$ sea la función de densidad de la variable aleatoria X.
2. Calcule $\mathrm{P}[0 < \mathrm{X} \leq 1]$.

① $\int_0^2 cx^2\,dx = 1$ ∴ $\int_0^2 cx^2\,dx = c\int_0^2 x^2\,dx = c\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = c\left[\frac{2^3-0^3}{3}\right] = c\left[\frac{8}{3}\right] =$

$c\left[\frac{8}{3}\right] = 1$ $\quad c = \frac{3}{8}$

②

$P[0 < X \leq 1]$

$c\int_0^1 x^2\,dx = \frac{3}{8}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\cancel{3}}{8}\left[\frac{1^3-0^3}{\cancel{3}}\right] = \frac{1}{8}$

Problema del flujo vehicular

En una cierta calle transitada se quiere medir el flujo vehicular. Una manera de hacerlo es medir el tiempo entre un automóvil y otro. Sea X es el tiempo transcurrido en segundos entre el tiempo en que un auto termina de pasar por un punto fijo y el instante en que el siguiente auto comienza a pasar por ese punto. La distribución del tiempo de avance tiene la forma

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x^4}, & si \quad x>1\\ 0 & si \quad x\leq 1\end{cases}$$

a) Determine el valor de k para la cual $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad (fdp).

b) ¿Cuál será el valor esperado entre autos? ¿su varianza?

c) ¿Cuál será la probabilidad de que se tarde un auto más de 2 segundos? ¿A lo más 2?¿x segundos o menos?

a)

cuando $x \to \infty$ $-1/3x^3$ tiende a 0

- $f(x) = K/x^4$, si $x>1$

$$K\int_1^\infty 1/x^4 \, dx = \int_1^\infty x^{-4}\, dx = \frac{x^{-3}}{-3}\Big/_1^\infty = -\frac{1}{3x^3}\Big/_1^\infty = -\frac{1}{3}[0-1] = 1/3$$

Dado que igualamos a 1.
para la función de densidad $Kf(x)=1$ $K(1/3)=1$
en la función $f(x)$

$K=3$

$\therefore$ Dado que no consideramos el 1 debido a que $f(x) = K/x^4$ cuando $x>1$
$K=3$

b)

- $$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_1^\infty x \frac{3}{x^4} = \int_1^\infty \frac{3}{x^3}dx = 3\int_1^\infty x^{-3} dx = 3\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]\Big/_1^\infty = -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]\Big/_1^\infty =$$

$$-\frac{3}{2}[0-1] = 3/2 \quad \therefore \quad E[x] = 3/2$$

$V[x] = E[x^2] - (E[x])^2$

Dado $E[x] = 3/2$

$E[x^2] = \int_1^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \cancel{x^2}\frac{3}{\cancel{x^4}}\,dx = 3\int_1^{\infty} x^{-2}\,dx = 3\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]\Big/_1^{\infty} = -3\left[\frac{1}{x}\right]\Big/_1^{\infty} =$

$-3[0-1] = 3 \quad \therefore \quad E[x^2] = 3$

$\therefore \ \mathrm{var}[x] = E[x^2] - (E[x])^2 = 3 - (3/2)^2 = 12/4 - 9/4 = 3/4$

$\mathrm{var}[x] = 3/4$

c) Probabilidad que se tarde un auto más de 2 segundos?

Por lo tanto estaríamos en un caso donde $x > 2$, y en caso de que la función este planteada de la misma manera podemos, la probabilidad puede ser encontrada a través del cálculo de la integral definida entre $2 \to \infty$

$$\int_2^{\infty} \frac{3}{x^4}\,dx = 3\int_2^{\infty} x^{-4}\,dx = 3\left[\frac{x^{-3}}{-3}\Big/_2^{\infty}\right] = -1\left[\frac{1}{x^3}\right]\Big/_2^{\infty} =$$

$$-1\left[0 - \frac{1}{2^3}\right] = -1\left[-1/8\right] = 1/8$$

A lo más 2 (Dado que $x \leq 1 = 0$, solo utilizamos $(1,2]$)

$$\int_1^{2} \frac{3}{x^4}\,dx = \frac{3}{-3}\left[\frac{1}{x^3}\right]\Big/_1^{2} = -1\left[\frac{1}{2^3} - \frac{1}{1^3}\right] = -1\left[\frac{1}{8} - 1\right] = -1\left[\frac{-7}{8}\right] = \frac{7}{8}$$

- X segundos o menos. (igualmente consideramos hasta $[1, x]$ y no $(-\infty, x)$)

$$\int_{-1}^{x} \frac{3}{x^4}\,dx = -1\left[\frac{1}{x^3}\right]_1^x = -\left[\frac{1}{x^3} - \frac{1}{1}\right] = \frac{-1}{x^3} + 1 = \underline{\underline{1 - 1/x^3}}$$