Grafos y árboles

Un grafo es, intuitivamente, un conjunto de puntos, llamados vértices, junto con una colección de líneas, llamadas aristas, cada una de las cuales une, o un par de puntos, o un punto consigo mismo.

Definición:

Un grafo es una terna G (V; A; φ) formada por tres componentes donde:

V: Un conjunto finito no vacío de vértices o nodos.
A: Un conjunto de aristas o ejes.
φ: una relación de A →V llamada de “incidencia”
Aristas incidentes en un vértice: Son aquellas que tienen a dicho vértice por extremo.

Si las aristas son ¨pares no ordenados¨ de vértices V, entonces diremos que el grafo G es ***no dirigido***. En ese caso, denotamos las aristas por a= {u, v}, indicando que la arista une los vértices u y v.

Si las aristas son ¨pares ordenados¨ de vértices V, entonces diremos que el grafo G es ***dirigido***. En ese caso, denotamos las aristas por a= (u, v), indicando que la arista a sale del vértice u y termina en el vértice v.

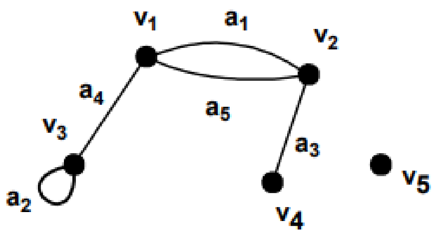
Trabajaremos con grafos no dirigidos, a los que referiremos sencillamente como grafos.

Ejemplo:

Sea el grafo G (V; A; φ) definido por: V= {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5}; A= {a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}; la relación de incidencia:

a_i	φ (a_i)
1	{v_1 ,v_2 }
2	{v_3 }
3	{v_4 , v_2 }
4	{v_1 ,v_3 }
5	{v_1 ,v_2 }

Representación del grafo G:



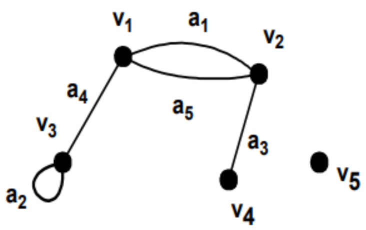
Algunas definiciones relativas a vértices y aristas

Sean v_1 y v_2 dos vértices y a_1 y a_2 aristas de un grafo G se dice que:

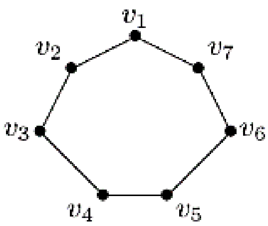
- v_1 y v_2 son vértices adyacentes sí y sólo sí existe una arista a_1 tal que $\varphi\ (a_1) = \{v_1, v_2\}$.
- v_5 es un vértice aislado sí y sólo sí no es adyacente a ningún otro.
- a_1 y a_5 son aristas paralelas si $a_1 \neq a_5$ y $\varphi\ (a_1) = \varphi\ (a_5)$
- a_1 y a_3 son aristas adyacentes si $a_1 \neq a_3$, no son paralelas y tienen un único vértice en común.
- a_2 es un lazo o bucle sí y sólo sí está comprendida en un mismo vértice.

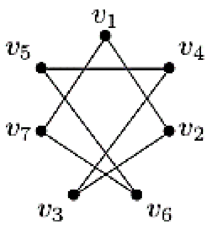
Un grafo es *simple* cuando no tiene ni aristas paralelas ni bucles.

Ejemplo:

Grafo G 	• v_3 y v_1 son adyacentes porque existe una arista a_1 tal que $\varphi\ (a_4) = \{v_1, v_3\}$ • v_5 es un vértice aislado porque no es adyacente a ningún otro. • a_1 y a_5 son aristas paralelas pues $a_1 \neq a_5$ y $\varphi\ (a_1) = \varphi\ (a_5)$ • a_3 y a_5 son aristas adyacentes porque $a_3 \neq a_5$, no son paralelas y tienen un único vértice en común. • a_2 es un lazo o bucle porque está comprendida en un mismo vértice, v_3 **G no es un grafo simple ya que tiene bucles y aristas paralelas.**

Observación: Es importante resaltar que en la definición de grafo no se especifica la ubicación de los vértices ni tampoco la longitud, la forma o la posición de las aristas. De manera que NO EXISTE una única representación para un grafo.



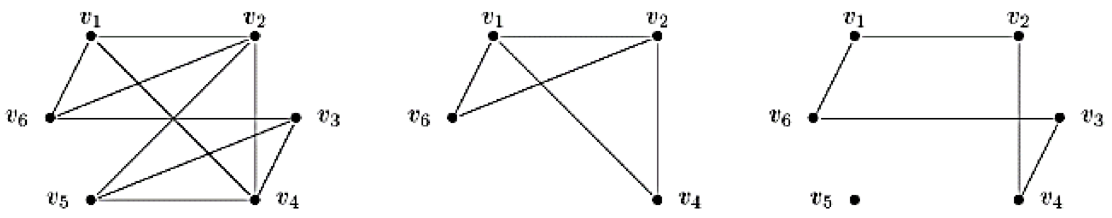


En la actualidad, la Teoría de Grafos se aplica a la resolución de problemas prácticos en numerosas disciplinas y campos: teoría de juegos, inteligencia artificial, optimización de recursos, clasificación e incluso diseño y resolución de laberintos.

Podría interesarte saber dónde se aplican los grafos en la actualidad. [VER]

Subgrafos

Sea G=(V,A, φ) un grafo. Si G´= (V´, A´, φ) es otro grafo donde V´$\subseteq$V y A´ $\subseteq$A, se dice que G´es un subgrafo de G. Si V´= V, G´ se llama subgrafo recubridor o grafico parcial de G.



G *subgrafo de G* *subgrafo recubridor de G*

Matrices de adyacencia e incidencia

Dado un grafo G (V, A, φ) con n vértices y m aristas:

- La *matriz de adyacencia* es una matriz cuadrada de orden nxn, M_a donde las filas y las columnas representan los n vértices del grafo. Y a cada elemento de la matriz se le asigna el valor 1, si son vértices adyacentes y 0, en caso contrario. La matriz de adyacencia es una matriz simétrica.
- La *matriz de incidencia* es una matriz de dimensión nxm, Mi dónde las filas representan los n vértices y las m columnas representan las m aristas del grafo. Y a cada elemento de la matriz se le asigna el valor 1, si la arista incide en el vértice y 0, en caso contrario.

$$M_a = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \qquad M_i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

Matriz de adyacencia *Matriz de incidencia*

Grado o valencia de un vértice

Se define grado o valencia de un vértice v_1 a la cantidad de aristas incidentes en dicho vértice.

$$g(v_1) = k, \text{ siendo } k \in N_0$$

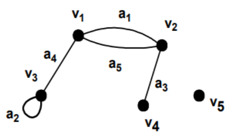
Vértice aislado: Un vértice se lo llama aislado si y sólo si su grado es 0.

Vértice pendiente: Si un vértice tiene grado igual a 1 se lo denomina vértice pendiente u hoja.

Si un vértice presenta únicamente un bucle el grado del vértice es 2.

En el grafo del ejemplo anterior se tiene:

Grafo G



g(v1) = 3; g(v2) =3; g(v3) =3; g(v4) = 1; g(v5) = 0

Caminos, ciclos y conexidad

Camino de un grafo: Es una sucesión de aristas adyacentes. Para denotarlo se utiliza una n-ada de vértices que tiene por extremos a dichas aristas.

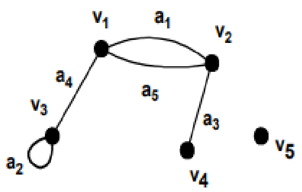
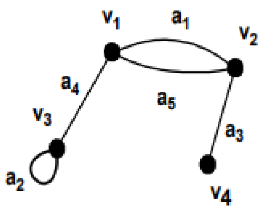
Ciclo o circuito de un grafo: Es un camino cerrado. El vértice inicial coincide con el final.

Longitud del camino: Es la cantidad de aristas que componen dicho camino.

Camino simple: Es aquel camino en el que todos los vértices son distintos.

Un grafo se lo llama conexo si y sólo si existe algún camino entre todo par de vértices. En caso contrario es no conexo.

Ejemplo:

	
G_1=Grafo no conexo	*G_2=Grafo conexo*

Si por caso, se toma el grafo G_1, un posible camino desde el vértice v_3 hasta el v_4 puede ser:

C1 = (v_3; v_1; v_2; v_4) cuya longitud es, Long(C_1) =3
Y un posible circuito de longitud 4 cuyo punto de partida es v_3: C_2 = (v_3; v_1; v_2; v_1; v_3).

Caminos y ciclos eulerianos

Se denomina ***camino*** euleriano de un grafo al camino que pasa por todas las aristas del grafo una sola vez.

La condición necesaria y suficiente para que en un grafo exista un camino euleriano es:

- El grafo debe ser conexo, y debe tener sólo dos vértices de grado impar.

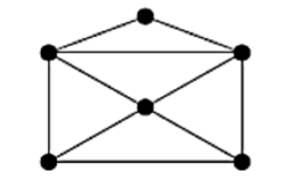
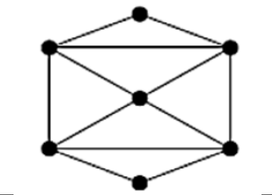
Se denomina ***ciclo euleriano*** al ciclo que pasa por todas las aristas una sola vez.

La condición necesaria y suficiente para que en un grafo exista un ciclo euleriano es:

- El grafo debe ser conexo, y todos los vértices deben tener grado par.
  (Punto inicial = Punto final)

Nota: Es grado par cuando de un nodo parten 2, 4, 6… aristas. Es impar cuando parten 1,3,5… aristas.

Ejemplo:

	
Grafo que tiene un camino euleriano.	*Grafo que tiene un ciclo euleriano.*

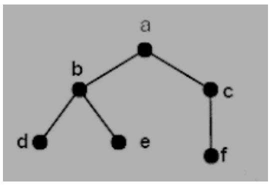
Árbol binario

Un árbol binario es un grafo conexo y sin ciclos formado por un conjunto finito de vértices llamados nodos y un conjunto finito de arcos dirigidos llamados ramas que unen pares de nodos tal que:

a) Si desde un nodo n_1 existe una rama hacia un nodo n_2 se dice que: n_2 es hijo de n_1
b) Cada nodo puede tener a lo sumo dos hijos.
c) El conjunto de nodos está dividido en tres subconjuntos separados:

- El primer subconjunto contiene un elemento único nodo llamado raíz del árbol.
- El segundo subconjunto es en sí mismo un árbol binario y se le conoce como subárbol izquierdo del árbol original.
- El tercer subconjunto es también un árbol binario y se le conoce como subárbol derecho del árbol original.
- Un subárbol izquierdo o derecho puede o no estar vacío.

Ejemplo:



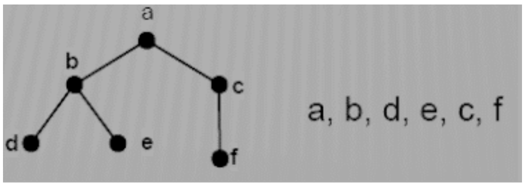
1) El nodo a es la raíz del árbol.
2) El nodo a tiene como subárbol izquierdo {b; d; e} y como subárbol derecho {c; f}
3) El nodo b tiene como subárbol izquierdo {d} y como subárbol derecho {e}
4) El nodo c que tiene un sólo subárbol no vacío y se lo supone izquierdo {f}
5) Los nodos d y e tienen como subárboles izquierdo y derecho al {}

Una operación común que se realiza sobre un árbol binario es aquella en que se recorre a dicho árbol en un orden específico.

a) Recorrido en preorden:

1) Visitar la raíz del árbol
2) Visitar en preorden el subárbol izquierdo
3) Visitar en preorden el subárbol derecho

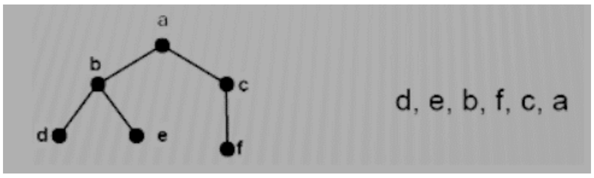
Ejemplo:



b) Recorrido en postorden:

1) Visitar en postorden el subárbol izquierdo
2) Visitar en postorden el subárbol derecho
3) Visitar la raíz del árbol

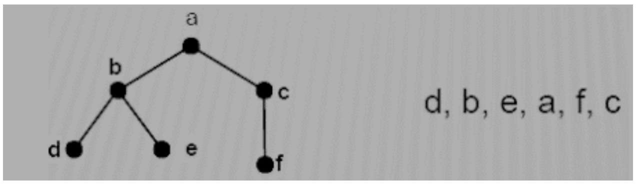
Ejemplo:



c) Recorrido en orden simétrico:

1) Visitar en orden simétrico el subárbol izquierdo
2) Visitar la raíz del árbol
3) Visitar en orden simétrico el subárbol derecho

Ejemplo:



Ayuda memoria:

	formas
Pre orden	Raíz-izquierda-derecha
orden	Izquierda- Raíz -derecha
Post orden	Izquierda-derecha-Raíz