Matrices

Definición de matriz:

Una matriz A de m x n es un ordenamiento rectangular de escalares dispuestos en m filas y n columnas. Para designar a cada uno de los m x n elementos de la matriz se utiliza un doble subíndice que indica el número de fila y número de columna que le corresponde en el arreglo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Llamamos *filas* de A a las n -uplas $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ con $i = 1, \ldots, m$.

Llamamos *columnas* de A a las m-uplas $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ con $j = 1, \ldots, n$.

Así, a_{34} es el elemento ubicado en la fila tres y la columna cuatro y en general a_{ij} es el elemento de la matriz A que está en la fila i y en la columna j.

Las matrices suelen designarse con letras mayúsculas: se anota $A \in R^{mxn}$ para indicar que es una matriz con m filas y n columnas cuyos elementos son números reales. Se indican con paréntesis o con corchetes:

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \; o \; \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, una matriz de dos filas y tres columnas se puede escribir así:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{2x3}$$

En este caso, diremos que el tamaño u orden de *A* es 2×3.

Matriz columna:

Podemos pensar los vectores como casos particulares de matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ } matriz \text{ } o \text{ } vector \text{ } columna, \quad C \in \mathbb{R}^{3x1}$$

Matriz fila:

O también,

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ } matriz \text{ } o \text{ } vector \text{ } fila, \quad F \in \mathbb{R}^{1x3}$$

Matriz nula:

La matriz nula es aquélla cuyos elementos son todos ceros. La simbolizamos con O.

Igualdad de matrices:

$$A, B \in \mathbb{R}^{mxn} \qquad A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$$

Operaciones con matrices:

Adición de matrices:

$Sean \ A, B \in \mathbb{R}^{mxn} \ entonces:$

$$A + B = C \ \in \mathbb{R}^{mxn} \ / \ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$$

Ejemplo:

$Sean:$

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -2 & 3 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$Entonces\ la\ suma\ es:$

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -2 & 3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

Producto de un escalar por una matriz:

$Sean\ A\in\mathbb{R}^{mxn},\ k\in\mathbb{R},\ entonces:$

$$k.A=B\ \in\mathbb{R}^{mxn}\ /\ b_{ij}=k.a_{ij}\ \ \forall i,j$$

Ejemplo:

$Sean\ A\in\mathbb{R}^{mxn},\ k\in\mathbb{R},\ entonces:$

$$k.A=B\ \in\mathbb{R}^{mxn}\ /\ b_{ij}=k.a_{ij}\ \ \forall i,j$$

$$Si\ A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -2 & 3 & 2\end{pmatrix},\ \ entonces\ 3A=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -6 & 9 & 6\end{pmatrix}$$

$Cuando\ k=-1,\ obtenemos\ la\ matriz\ opuesta\ de\ A:$

$$-A=(-1).A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

Sustracción de matrices

$Podemos\ así\ definir\ la\ diferencia\ (resta)\ entre\ dos\ matrices\ del\ mismo\ tamaño:$

$$A-B=A+(-B)$$

$O\ sea:$

$$A-B=C\ \in\mathbb{R}^{mxn}\ /\ c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$$

Ejemplo:

Sean las matrices :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces :

$$2A-B=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Hallar $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que:

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad [1]$$

$$3X + Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [2]$$

Resolución:

Es un sistema de ecuaciones matricial. Las incógnitas son matrices. Podríamos plantear el sistema escribiendo las matrices como

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \quad , \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

Pero quedarían 8 ecuaciones con 8 incógnitas. Para facilitar la resolución, podemos recurrir a las herramientas que utilizamos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Si sumamos miembro a miembro las ecuaciones queda:

$$5X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reemplazando en [1]

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Queda pendiente la verificación a cargo del alumno, reemplazando en [2].

Propiedades de la adición de matrices y del producto escalar por una matriz:

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Vimos que: $A + B \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $\alpha A \in \mathbb{R}^{mxn}$. Estas operaciones verifican las siguientes propiedades:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + O = O + A = A$
4. $A + (-A) = (-A) + A = O$
5. $\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)\, A = \alpha A + \beta A$
7. $\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\, A$
8. $1A = A$

Producto de matrices:

Definiremos primero el producto de una matriz fila por una matriz columna, y luego generalizaremos.

Si $A = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nx1}$, entonces :

$$AB = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

Sean $A \in \mathbb{R}^{\text{mxn}}$ y $B \in \mathbb{R}^{\text{nxp}}$, es posible calcular *AB* si y solo si se cumple que la cantidad de columnas de *A* es igual a la cantidad de filas de *B*.

$$A_{m\times n} . B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Deben ser iguales para que
pueda realizarse el producto de matrices

Entonces el producto es :

$$\boxed{AB = C \in \mathbb{R}^{mxp} \quad / \quad c_{ij} = fila\ i\ (A)\ .\ columna\ j(B)}$$

Ejemplo:

Sean,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbb{R}^{2x3} \qquad B \in \mathbb{R}^{3x3}$$

Es posible calcular A.B porque A tiene tres columnas y B tiene tres filas. El resultado del producto es una matriz de 2*x*3.

$$A_{m\times n} . B_{n\times p} =$$

$$C_{m\times p}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & -1 & 11 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1.1 + 2.1 + 3.2 & 1.1 + 2.(-1) + 3.0 & 1.2 + 2.0 + 3.3 \\ 4.1 + 1.1 + 0.2 & 4.1 + 1.(-1) + 0.0 & 4.2 + 1.0 + 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 11 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

No se puede calcular *B.A* porque el número de columnas de *B* no coincide con el número de filas de *A*.

Otro ejemplo:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PQ \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad , \quad PQ = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 7 & 7 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$QP \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad , \quad QP = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

O sea que **el producto de matrices no es conmutativo**.

Propiedades del producto:

En lo que sigue entendemos que las operaciones mencionadas pueden efectuarse.

1) $(AB)\,C = A\,(BC)$ asociatividad

2) $(A+B)\ C = AC + BC$ distributividad a derecha

$P\,(Q+R) = PQ + PR$ distributivida a izquierda

3) $(kA)\,B = k\,(AB) = A\,(kB)\ \ ,\ \ k \in \mathbb{R}$

4) $OA = O \quad y \quad AO = O$, siendo O la matriz nula

Ejercicio práctico:

Un comercio que vende productos de electrónica, paga una comisión a los vendedores y tiene un beneficio (ganancia) según cada producto. En una tabla se registra el precio de venta, el beneficio para el comercio, la comisión para el vendedor y el costo del producto. Además, se tiene información sobre las unidades vendidas en diferentes sucursales. A continuación, mostramos dos tablas que resumen esa información para el mes de agosto 2013:

Precio de venta, beneficio, costo, comisión por producto [AGOSTO 2013]

	LED 32′ BA455	LED BX567	Smartphone	Tablet 10′	Notebook
Costo	$ 3.200,00	$ 4.500,00	$ 2.500,00	$ 4.800,00	$ 5.600,00
Comisión	$ 200,00	$ 250,00	$ 30,00	$ 40,00	$ 120,00
Beneficio	$ 700,00	$ 900,00	$ 200,00	$ 340,00	$ 800,00
Precio de venta	$ 4.100,00	$ 5.650,00	$ 2.730,00	$ 5.180,00	$ 6.520,00

Unidades vendidas de cada producto por sucursal [AGOSTO 2013]

	Sucursal 1	Sucursal 2	Sucursal 3	Sucursal 4
LED 32' BA455	23	67	43	4
LED BX567	56	20	32	43
Smartphone	10	65	67	65
Tablet 10'	45	3	23	76
Notebook	67	65	43	80

Si A y B son las matrices correspondientes a estas tablas:

a) Calcular e interpretar el producto AB. ¿Cuál es la sucursal que obtuvo la máxima ganancia?

b) ¿Se puede calcular BA? ¿Tiene interpretación práctica BA?

Nota: Beneficio = (precio unitario x cantidad)-(costo + comisiones)

Matriz transpuesta:

La traspuesta de una matriz $A \in R^{m\times n}$, que indicamos como A^t, es la matriz de nxm que se obtiene a partir de A cambiando las filas por las columnas.

Ejemplo:

$$Si\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x3},\ entonces\ su\ transpuesta\ es: A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3x2}$$

Propiedades de la transposición:

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(kA)^t = kA^t, \quad k \in \mathbb{R}$

3) $(A^t)^t = A$

4) $(AB)^t = B^t A^t$

Ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos:

a) $(AB)^t$

b) $A^t B^t$

c) $B^t A^t$

Resolución:

1) Calculamos $A.B$ y luego transponemos:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 10 & 21 & 1 \end{pmatrix}$$

2x3 3x3 2x3

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 9 & 21 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2x3

2) Trasponemos y luego hacemos el producto:

$$A^t B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = no\ se\ puede\ realizar.$$

3x2 3x3

Como no coinciden el número de columnas de A^t con el número de filas de B^t, no se puede hacer el producto.

3) Transponemos y luego hacemos el producto:

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 9 & 21 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3x3 3x2 3x2

Del ítem 1) y 3) verificamos la propiedad enunciada: $(AB)^t = B^t A^t$

Matrices cuadradas:

Una matriz cuadrada es aquélla que tiene igual número de filas y de columnas.
Denominamos R^{nxn} al conjunto de matrices cuadradas de orden *n* (*n* filas y *n* columnas).
La **diagonal principal** de una matriz cuadrada está formada por los elementos aii.

Matrices identidad:

La matriz identidad, que simbolizamos con *I*, es una matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en todos los demás elementos.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedad:

La matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nxn}$ *verifica* $AI = IA$ *para toda matriz cuadrada* $A \in \mathbb{R}^{nxn}$. *La matriz identidad I es el elemento neutro para el producto en* $\mathbb{R}^{nxn}$.

La matriz identidad se comporta como el 1 para los números reales.

Lo mostramos para matrices 2×2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A.I = I.A = A$$

Matriz inversa:

En el conjunto de los números reales existe el inverso multiplicativo para todo número real distinto de cero. Dado un número real *a* distinto de cero, *b* es su inverso multiplicativo si y solo si *a* .*b* =1.
A continuación, definiremos el inverso multiplicativo para matrices cuadradas.

Se dice que $A \in R^{n\times n}$ es inversible si y sólo si existe una matriz $B \in R^{n\times n}$ tal que:
$AB=BA=I$

Ejemplo:

Analizar si las siguientes matrices son inversibles:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad P=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿$\exists\, B \in \mathbb{R}^{2x2} \,/\, AB=I$?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a+c=1 \\ 3b+d=0 \\ -3a-c=0 \\ -3b-d=1 \end{cases} \qquad \Rightarrow\ 1=0 \ \textit{Sistema incompatible}^*$$

Realizando los despejes y reemplazos correspondientes llegamos a una contradicción, la matriz A no es inversible.

*De la ecuación 3 despejamos c, $-3a - c = 0 \Rightarrow c = -3a$ y reemplazando en la ecuación 1, $3a - 3a \neq 1$

Observación: el único número real no inversible es el cero, pero en $R^{n\times n}$ vemos que existen matrices no nulas que no tienen inversa.
Con la matriz P:
Les proponemos verificar que *Q.P=I*

¿$\exists\, Q \in \mathbb{R}^{2x2} \;/\; PQ = I$?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a + c = 1 \\ 3b + d = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow\; a = 1\,,\;\; b = -1\,,\;\; c = -2\,,\;\; d = 3$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces *P* es inversible, y *Q* se denomina inversa de *P*.
La notación es:

$$Q = P^{-1}$$

Entonces: $P.P^{-1} = P^{-1}.\, P = I$

Más adelante analizaremos qué condición debe cumplir una matriz para ser inversible.

Observación: Sean $A, B \in R^{n\times n}$ entonces:

$$A.B = I \Leftrightarrow B.A = I \qquad [1]$$

O sea, para matrices cuadradas, si encontramos *B* tal que $A.B=I$, podemos afirmar que *B* es la inversa de *A*.

Propiedades de la inversión de matrices

$Sean\ A, B\ inversibles,\ entonces:$

1) $AB\ es\ inversible\ y\ su\ inversa\ es\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\boxed{Esto\ significa\ que\ la\ inversa\ de\ AB\ es\ B^{-1}A^{-1}}$

$Para\ demostrar\ esta\ propiedad,\ veamos\ que:\ (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$

$Como\ el\ producto\ de\ matrices\ es\ asociativo,\ resulta:$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$El\ lector\ puede\ comprobar\ que\ (B^{-1}A^{-1})(AB)$

Dejamos las demostraciones a cargo del lector.

2) $\boxed{(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}\ (k \neq 0)}$

3) $\boxed{(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t}$

Potencias de una matriz cuadrada

Sea A ∈ $R^{n\times n}$, es posible definir potencias de A como sigue:

$A^2 = A\ A$
$A^3 = A\ A\ A$
$$A^k = \underbrace{A.A.A.....A}_{\text{k veces}} \quad , k \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$Sea\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas especiales

Matriz simétrica

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica si y sólo si $A=A^t$
O sea: $a_{ij}=a_{ji}$

Las condiciones para que una matriz de orden tres sea simétrica son:

$$\begin{cases} a_{21} = a_{12} \\ a_{31} = a_{13} \\ a_{32} = a_{23} \end{cases}$$

Entonces la forma de una matriz simétrica de orden tres es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = A^t$$

Matrices antisimétricas

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es antisimétrica si y sólo *si* $A= -A^t$
O sea: $a_{ij}= -a_{ji}$

Veamos qué pasa con los elementos de la diagonal principal.

Si i=j debería ser $a_{ii} = -a_{ii}$, pero el único número que es el opuesto de sí mismo es el cero. Por lo tanto, la diagonal principal está formada por ceros.

Las condiciones para que una matriz de orden tres sea antisimétrica son:

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \\ a_{21} = -a_{12} \\ a_{31} = -a_{13} \\ a_{32} = -a_{23} \end{cases}$$

Entonces la forma de una matriz antisimétrica de orden tres es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -A^t$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Probar que $A + A^t$ es simétrica
2. Probar que $A - A^t$ es antisimétrica

Observemos que:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{simétrica} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{antisimétrica}$$

Entonces: **toda matriz cuadrada puede expresarse como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica**.

¿Cómo se expresa $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica?

Matrices triangulares

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz triangular superior cuando los elementos debajo de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \quad Si\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz triangular inferior cuando los elementos por encima de la diagonal principal son ceros.

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad Si\ i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Matrices diagonales

Una matriz *D* es diagonal si es triangular superior e inferior:

$$D \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ diagonal} \Leftrightarrow aij=0\ \forall\ i \neq j$$

La forma de una matriz diagonal de orden tres es:

$$D=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Veamos qué característica especial presentan las potencias de una matriz diagonal:

$$D^2 = D.D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = D.D.D = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}$$

En general:

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Matrices escalares

Una matriz escalar es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Las matrices escalares de orden 3 tienen esta forma:

$$E = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$E \in \mathbb{R}^{nxn} \ es\ escalar \iff E = k.I \quad , \qquad I \in \mathbb{R}$$

Matrices ortogonales

Una matriz cuadrada es ortogonal cuando su traspuesta coincide con su inversa:

$$A \in R^{n\times n} \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow A^t = A^{-1} \Leftrightarrow AA^t = I \quad \wedge \quad A^t A = I$$

Por ejemplo, las siguientes matrices son ortogonales:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Dejamos a cargo del lector verificar que las matrices cumplen la definición.

Observemos que **las columnas de** A **y de** B **son vectores ortogonales y de módulo** 1. Ésta es la característica que distingue a las matrices ortogonal

Determinante de una matriz

A cada matriz cuadrada puede asignársele un número real que llamaremos su **determinante** y designaremos como det (A) o |A|. El determinante de una matriz permite saber si una matriz es inversible.

Para matrices 2x2 y 3x3 el determinante se calcula como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Observación: El determinante no está definido para matrices rectangulares.

Ejemplo:

El determinante de $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1).\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A)=3.(1.2-0.1)+1.(2.2-0.3)-1.(2.1-1.3)$$
$$\det(A)=3.2+1.4-1.(-1)=6+4+1=\boxed{11}$$

Recordemos que una matriz A ∈ R^{nxn} es inversible si existe B ∈ R^{nxn} tal que AB=I
Si A es inversible, su inversa se indica como A^{-1} y se verifica que:

$$AA^{-1} = I$$

Aplicando determinantes, resulta:

$$\det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

Como el determinante es distributivo respecto del producto:

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1$$

Entonces:

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}, \quad (\det(A)\neq 0)$$

Para que esta fórmula sea válida, el determinante de A debe ser distinto de cero. Por lo tanto, el determinante permite decidir si una matriz tiene inversa:

$$\boxed{A \in R^{n\times n} \text{ es inversible } \Leftrightarrow \det(A)\neq 0}$$

Por ejemplo:

$M=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *es inversible porque el* $\det(M)\neq 0$

$A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *no es inversible porque el* $\det(A)=0$

Observación:

Las matrices inversibles también se llaman *regulares*.

Las matrices no inversibles también se denominan *singulares*.

Matriz inversa: Método de Gauss – Jordan

Dado una matriz cuadrada A y la matriz identidad I, se forma la matriz aumentada [A| I] colocando en el primer bloque la matriz a la cual se desea hallar su inversa, y en el segundo bloque la matriz identidad del mismo orden de A.

$$[A \mid I] = [A\ I]$$

Luego, mediante operaciones elementales de fila, se lleva la matriz A a la forma escalonada reducida, es decir, la forma de Gauss-Jordan. Al mismo tiempo, se aplica las mismas operaciones a la matriz identidad I para obtener la matriz inversa.

Estos serían los pasos:

1) Iniciar con la matriz aumentada: [A|I]=[AI]

2) Aplicar operaciones elementales de fila para llevar A a la forma escalonada reducida:

   - Eliminar los elementos por debajo y por encima de los pivotes (el primer elemento no nulo en cada fila).
   - Hacer que los pivotes sean 1 mediante operaciones elementales.

- Al finalizar esta etapa, A debería estar en forma escalonada reducida y I se habrá transformado en la inversa de A.

3) Aplicar operaciones elementales adicionales para hacer que los elementos por encima de los pivotes sean cero.
   - Esto asegura que A esté en la forma de Gauss-Jordan.

Al terminar, la matriz a la izquierda debería ser la identidad y la matriz a la derecha debería ser la inversa de A.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *y det(A) = 6 – 4 = 2,* $\quad \textit{como } 2 \neq 0 \Rightarrow A \textit{ tiene inversa}$.

1. Matriz aumentada inicial:
   $$[A\,|\,I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Aplicar operaciones elementales:

   Restar el doble de la primera fila de la segunda fila para hacer 0 en el primer elemento de la segunda fila.
   $$F_2 \to F_2 - 2F_1 \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

   Restar la primera fila de la segunda fila para hacer 0 en el segundo elemento de la primera fila.
   $$F_1 \to F_1 - F_2 \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

   Multiplicar la primera fila por 1/2 para hacer 1 en el primer elemento de la primera fila.

   $$F_1 \to \frac{1}{2}F_1 \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Cuando ya no se pueda elegir un pivote o en el primer bloque se obtenga la matriz identidad, tendremos en el segundo bloque la matriz inversa de A.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

https://matrixcalc.org/es/

Calculadora de matrices