UNIVERSIDAD NACIONAL DE CANINDEYÚ

Creada por Ley de la Nación Nº 3.985/10

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

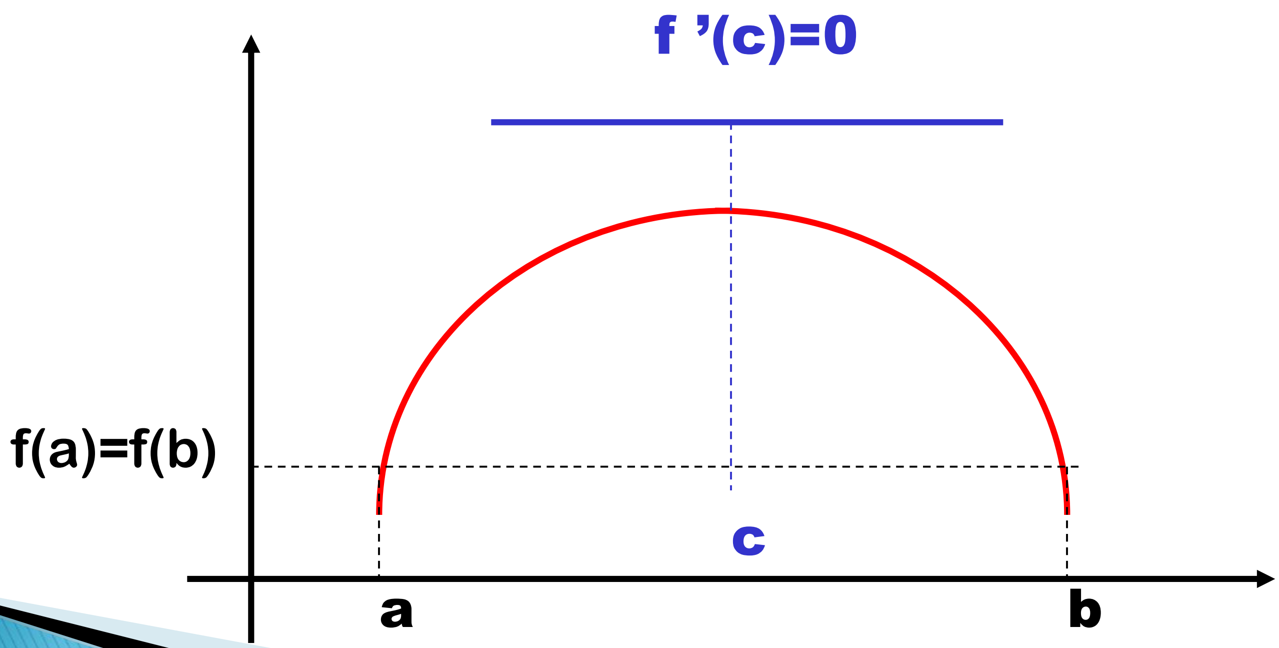
MATEMÁTICA III

Unidad IV: Aplicaciones de la Derivación

APLICACIONES DE LA DERIVADA

TEOREMA DE ROLLE

Sea f una función continua en el intervalo [a,b] y derivable en el intervalo abierto (a,b) tal que f(a)=f(b). Entonces existe al menos un punto c $\in$ (a,b) tal que f'(c)=0



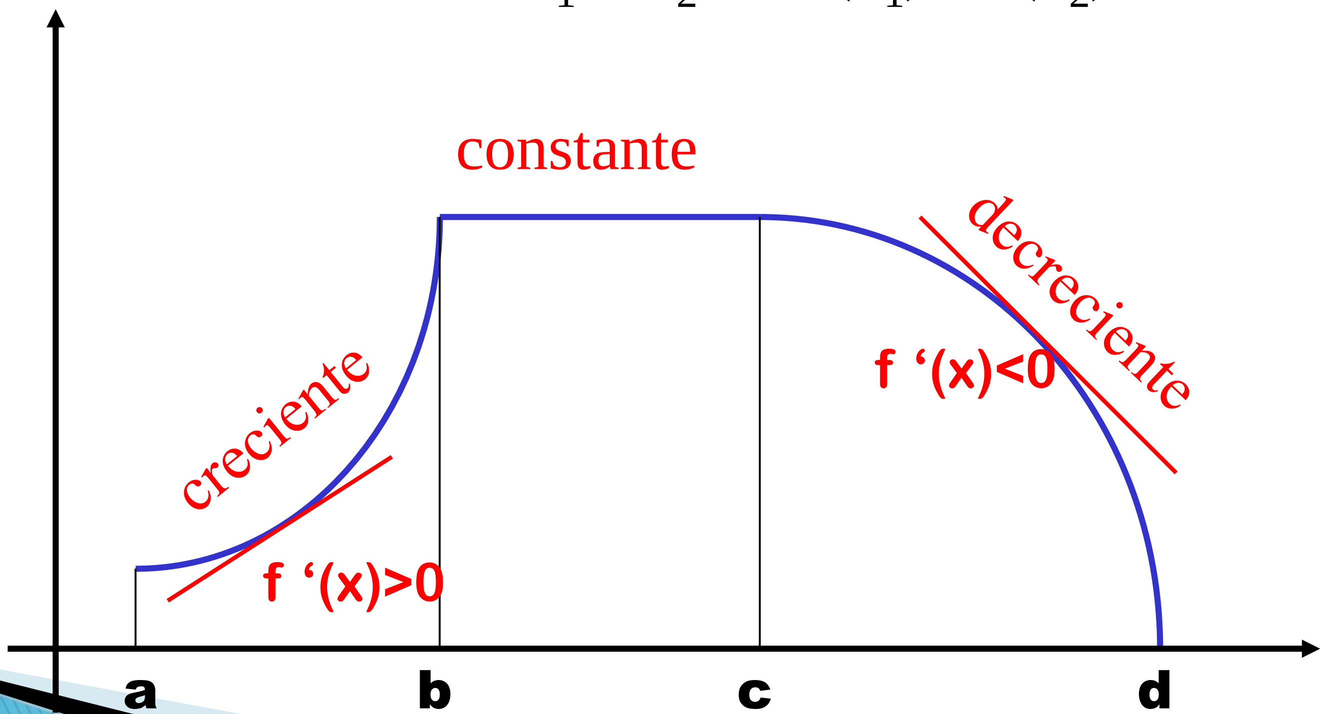
FUNCIÓN CRECIENTE Y DECRECIENTE

Una función es creciente en un intervalo dado si para dos números cualesquiera x_1 y x_2 se tiene que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

y es decreciente si

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Si $f'(x)>0$ $f(x)$ es *creciente* en (a,b)
Si $f'(x)<0$ $f(x)$ es *decreciente* en (c,d)
Si $f'(x)=0$ $f(x)$ es *constante* (b,c)

VALOR CRÍTICO

Valor crítico de una función es todo punto c de la misma para el cual $f'(c)=0$ o bien $f'(c)$ no existe

Ejemplo:
$f(x)= x^3- x$
$f'(x)= 3x^2 - 1$

$f'(c)=0$
$3x^2 - 1=0$
$x = \pm\sqrt{1/3}$

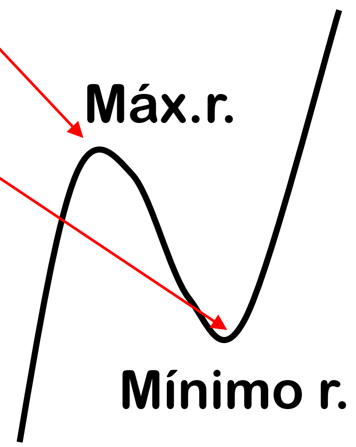
Valores Críticos
$x_1 = -\sqrt{1/3}$
$x_2 = \sqrt{1/3}$

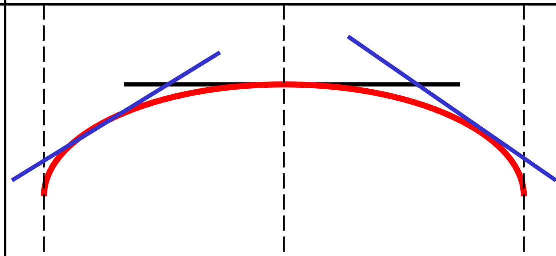
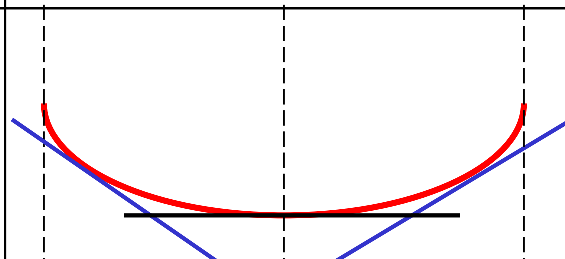
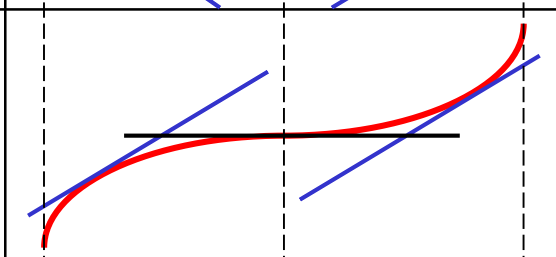
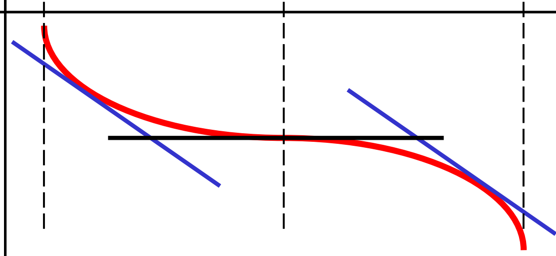
EXTREMOS RELATIVOS,
CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Un *máximo relativo* de una función es todo punto c, f(c) de (a,b), para el cual se cumple que $f(x) \leq f(c)$ para todo x de (a,b).

Un *mínimo relativo* de una función es todo punto c, f(c) de (a,b), para el cual se cumple que $f(x) \geq f(c)$ para todo x de (a,b).

Una función tiene un mínimo o un máximo relativo en un punto c cuando c es un valor crítico de f.



Signo de f ' en (a,c)	GRÁFICO a c b	Signo de f ' en (c,b)	c, f(c)
+		**-**	**MÁXIMO**
-		**+**	**MÍNIMO**
+		**+**	**No hay Max ni Min (crece)**
-		**-**	**No hay Max ni Min (decrece)**

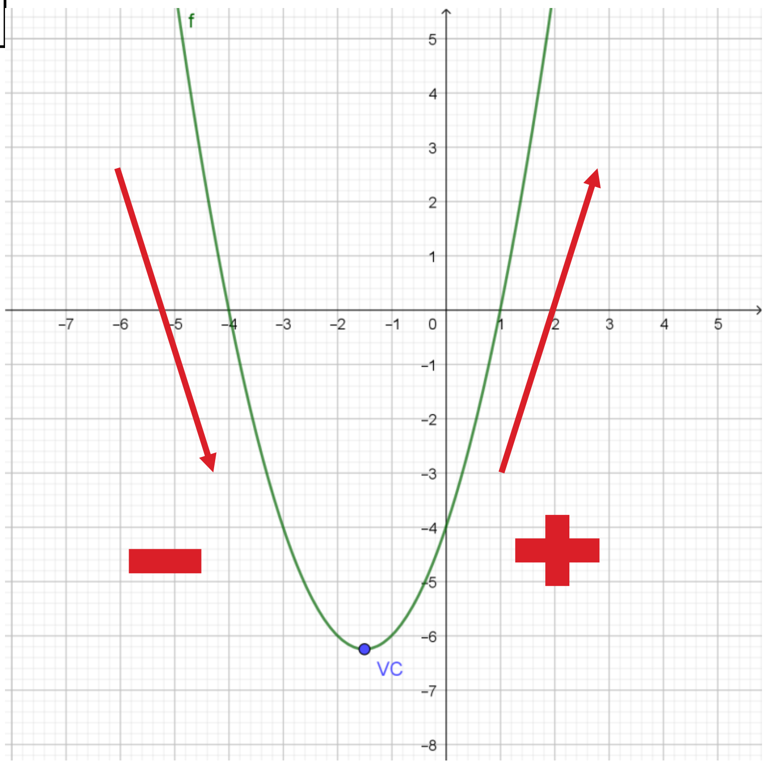
Ejemplo. Hallar máximos, mínimos y graficar la siguiente función
f(x) = x^2 + 3x – 4

Valor Crítico $f'(x) = 0$	Extremo relativo
$f\,'(x) = 2x + 3 = 0$ $2x + 3 = 0$ $x = -\frac{3}{2}$ *Valor crítico*	*Para* $x < -\frac{3}{2}$ f ’(-2) = 2(-2) + 3 < 0 (-) *Para* $x > -\frac{3}{2}$ f ’(0) = 2(0) + 3 > 0 (+) *El signo de la derivada antes y después del valor crítico varía de (-) a (+) por tanto la función tiene un mínimo en x = -3/2*

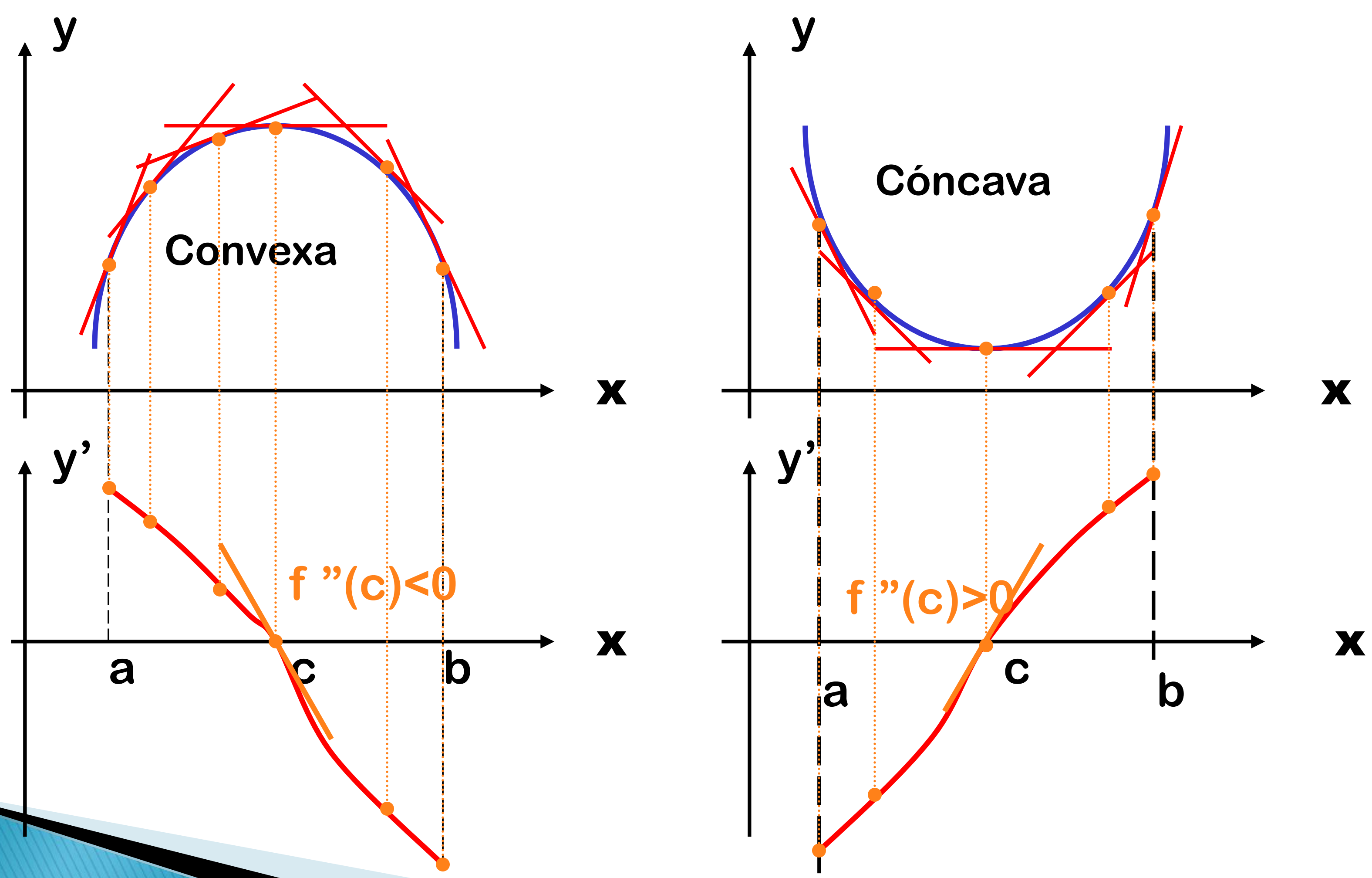
Ejemplo. Hallar máximos, mínimos y graficar la siguiente función
$f(x) = x^2 + 3x - 4$

Gráfico

x	$f(x) = x^2 + 3x - 4$	y
$-3/2$	$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) - 4$	$-25/4$



CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD, CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA



Sea f una función cuya segunda derivada existe en el intervalo (a,b). Entonces:

· Si f ''(x)>0 para todo x en (a,b), la gráfica de f es cóncava en (a,b).
· Si f ''(x)<0 para todo x en (a,b), la gráfica de f es convexa en (a,b).

Si además la función contiene un punto c tal que f'(c)=0, entonces:

· Si f ''(c)>0, f(c) es un mínimo relativo.
· Si f ''(c)<0, f(c) es un máximo relativo.

$f'(x_1)$	$f''(x_1) = 0$	Naturaleza del punto crítico
0	−	Punto del máximo
0	+	Punto del mínimo
0	0	Desconocido

PUNTO DE INFLEXIÓN

Si la gráfica de una función continua posee una tangente en un punto en el que su concavidad cambia de hacia arriba a hacia abajo, o viceversa, este punto se denomina punto de inflexión.

Si $(c,f(c))$ es un punto de inflexión, entonces o bien $f''(c)=0$ o $f''(c)$ no existe.

EJEMPLO. Determinar los extremos relativos por el criterio de la segunda derivada, punto de inflexión, intervalos de concavidad y graficar en base al análisis:

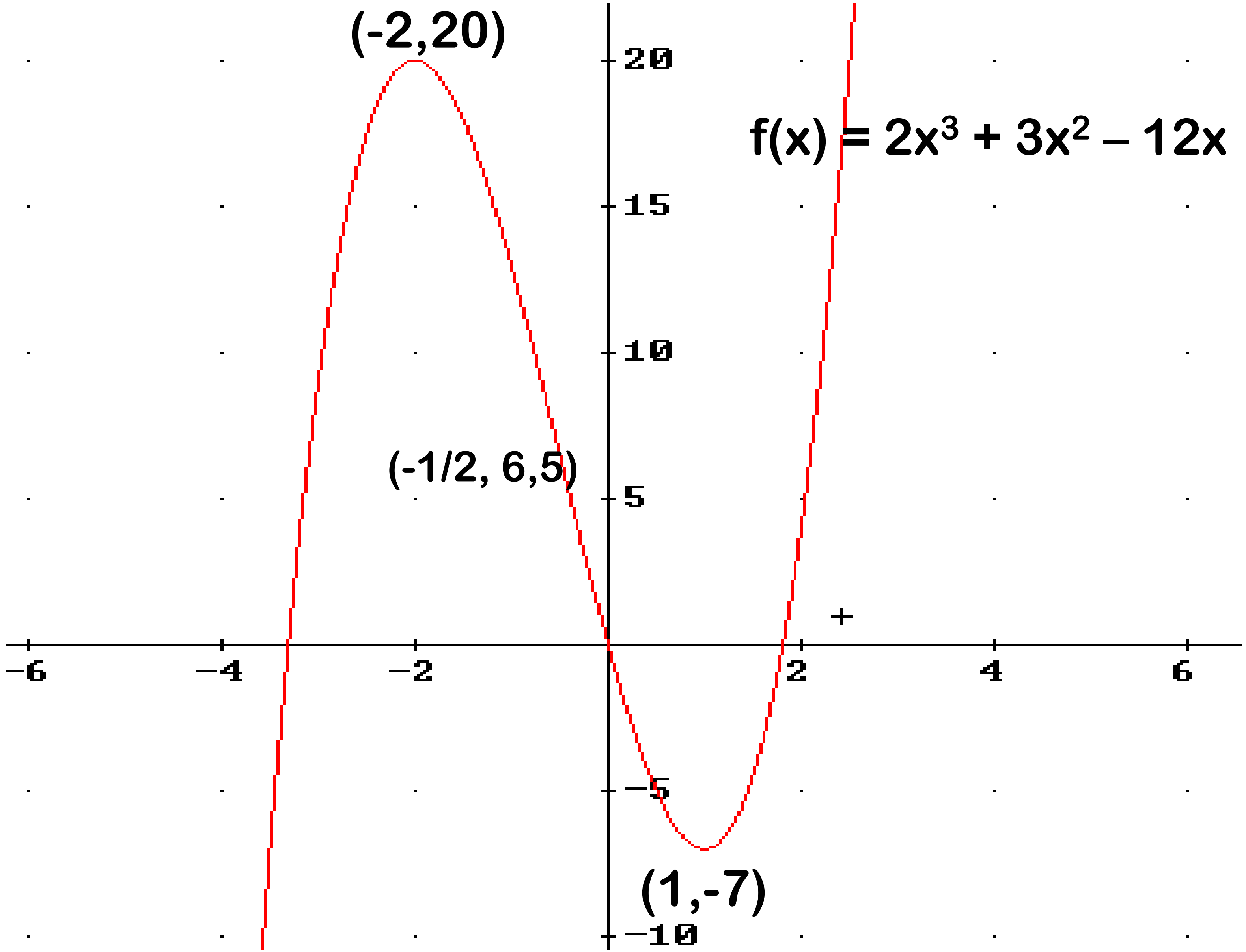
$$\mathbf{f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x}$$

Valores críticos	**Extremos relativos**
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \quad \div 6$ $x^2 + x - 2 = 0$ $(x-1)(x+2) = 0$ factorizando $\boldsymbol{x_1 = 1}\,;\ \boldsymbol{x_2 = -2}$ *Valores críticos*	*Para* $x = 1$ $f''(x) = 12x + 6$ $f''(1) = 12(1) + 6 = 18$ $f''(1) > 0$, *la función tiene un mínimo en x = 1* *Para* $x = 1$ $f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18$ $f''(-2) < 0$, la función tiene un máximo en x=-2

EJEMPLO. Determinar los extremos relativos por el criterio de la segunda derivada, punto de inflexión, intervalos de concavidad y graficar en base al análisis:

$$\mathbf{f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x}$$

Punto de inflexión $f''(x) = 0$	**Intervalos de concavidad**
$f''(x) = 12x + 6$ $12x + 6 = 0$ $x = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$ $x = -\frac{1}{2}$ *punto de inflexión*	*Para* $x < -\frac{1}{2}$ $f''(1) = 12(1) + 6 = 18$ $f''(1) > 0$, *la curva es cóncava en* $x < -\frac{1}{2}$ *Para* $x > -\frac{1}{2}$ $f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18$ $f''(-2) < 0$, *la curva es cóncava en* $x > -\frac{1}{2}$


(-2,20)
f(x) = 2x3 + 3x2 – 12x
(-1/2, 6,5)
(1,-7)
20
15
10
5
−5
−10
−6
−4
−2
2
4
6

Ejercicio

Esquema de Análisis de Funciones

1. Hallar el valor crítico
2. Definir el máximo y el mínimo
3. Punto de inflexión
4. Intérvalos de concavidad y convexidad
5. Graficar

Analiza las siguientes funciones y graficar.

1.- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

2.- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$