UNIVERSIDAD NACIONAL DE CANINDEYÚ

Creada por Ley de la Nación Nº 3.985/10

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICA III

Unidad III: DERIVADAS

La Derivada

Nuestro mundo es cambiante. Las variaciones de una cantidad inciden en que otras cantidades cambien. El cálculo diferencial trata del estudio del cambio de una cantidad cuando otra cantidad que está relacionada con la primera varía.

La derivada de una función nos dice, de alguna manera, cuánto cambia la función(variable dependiente) a medida que cambia la variable independiente. La derivada de una función nos dirá si una función crece o decrece rápidamente o lentamente.

Si analizamos el movimiento de un cuerpo sólido, por ejemplo el de una piedra lanzada hacia arriba, la distancia “s” que recorra dependerá del tiempo “t”, a su vez la velocidad media estará representada por la razón

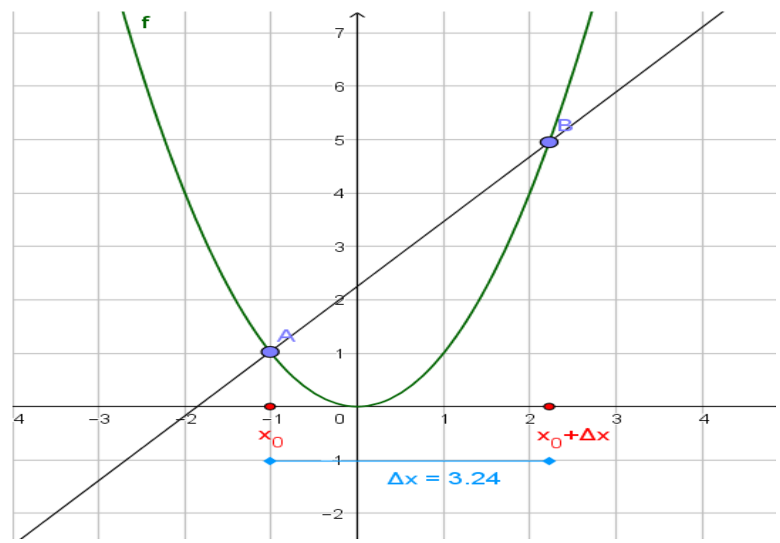
$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Para precisar la velocidad en cualquier punto sería necesario tomar un intervalo de tiempo (t) muy pequeño, es decir el limite al que tiende la velocidad cuando $\Delta t \rightarrow 0$

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

INCREMENTOS

Considerando una función $y = f(x)$, dos puntos cercanos sobre el eje de abscisas "x_0" y "x_0+h", siendo "h" un número real que corresponde al incremento de x **(Δx)**.

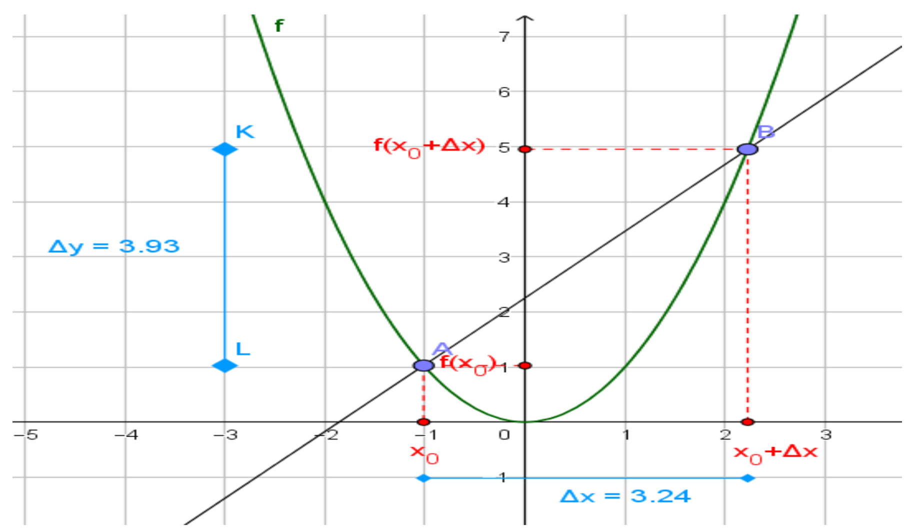


INCREMENTOS

A la diferencia entre las ordenadas correspondientes a los puntos de abscisa ***“x_0”*** y ***“x_0+h”***, se le llama **tasa de variación de la función en el intervalo**

[x_0 , x_0+h]:

$$\Delta y = [f(x_0+h) - f(x_0)]$$



Tasa de variación media

Al cociente entre la tasa de variación y la amplitud del intérvalo considerado en el eje de abscisas, h o Δx, se le llama **tasa de variación media** y se representa por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ o } \frac{\Delta y}{h}$$

En símbolos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Ejercicios

1. En un supermercado de Salto del Guairá, 5 kilos de papa cuestan Gs 28.000. ¿Cuál es la tasa de variación media y qué representa?

2. La familia González recibió la factura de la luz y quieren revisar, cuanto le toca pagar. De la observación de las facturas anteriores se sabe que para el estrato 2, hay que pagar un cargo fijo de $ 5000 y que cada kWh (kilovatio por hora) cuesta $ 400. Estos valores incluyen el IVA y otros impuestos. ¿Cuánto pagarán si el consumo es de 180 kWh? ¿Cuál es la tasa de variación media?

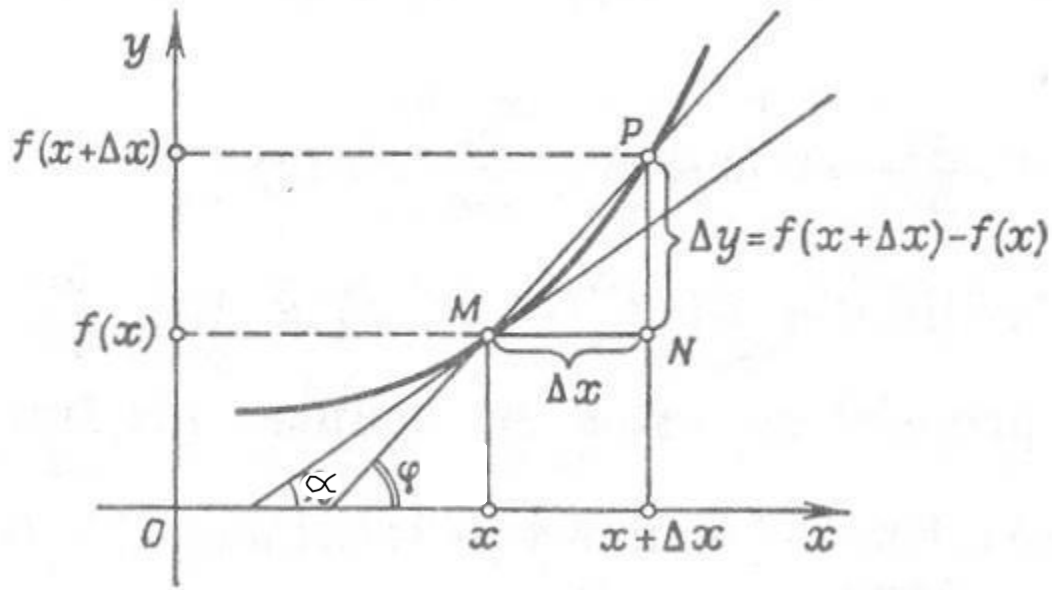
Ejercicios

1. Calcula la tasa de variación media de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 - x}$ en el intervalo [1,4]

2. Un auto escolar se mueve describiendo esta trayectoria $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 2x}$, al cabo de 1 hora presenta una velocidad de 3km/h. A partir de allí comienza acelerar alcanzando una velocidad de 33 km/h al cabo de 2 horas. Calcula la tasa de variación media.

LA DERIVADA

- Definición Geométrica:



$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

LA DERIVADA

- Por Definición:

Sea *y* = *f(x)* una función definida en cierto intervalo, incrementando la variable “x” en “Δx”, la función queda incrementada en “Δy”:

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f\,(x_0 + \Delta x\,)$$

$$\Delta y = f\,(x_0 + \Delta x\,) - f(x)$$

luego la razón del incremento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(x0\; + \;\Delta x\,) - f(x)}{\Delta x}$$

al límite de esta razón cuando Δx tiende a cero llamamos *derivada*

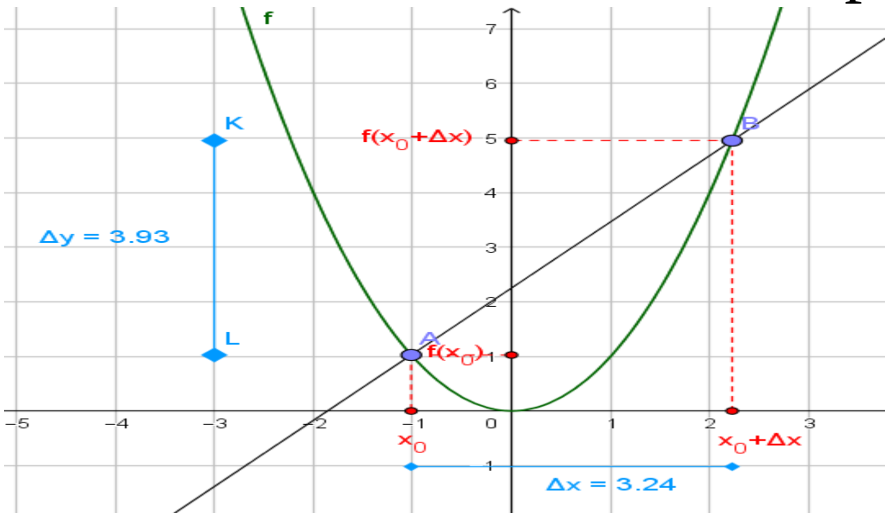
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x0\; + \;\Delta x\,) - f(x)}{\Delta x}$$

Ejercicios

1. Calcula la tasa de variación media en un punto dado, es decir, la derivada por definición **f(x)= 2x -9 cuando x=0**
2. Calcula la tasa de variación media en un punto dado, es decir, la derivada por definición **f(x)=** $\mathbf{2x^2 - 3x - 7}$ **cuando x=5**
3. Calcula la tasa de variación media de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 - x}$ cuando $\boldsymbol{x}$=1.
4. Calcula la tasa de variación media en un punto dado,
   es decir, la derivada por definición **f(x)= 4x -9**
   cuando x=2

Derivada

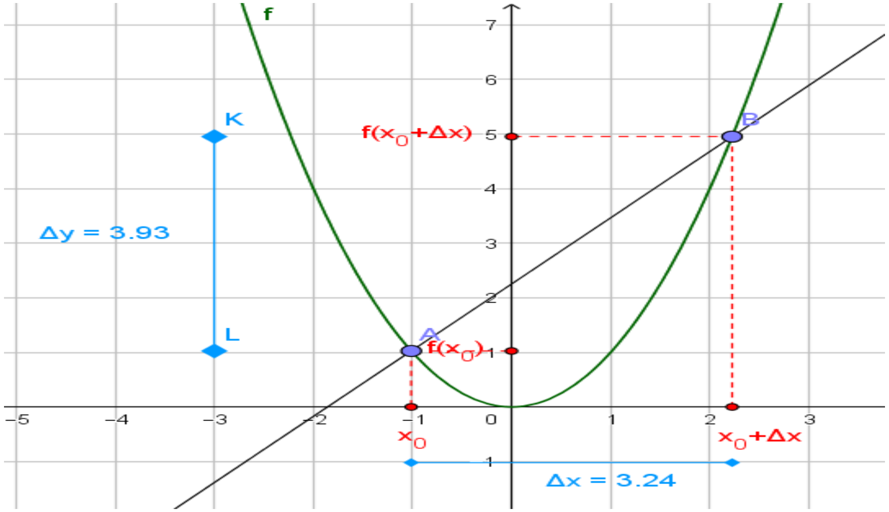
Derivadad de una función en un punto:



Es importante notar que la recta secante a la curva que pasa por los puntos A y B no representan la pendiente de la curva en el punto A ya que al variar la posición del punto B el valor de la Δx aumenta o disminuye y de ese modo la pendiente aumenta o disminuye

Derivada

Derivada de una función en un punto:



Cuando $\Delta x \to 0$ el punto B tiende al punto A y la posición de límite de la recta secante AB es la recta tangente r, que forma un ángulo a con el eje de abscisas

Derivada

Llamamos Derivada de un función $y = f(x)$ en un punto $P(x_0, y_0)$ al límite de la razón incrementada $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $x \to 0$ que en símbolos escribimos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Calcúla la función derivada en los ejercicios vistos anteriormente

1. Calcula la tasa de variación media de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 - x}$ cuando $\boldsymbol{x}$ = 4.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$P1(4{,}12) y \; P2(4{,}12)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{12 - 12}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)] - [x^2 - x]}{\Delta x} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x - \Delta x - x^2 + x}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 1)}{\Delta x} = 2x - 1$$

$$= 2(4) - 1 = 7$$

1. Calcula la tasa de variación media de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 - x}$ cuando $\boldsymbol{x}$ = 4.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$P1(4,12)y\ P2(4,12)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{12-12}{4-4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)]-[x^2-x]}{\Delta x} =$$

$$= \frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x-\Delta x-x^2+x}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x\Delta x+\Delta x^2-\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta x(2x+\Delta x-1)}{\Delta x} = 2x - 1$$

$$= 2(4) - 1 = 7$$

Ejercicios

- Calcula la derivada de las siguientes funciones por definición:

a) $f(x) = x^2$

a) $f(x) = x - 5$

a) $f(x) = 3x^2$

REGLAS DE DERIVACIÓN

1. Derivada de una constante

$$y = k \rightarrow y' = 0$$

2. Derivada de una potencia

$$y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$$

3. Derivada de un múltiplo constante

$$y = k \cdot f(x) \rightarrow y' = k \cdot f'(x)$$

4. Derivada de una adición o sustracción

$$y = u \pm v \rightarrow y' = u' \pm v'$$

5. Derivada de la multiplicación

$$y = u.v \rightarrow y' = u'v + uv'$$

6. Derivada de la división

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

EJERCICIO

Derive las siguientes funciones:

1. $y = 2x^2$
2. $y = 2x^{-2}$
3. $y = \dfrac{100}{x^5}$
4. $y = x^2 + 2x$
5. $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
6. $y = 3x^4 + x^3$
7. $y = \dfrac{3}{x^3} + x^{-4}$
8. $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$
9. $y = \dfrac{1}{2x} + 2x$

EJERCICIO

Derive las siguientes funciones:

10. $y = x(x^2 + 1)$

11. $y = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$

12. $y = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$

13. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

14. $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

15. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

Derivadas Trigonométricas

Funciones	Derivadas
$f(x) = \text{sen } x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\text{ sen } x$
$f(x) = \text{tg } x$	$f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \text{cotg } x$	$f'(x) = -\text{ cosec}^2 x$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \sec x \,.\, \text{tg}x$
$f(x) = \text{cosec } x$	$f'(x) = -\text{ cosec } x \,.\, \text{cotg } x$

EJERCICIO

Derive las siguientes funciones:

1. $y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$
2. $y = \operatorname{sen} x \cos x$
3. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
4. $y = x^2 \cos x$
5. $y = \operatorname{sen} x \tan x$

REGLA DE LA CADENA

Se refiere a la derivada de funciones compuestas.

Dada la función $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = \mathbf{f(g(x))}$, se debe derivar f y g, por lo tanto esta regla nos permite derivar la función compuesta.

Teorema. La Regla de la Cadena

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u

Y $u = g(x)$ es una función derivable de x

Entonces:

$y = f(g(x))$ es una función derivable de x

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejemplo:

Encontrar la derivada de $y = (x^2 + 1)^3$

$y = u^3$
$u = x^2 + 1$
$u' = 2x$

$$y = f(u)$$
$$y' = f'(u) . u'$$
$$y' = 3u^2 . (2x)$$
$$y' = 3(x^2 + 1)^2 (2x)$$
$$y' = 6x(x^2 + 1)^2$$

EJERCICIO

Derive las siguientes funciones:

1. $y = (3 - 2x)^5$

2. $y = \dfrac{1}{(x + 3)^5}$

3. $y = (x + 1)^3$

4. $y = (7 + x)^5$

5. $y = (4 + 2x^2)^7$

6. $y = (x^2 - x + 1)^{-7}$

7. $y = \dfrac{1}{(3x^2 + x - 3)^9}$

Funciones Trigonométricas y la Regla de la Cadena

$$y'[\mathit{sen}\, u] = (\cos u)u'$$

$$y'[\tan u] = (\sec^2 u)u'$$

$$y'[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$$

$$y'[\cos u] = -(\mathit{sen}\, u)u'$$

$$y'[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$$

$$y'[\csc u] = -(\csc u \tan u)u'$$

Ejemplos:

Encontrar la derivada de $y = \cos 3x^2$

$$y = \cos 3x^2$$

$$y = \cos u^{2}$$

$$y' = (\cos u)' u'$$

$$u = 3x^2$$

$$y' = (-sen\, u) 6x$$

$$u' = 6x$$

$$y' = (-sen\ 3x^2)(6x)$$

$$y' = -6x(sen\ 3x^2)$$

EJERCICIO

Derive las siguientes funciones:

1. $y = \operatorname{sen}(x^2 + x)$

2. $y = \cos^3 x$

3. $y = \cos(3x^2 - 2x)$

4. $y = \operatorname{sen}^4(3x^2)$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

Función Logaritmo Natural

$f(x) = \mathrm{Ln}\,(g(x))$

$$f'(x) = g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

Función Logaritmo Decimal

$f(x) = \mathrm{Log}_a(g(x))$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)Ln(a)}$$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

FUNCION EXPONENCIAL

1. $f(x) = e^{g(x)}$

   $f'(x) = g'(x)\, e^{g(x)}$

2. $f(x) = b^{g(x)}$

   $f'(x) = g'(x)\, b^{g(x)}\, Ln(b)$

EJERCICIO

Derive las siguientes funciones:

1. $y = \ln(\cos x)$
2. $y = \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$
3. $y = e^{4x+3}$
4. $y = e^{\text{sen } x}$

Ejercicios

- Halla la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$
2. $y = 2ax^3 - \frac{x^2}{5} + c$
3. $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$
4. $y = \frac{(x+1)^3}{x^{\frac{3}{2}}}$
5. $y = (2x-1)(x^2 - 6x + 3)$
6. $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
7. $y = \operatorname{cotg}^2 5x$
8. $y = \ln tg\, x$
9. $y = e^{4x+5}$
10. $y = 7^{x^2+2x}$