

Miernictwo elektroniczne
I semestr studiów stacjonarnych kierunek Elektronika i telekomunikacja

Dr hab. inż. Krzysztof Górecki, prof. nadzw. AM
C-350

Tel. 586901448

E-mail: gorecki@am.gdynia.pl
atol.am.gdynia.pl/~gorecki

konsultacje – wtorek 11-12

Wykład (30 h)

1. Przedmiot metrologii. Definicje podstawowych pojęć.
2. Metody rejestracji i opracowywania wyników pomiarów.
3. Wzorce jednostek wybranych wielkości elektrycznych.
4. Analiza błędu i niepewności pomiaru.
5. Mierniki magnetoelektryczne.
6. Pomiary napięć przemiennych.
7. Mostki prądu stałego i zmiennego.
8. Cyfrowe pomiary częstotliwości, okresu i przesunięcia fazowego.
9. Przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe.
10. Multimetry analogowe i cyfrowe.
11. Metody pomiaru podstawowych wielkości elektrycznych.
12. Oscyloskopy analogowe i cyfrowe.
13. Pomiary oscyloskopowe.

Literatura

- [1] Chwaleba A., Poniński M., Siedlecki A.: Metrologia elektryczna. WNT, Warszawa, 2010.
- [2] Rydzewski J.: Pomiary oscyloskopowe. WNT, Warszawa, 1999.
- [3] Kulka Z., Libura A., Nadachowski M.: Przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe. WKŁ, Warszawa, 1987.
- [4] Dusza J., Gortat G., Leśniewski A.: Podstawy miernictwa. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1998.
- [5] Jędrzejowski K. i inni: Laboratorium podstaw miernictwa. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1998.
- [6] Zielonko R. i inni: Laboratorium z podstaw miernictwa. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 1998.
- [7] Kołodziejski J., Spiralski L., Stolarski E.: Pomiary przyrządów półprzewodnikowych. WKiŁ, Warszawa 1990.
- [8] Górecki K., Stepowicz W.J.: Laboratorium Podstaw Miernictwa. Wydawnictwo Akademii Morskiej w Gdynia, Gdynia, 2005.
- [9] Arendarski J.: Niepewność pomiarów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2003.

Warunki zaliczenia:

Dwa kolokwia w ciągu semestru z zakresu wykładu:

1. 16 listopada 2011
2. 4 stycznia 2012

Należy zaliczyć obydwie kolokwia. Ocena końcowa stanowi średnią arytmetyczną ocen z obu kolokwiów.

Dla osób, które nie uzyskają zaliczenia w ten sposób – dodatkowe zaliczenie 11 stycznia 2012.

1. Przedmiot metrologii. Definicje pojęć podstawowych

We wszystkich dziedzinach życia spotykamy się z problemem określenia, co jest większe, a co mniejsze lub z określeniem ile czegoś jest, np. robiąc zakupy. W związku z tym konieczne jest określenie wielkości, która ma być mierzona, np. masa i wyznaczenie jej wartości w umownych jednostkach, np. w kilogramach.

W ramach przedmiotu „Podstawy miernictwa elektronicznego” będą omawiane zagadnienia dotyczące pomiaru wielkości elektrycznych. W szczególności przedmiotem miernictwa elektronicznego są metody i przyrządy pomiarowe oraz ocena wiarygodności uzyskanych wyników. Wielkościami mierzonymi są napięcia i prądy stałe oraz zmienne, częstotliwość, przesunięcie fazowe, rezystancja i impedancja oraz parametry elementów półprzewodnikowych i układów elektronicznych. Wartości wymienionych wielkości mogą zmieniać się w szerokim zakresie. Dlatego można wyróżnić szczegółowe metody pomiaru wartości wymienionych wielkości przeznaczone do zastosowania w zakresie tylko bardzo dużych lub tylko bardzo małych wartości rozważanych wielkości.

Dla lepszej przejrzystości dalszych rozważań przedstawiono poniżej definicje podstawowych pojęć używanych w metrologii:

1. **Wielkość** – właściwość ciał lub zjawisk, którą można mierzyć, np. napięcie, prąd
2. **Wartość** – liczba określająca ile jednostek miary zawiera dana wielkość fizyczna
3. **Jednostka miary** – umownie przyjęta i określona z dostatecznie dużą dokładnością wartość danej wielkości służąca do pomiaru wartości tej samej wielkości, np. volt, amper
4. **Symbol jednostki miary** – literowe oznaczenie jednostki miary danej wielkości, np. V, A

5. **Wzorzec** – fizyczne odwzorowanie jednostki miary danej wielkości
6. **Pomiar** - proces poznawczy, wykonywany eksperymentalnie przez porównanie wielkości fizycznej z jej wartością przyjętą umownie za jednostkę miary.
7. **Kontrola** – proces poznawczy, polegający na eksperymentalnym porównaniu wielkości kontrolowanej z wzorcową i określeniu do jakiego przedziału wartości należy wartość kontrolowanej wielkości

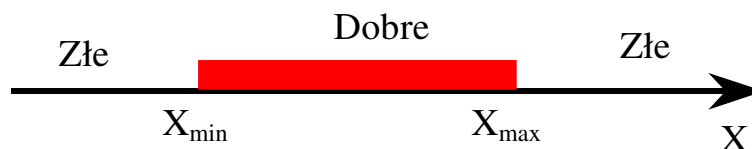
Wyróżnia się trzy rodzaje kontroli:

- a) **Kontrola alternatywna** (rys.1) – określenie czy wartość kontrolowanej wielkości jest większa (mniejsza) od zadanej wartości granicznej, np. kontrola współczynnika zniekształceń nieliniowych wzmacniacza mocy



Rys.1. Ilustracja kontroli alternatywnej.

- b) **Kontrola tolerancji** (rys.2) – określenie, czy wartość kontrolowanej wielkości mieści się w zadanym przedziale tolerancji, np. kontrola rezystancji rezystora wzorcowego



Rys.2. Ilustracja kontroli tolerancji.

c) **Kontrola strefowa** (rys.3) – określenie, do którego przedziału tolerancji należy wartość kontrolowanej wielkości, np. pomiar rezystancji wyprodukowanych rezystorów



Rys.3. Ilustracja kontroli strefowej.

8. **Testowanie** – kompleksowa kontrola wszystkich istotnych parametrów danego obiektu. Wynik jest binarny, tzn. pozytywny lub negatywny.
9. **Dokładność** – zgodność wyniku pomiaru z rzeczywistą wartością mierzonej wielkości
10. **Błąd pomiaru (niepewność pomiaru)** – określa przedział wartości, w którym z określonym prawdopodobieństwem znajduje się wartość mierzonej wielkości
11. **Rozdzielczość** – najmniejszy, mierzalny danym przyrządem pomiarowym przyrost wartości danej wielkości.
12. **Metoda pomiarowa** - sposób prowadzący do uzyskania wartości dowolnej wielkości drogą eksperymentalną

Wszystkie pomiary, które wykonywane są w elektronice można podzielić na trzy grupy:

- a) **Pomiary laboratoryjne,**
- b) **Pomiary kontrolno-fabryczne,**
- c) **Pomiary instalacyjno-eksploatacyjne.**

Pomiary laboratoryjne są prowadzone dokładnie i skrupulatnie przez wysoko wykwalifikowany personel, w specjalnie do tego przeznaczonych pomieszczeniach. Pierwszorzędne znaczenia ma w tym przypadku dokładność i powtarzalność uzyskanych wyników, natomiast wymiary i ciężar urządzeń pomiarowych mają znaczenie drugorzędne.

Pomiary kontrolno-fabryczne są wykonywane na różnych etapach wytwarzanie elementów i układów elektronicznych przez operatorów nie posiadających wysokich kwalifikacji. Przyrządy pomiarowe muszą być tak skonstruowane, aby pomiar mógł być wykonywany szybko, a wynikiem pomiaru jest informacja, czy wartość mierzonej wielkości mieści się w zadanym przedziale tolerancji.

Pomiary instalacyjno-eksploatacyjne są wykonywane w czasie uruchamiania określonego urządzenia i okresowo w czasie jego eksploatacji. Odpowiednie przyrządy pomiarowe (wskaźniki) są wbudowane w tym urządzeniu lub stosuje się urządzenia przenośne. Istotne jest, aby urządzenia te były lekkie, zasilane bateryjnie, ale nie muszą cechować się wysoką dokładnością.

Stosowane są trzy zasadnicze **kryteria podziału metod pomiarowych**:

1. Ze względu na sposób uzyskiwania wartości mierzonej wielkości:

- a) **Metody bezpośrednie**, gdy wartość mierzonej wielkości odczytuje się bezpośrednio z przyrządu pomiarowego,
- b) **Metody pośrednie**, gdy wartość określonej wielkości wyznacza się z zależności analitycznej na podstawie zmierzonych bezpośrednio wartości wielkości występujących w tej zależności.

2. Ze względu na zastosowane przyrządy pomiarowe:

- a) **Analogowe**,
- b) **Cyfrowe**.

3. Ze względu na sposób postępowania przy wykonywaniu pomiaru:

- a) **Metoda odchyłowa** – wartość wielkości mierzonej odczytuje się bezpośrednio ze skali przyrządu wyskalowanej w jednostkach wielkości mierzonej. W metodzie tej nie występuje wzorzec. Metoda ta jest mało dokładna, ale jej zaletą jest szybkość i prostota realizacji pomiaru.
- b) **Metoda różnicowa** – wielkość mierzona jest porównywana ze wzorcem, a przyrząd pomiarowy wskazuje różnicę między wartością mierzoną a wartością wzorcową. Stosowana przy pomiarach małych zmian na dużym poziomie. Dokładność pomiaru zależy od dokładności wykonania wzorca i dokładności porównania.
- c) **Metoda zerowa** – wartość mierzonej wielkości odczytywana jest z odpowiednio dobranego wzorca lub wyznaczana z zależności analitycznej zachodzącej między elementami układu pomiarowego, np. mostka. Odczyt wykonywany jest po zrównoważeniu układu pomiarowego, to znaczy, gdy prąd płynący przez kontrolną gałąź układu pomiarowego jest równy zero.
- d) **Metoda podstawieniowa** – na wejście przyrządu pomiarowego na przemian podawane są wartości mierzone i wartości wzorcowe. Po kolejnych przełączeniach modyfikowana jest wartość wzorcowa, tak aby uzyskać jednakowe wskazania układu pomiarowego dla wartości mierzonej i wzorcowej.

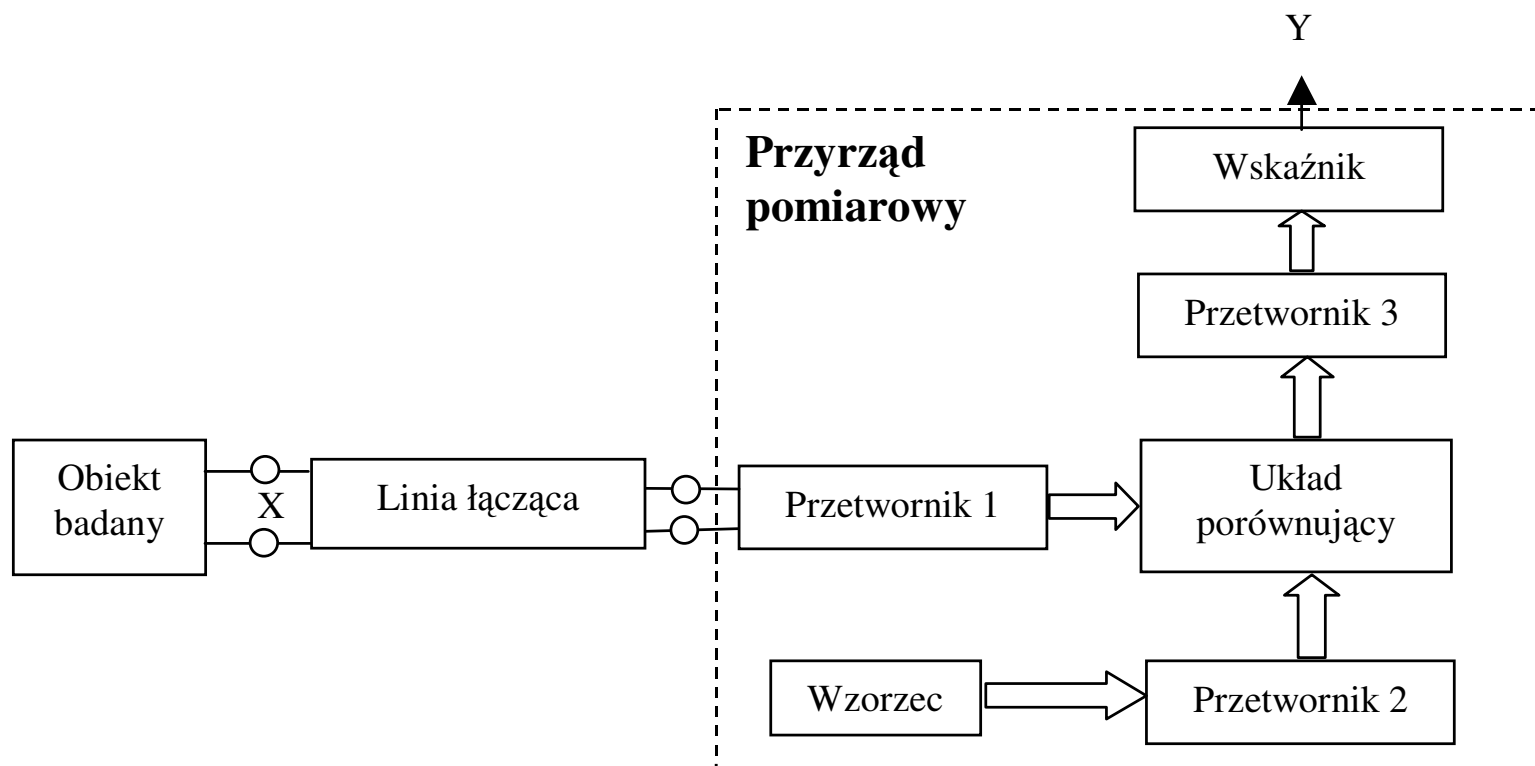
We wszystkich wymienionych metodach pomiarowych wykorzystywane są **przrządy pomiarowe**. Ogólny schemat przyrządu pomiarowego przedstawiono na rys.1. Na rysunku tym, X oznacza mierzoną wielkość wejściową, np. napięcie, natomiast Y – wielkość wyjściową, np. kąt wychylenia wskazówki przyrządu pomiarowego. Właściwości każdego przyrządu pomiarowego charakteryzowane są przez zbiór parametrów:

1. Wartość maksymalna X_{\max}
2. Czułość przyrządu pomiarowego S – stosunek przyrostu wielkości wyjściowej do wejściowej

$$S = \frac{dY}{dX} \Big|_{X=X_0} \quad (1)$$

W praktyce wyznacza się wartość S jako odwrotność wartości mierzonej wielkości odpowiadającą najmniejszej działce na skali przyrządu (wyświetlaczu).

3. Stała przyrządu pomiarowego C – odwrotność czułości
4. Pobór energii z układu pomiarowego (rezystancja wejściowa)
5. Błąd pomiaru



Rys.4. Ogólny schemat przyrządu pomiarowego.

2. Metody rejestracji i opracowania wyników pomiarów

Wyniki pomiarów mogą być rejestrowane i przedstawiane na trzy sposoby:

1. **metoda cyfrowa** – rejestrowanie konkretnych wyników liczbowych doświadczenia w postaci odpowiednio ułożonych tablic. Każda tablica powinna mieć swój numer i nazwę, każda kolumna tablicy powinna być oznaczona symbolem wielkości mierzonej wraz z jednostką. Wartości zmiennej niezależnej powinny zmieniać się monotonicznie, a wynik pomiaru powinien odzwierciedlać klasę przyrządu, to znaczy należy zapisać wszystkie cyfry widoczne na wyświetlaczu (także zera nieznaczące).
2. **Metoda analogowa** – przedstawienie wyników pomiarów w postaci wykresów, które ułatwiają interpretację pomiarów, łatwość ich analizy i wyznaczania ekstremów oraz punktów przegięcia i miejsc zerowych. Skala wykresu powinna być tak dobrana, aby zapewnić przejrzysty przebieg krzywej oraz umożliwiała odczytanie wartości z wykresu z dokładnością odpowiadającą dokładności pomiaru. Zwykle zmienna niezależna jest zaznaczana na osi odciętych, a zmienna zależna na osi rzędnych. Na osiach należy oznaczyć nazwy wielkości mierzonych oraz ich jednostki. Podziałka powinna być tak dobrana, aby 1 działka odpowiadała całkowitej wielokrotności liczb 1, 2, 4, 5 w jednostkach wielkości mierzonej. W niektórych przypadkach, np. gdy skala liniowa nie zapewnia przejrzystości lub uniemożliwia wykreślenie całej krzywej, stosuje się skalę nieliniową, najczęściej logarytmiczną lub pierwiastkową. Odpowiedni dobór skal na osiach umożliwia uzyskanie wykresu liniowego i najczęściej pozwala także na łatwe wyznaczenie wartości parametrów funkcji, np. jeżeli funkcja eksponencjalna przedstawiona zostanie w skali liniowo-

logarytmicznej, to otrzyma się wykres liniowy, którego nachylenie jest proporcjonalne do współczynnika znajdującego się w wykładniku eksponenty.

Wyniki pomiarów należy nanosić na wykresie w postaci krzyżyków, kółek, kwadracików itp. Na podstawie pomiarów należy wykreślić krzywą gładką, która nie musi przechodzić przez wszystkie punkty pomiarowe, ale należy ją tak poprowadzić, aby suma kwadratów odchyłek punktów pomiarowych od krzywej osiągnęła minimum. Punkty pomiarowe powinny być tak dobrane, aby dokładnie odzwierciedlały przebieg krzywej w zakresie gwałtownych zmian jej przebiegu oraz w okolicach ekstremów, miejsc zerowych i punktów przegięcia.

Poszczególne krzywe powinny być opisane w przejrzysty sposób za pomocą symboli. Na wykresie należy podać informacje, jakie parametry były stałe w czasie pomiaru.

3. Metoda analityczna – przedstawienie zależności analitycznej opisującej zależność funkcyjną między mierzonymi wielkościami. Metoda ta ma wiele zalet, np. pozwala na zwięzłość zapisu i łatwość przeprowadzania operacji matematycznych, np. różniczkowanie, całkowanie, sumowanie itd. Dodatkowo analityczna postać wyniku eksperymentu ułatwia porównanie go z rozważaniami teoretycznymi. Na podstawie kształtu wykresu, obrazującego wynik pomiarów dobierana jest postać zależności funkcyjnej, a następnie metodami optymalizacyjnymi dobierane są parametry tej funkcji w taki sposób, aby uzyskać jak najmniejszą odległość wyznaczonych punktów pomiarowych i krzywej aproksymującej te wyniki.

W celu wyznaczenia współczynników funkcji stosuje się różne metody optymalizacyjne. Najpopularniejszą z nich jest **metoda najmniejszych kwadratów**. W metodzie tej

parametry funkcji aproksymującej wyniki pomiarów są dobierane tak, aby uzyskać minimum sumy kwadratów odchyłek wartości zmierzonych $y_i(x_i)$ od odpowiadających im wartości aproksymowanych $f(x_i)$. Dla n pomiarów zależność ta ma następującą ogólną postać

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \min \quad (65)$$

W ogólności funkcja $f(x)$ opisana jest za pomocą m parametrów a , b , c , itd. W celu wyznaczenia wartości tych parametrów należy obliczyć pochodne cząstkowe zmiennej S względem wszystkich parametrów funkcji $f(x)$ i przyrównać otrzymane pochodne do zera. W ten sposób otrzyma się układ m równań z m niewiadomymi posiadający jednoznaczne rozwiązanie.

Przykładowo, dla aproksymacji pomiarów za pomocą funkcji liniowej o postaci $y = a \cdot x + b$, otrzyma się układ równań o postaci

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [(y_i - a \cdot x_i - b) \cdot x_i] = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i - b) = 0 \end{cases} \quad (66)$$

który ma następujące rozwiązanie

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (y_i \cdot x_i) - \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n} \end{array} \right. \quad (67)$$

3. Wzorce jednostek wybranych wielkości elektrycznych

Wzorzec to urządzenie pomiarowe do odtwarzania jednostki miary wielkości fizycznej lub odtwarzające, ze znaną dokładnością, określoną wartość danej wielkości.

W zależności od roli, jaką pełnią w procesach pomiarowych i dokładności stosuje się różne wzorce. Tworzą one piramidę hierarchiczną:

1. wzorce pierwotne – etalony; służą do przekazywania jednostki miary innym wzorcom:
 - a) wzorzec podstawowy (państwowy),
 - b) wzorzec-świadek,
 - c) wzorce odniesienia.
2. wzorce kontrolne,
3. wzorce robocze,
4. certyfikowane urządzenia pomiarowe.

Im dalej od wierzchołka tej piramidy, tym mniejsza dokładność wzorca i większa liczba wzorców należących do określonej grupy.

Wzorzec powinien posiadać następujące cechy:

- a) niezmienność w czasie,
- b) łatwa porównywalność,
- c) łatwość odtwarzania,
- d) łatwość stosowania,
- e) wysoka dokładność,

Parametrami wzorca są:

- a) nominalna miara wzorca,
- b) niedokładność miary wzorca,
- c) okres zachowania niedokładności miary wzorca,
- d) warunki, w których miara i dokładność są zachowane, np. zakres dopuszczalnych temperatur i wilgotności.

W powszechnie stosowanym międzynarodowym układzie jednostek SI występują jednostki podstawowe, uzupełniające i pochodne.

Jednostkami podstawowymi są:

- 1. metr,
- 2. kilogram,
- 3. sekunda,
- 4. amper,
- 5. kelwin,
- 6. kandela,
- 7. mol

Jednostki uzupełniające:

- 1. radian,
- 2. steradian.

Wzorce mogą mieć różną formę, np.

1. atomowy wzorzec czasu,
2. naturalny wzorzec temperatury,
3. sztuczne wzorce masy, światłości, prądu,
4. wzorce pośrednie, np. wzorzec prądu zbudowany przy wykorzystaniu wzorcowego źródła napięciowego i rezystora wzorcowego – tzw. wzorzec liczalny.

Przykłady wzorców:

1. wzorcowe źródło prądu – waga prądowa

Zawiera dwie cewki umieszczone koncentrycznie jedna w drugiej i połączone szeregowo. Przez te cewki płynie prąd o wzorcowej wartości I , który powoduje ruch cewki wewnętrznej. Cewka ta jest zamocowana do ramienia precyzyjnej wagi. Do drugiego ramienia zamontowana jest szalka, na której umieszczane są odważniki o masie m . W stanie równowagi wagi spełnione jest równanie

$$I = \sqrt{\frac{m \cdot g}{c}}$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie, a współczynnik kształtu cewek zależny od ich rozmiarów geometrycznych.

Waga prądowa umożliwia odtworzenie jednostki prądu z dokładnością do 6 ppm, czyli 6×10^{-6} .

2. Wzorcowe źródło napięcia stałego – ogniwo Westona

Jest to ogniwo elektrochemiczne elektrody wykonane są z rtęci oraz mieszaniny kadmu z rtęcią. Elektrolitem jest wodny roztwór siarczanu kadmu.

Wartość nominalna napięcia na tym źródle w temperaturze 20°C wynosi od 1,01854 V do 1,01873 V. Ze źródła tego można pobierać prąd o wartości nieprzekraczającej 1 μA .

3. Wzorce rezystancji – rezystory wzorcowe wykonane z drutu oporowego wykonanego z manganinu lub nikrothalu. Charakteryzują się one małą wartością temperaturowego współczynnika rezystywności, który nie przekracza wartości $2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Stosuje się 9 klas dokładności rezystorów wzorcowych oznaczanych symbolami: 0,0005, 0,001, 0,002, 0,005, 0,01, 0,02, 0,05, 0,1, 0,2. Symbole te oznaczają tolerancję wykonania tych rezystorów.

Stosuje się wzorce rezystancji o ustalonej wartości rezystancji i wzorce nastawne – najczęściej rezystory dekadowe.

4. Dokładność pomiaru. Definicje błędów, metody obliczania błędów

Każdy pomiar obarczony jest błędem, który wynika z niedokładności metod i przyrządów pomiarowych, wpływów otoczenia (zakłóceń) oraz błędów operatora.

Nie można dokładnie wyznaczyć wartości mierzonej wielkości, ale możliwe jest określenie dokładności pomiaru na podstawie znajomości źródeł i przyczyn błędów. Informacja o przyczynach i źródłach błędów pozwala także na minimalizację ich wpływu na wynik pomiaru oraz na opracowanie nowych, doskonalszych metod pomiarowych.

Wartości błędów mogą być przedstawione w postaci ich wartości bezwzględnej lub względnej.

Błąd bezwzględny ε jest zdefiniowany jako różnica między wartością zmierzoną X a wartością rzeczywistą X_{rz} wielkości mierzonej

$$\varepsilon = X - X_{rz} \quad (2)$$

Ponieważ przy pomiarze wielkości fizycznych nie wiadomo jaki jest znak błędu ε , więc zawsze podaje się, że błąd bezwzględny wynosi $\pm\varepsilon$. Jednak błąd bezwzględny nie jest dobrą miarą dokładności ponieważ nie daje informacji o tym, jaką część wartości mierzonej wielkości stanowi błąd. Przykładowo pomiar napięcia 1 kV wykonany z dokładnością do 10 mV jest w pełni wiarygodny, natomiast pomiar napięcia o wartości 1 mV z taką samą dokładnością bezwzględną jest praktycznie bezużyteczny. Dlatego często określa się dokładność pomiaru przez podanie wartości błędu względnego.

Definiuje się trzy rodzaje błędów względnych:

a) Rzeczywisty błąd względny

$$\delta_{rz} = \pm \frac{\varepsilon}{X_{rz}} \quad (3)$$

b) Nominalny błąd względny

$$\delta_{nom} = \pm \frac{\varepsilon}{X} \quad (4)$$

c) Zakresowy błąd względny

$$\delta_z = \pm \frac{\varepsilon}{X_{zakr}} \quad (5)$$

Często, szczególnie w miernikach starszego typu, podaje się informacje o klasie przyrządu zdefiniowanej jako

$$kl = \frac{|\varepsilon_{\max}|}{X_{zakr}} \cdot 100\% \quad (6)$$

gdzie ε_{\max} oznacza maksymalną wartość błędu bezwzględnego, natomiast X_{zakr} – maksymalną wartość mierzalną danym przyrządem pomiarowym.

Ze względu na czynniki powodujące błędy, dzieli się je na trzy grupy:

- a) **Błędy systematyczne**, które można ściśle określić, gdyż wpływają na każdy pomiar w ten sam sposób, np. dodają się do wartości mierzonej jako stała wartość lub jako sygnał okresowy, np. sinusoidalny. Przy czym zależą one od czasu, warunków pomiaru, użytych przyrządów pomiarowych itd. A zatem można tak dobrać warunki pomiaru, aby błędy systematyczne były pomijalnie małe.
- b) **Błędy przypadkowe**, spowodowane działaniem czynników trudno uchwytanych, zmieniają swą wartość chaotycznie i nie można opisać ich wpływu na wynik pomiaru zależnością analityczną. Przy pojedynczym pomiarze są one niemierzalne. Możliwa jest tylko analiza statystyczna tych błędów, gdy wykonano serię pomiarów. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu jest malejącą funkcją wartości bezwzględnej błędu.
- c) **Błędy grube**, które wynikają z pomyłki badacza, np. z nieprawidłowego odczytu zakresu pomiarowego.

Błędy systematyczne można podzielić na:

- a) **Błędy metody pomiarowej** – wynikają z niedoskonałości wzorów i założeń upraszczających, przyjętych przy opracowywaniu metody,
- b) **Błędy przyrządów pomiarowych** – wynikają z niedokładności konstrukcji przyrządów pomiarowych, niedokładności wykonania wzorca i innych trwałych wad.

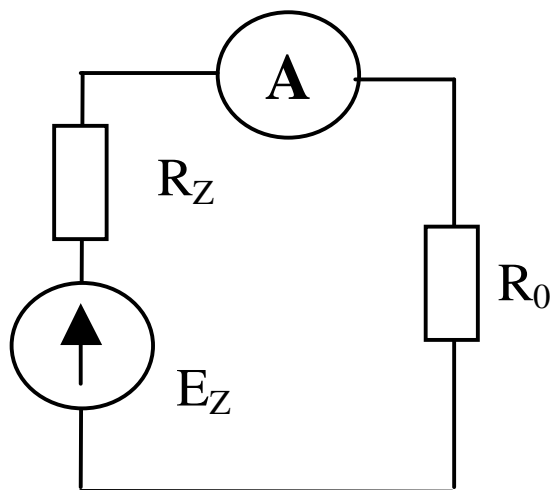
Pod względem charakteru przebiegu, błędy systematyczne mogą być stałe (nie zależą od wartości mierzonej, ani od warunków klimatycznych), rosnące lub malejące (np. na skutek zmian napięcia zasilającego), okresowo zmienne lub mogą się zmieniać według innego znanego przepisu.

Przykład 1.

Wyznaczyć błąd pomiaru prądu płynącego w obwodzie przedstawionym na rysunku, jeżeli wiadomo, że w pomiarach wykorzystano amperomierz o rezystancji wewnętrznej równej R_A oraz o klasie klA.

Jak widać błąd systematyczny pomiaru prądu w tym obwodzie zawiera dwa składniki:

- a) Błąd wynikający z dokładności zastosowanego przyrządu pomiarowego, o którego wartości mówi klasa,
- b) błąd wynikający z niezerowej wartości rezystancji wewnętrznej amperomierza.



Rys.5. Analizowany układ pomiarowy.

Składnik a) błędu bezwzględnego pomiaru wyznacza się na podstawie definicji klasy przyrządu z zależności

$$\varepsilon_{klA} = \pm \frac{klA \cdot I_{zakr}}{100} \quad (7)$$

gdzie I_{zakr} jest wartością zakresu prądowego amperomierza, na którym wykonywany jest pomiar.

Z kolei w celu określenia wartości błędu pomiaru wynikającego z niezerowej wartości rezystancji wewnętrznej amperomierza, należy określić różnicę między wartością prądu, która płynie w analizowanym obwodzie z amperomierzem i bez niego. Prąd I_1 płynący w obwodzie bez amperomierza dany jest zależnością

$$I_1 = \frac{E_Z}{R_Z + R_0} \quad (8)$$

natomiast prąd I_2 płynący w obwodzie z amperomierzem dany jest wzorem

$$I_2 = \frac{E_Z}{R_Z + R_0 + R_A} \quad (9)$$

Zatem błąd bezwzględny pomiaru wynikający z niezerowej wartości rezystancji wewnętrznej amperomierza jest różnicą prądów I_1 oraz I_2

$$\varepsilon_{R_A > 0} = E_Z \cdot \left(\frac{1}{R_Z + R_0} - \frac{1}{R_Z + R_0 + R_A} \right) \quad (10)$$

Jak widać błąd ten maleje do zera, gdy rezystancja wewnętrzna amperomierza dąży do zera. A zatem wypadkowy maksymalny błąd względny pomiaru prądu dany jest wzorem

$$\delta_{\max} = \pm \left(\left| \frac{kIA \cdot I_{zakr}}{100 \cdot I_2} \right| + \left| \frac{R_A}{R_Z + R_0} \right| \right) \quad (11)$$

Błędy przyrządów pomiarowych są minimalizowane przez dokładne skalowanie i zabezpieczenie ich przed szkodliwymi wpływami środowiska, np. wysoką temperaturą lub dużą wilgotnością. Przy prawidłowym doborze przyrządów pomiarowych, najistotniejszym składnikiem błędu systematycznego jest błąd metody. Wartość tego błędu można wyznaczyć, jeżeli znana jest analityczna zależność wielkości badanej od wielkości, które są mierzone za pomocą przyrządów pomiarowych. Ogólnie zależność ta opisana jest funkcją wielu zmiennych

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (12)$$

gdzie X_1, X_2, \dots, X_n są wielkościami, których wartości trzeba zmierzyć, aby wyznaczyć wartość wielkości Y .

Ponieważ każda wielkość X_i , gdzie $i \in \langle 1; n \rangle$, wyznaczona jest z błędem bezwzględnym dX_i , więc zależność (12) można przepisać w postaci

$$Y \pm dY = f(X_1 \pm dX_1, X_2 \pm dX_2, \dots, X_n \pm dX_n) \quad (13)$$

Aby wyznaczyć wartość błędu bezwzględnego dY należy rozłożyć prawą stronę zależności (13) w szereg Taylora i obciąć go po wyrazie liniowym. Wówczas otrzyma się zależność

$$dY = \pm \frac{\partial f}{\partial X_1} \cdot dX_1 \pm \frac{\partial f}{\partial X_2} \cdot dX_2 \pm \dots \pm \frac{\partial f}{\partial X_n} \cdot dX_n \quad (14)$$

gdzie dla uproszczenia zapisu przez f oznaczono $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Ponieważ błędy cząstkowe mają podwójny znak i z góry nie wiadomo, który z nich należy uwzględnić, więc w praktyce wyznacza się **maksymalny błąd bezwzględny** ϵ_{\max} z zależności

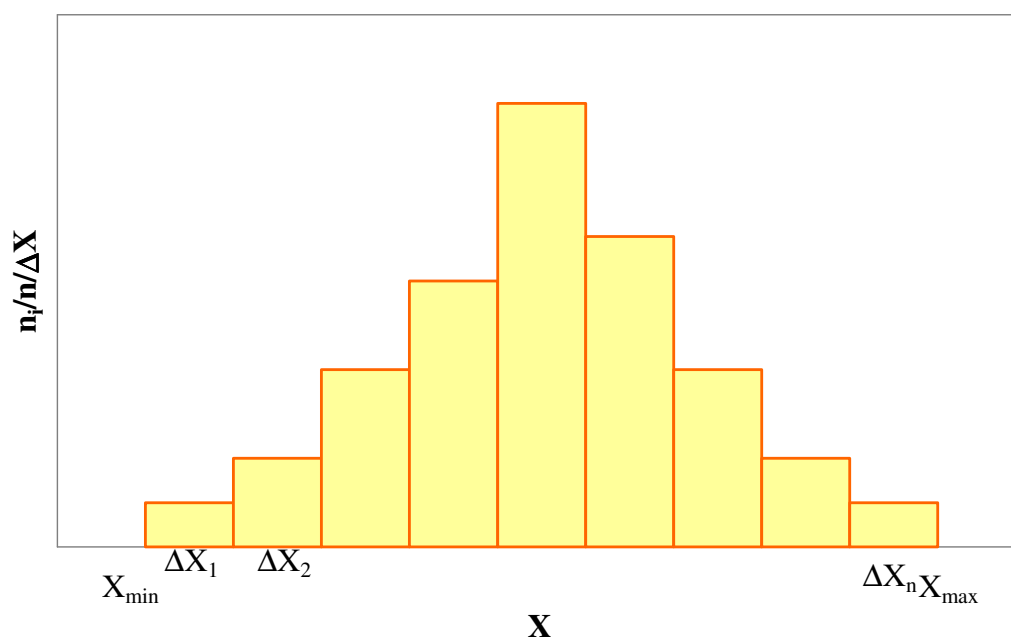
$$\epsilon_{\max} = \pm \left[\left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \cdot dX_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \cdot dX_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial X_n} \cdot dX_n \right| \right] \quad (15)$$

Jak widać błąd bezwzględny funkcji n zmiennych niezależnych równa się sumie wartości bezwzględnych wszystkich różniczek cząstkowych tej funkcji. Przedstawiona metoda nosi nazwę **metody różniczki zupełnej**.

Dla określenia wartości błędu względnego należy podzielić wyznaczoną wartość błędu bezwzględnego przez wartość zmierzoną.

Jak wspomniano wcześniej, przy pomiarach mogą wystąpić także **błędy przypadkowe**, których przyczyny są trudne do ujęcia i dlatego nie można podać dla pojedynczego pomiaru wzoru opisującego ten błąd. W celu oceny wpływu błędu przypadkowego na wynik pomiaru, należy posługiwać się metodami statystycznymi. A zatem konieczne jest wykonanie serii pomiarów wartości mierzonej wielkości.

Jeżeli wykonana zostanie długa seria pomiarów wartości mierzonej wielkości, to wyniki tych pomiarów przedstawione w postaci histogramu będą miały postać przedstawioną na rys.6.



Rys.6. Przykładowy rozkład wyników pomiarów.

Na rysunku tym przedstawiono histogram rozkładu wyników, który obrazuje, jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że w wyniku pomiaru uzyskana zostanie wartość leżąca w

danym przedziale o szerokości ΔX . Jeżeli liczba pomiarów jest dostatecznie duża, a długość przedziału ΔX dąży do zera, wówczas otrzymuje się ciągłą krzywą rozkładu wyników pomiarów. Pole znajdujące się pod częścią krzywej, odpowiadającą przedziałowi ΔX_i jest równe prawdopodobieństwu przyjęcia przez przypadkowy wynik pomiaru wartości z tego przedziału. Z doświadczeń oraz z rachunku prawdopodobieństwa wynika, że pole histogramu jest równe 1, a rozkład wyników pomiarów opisany jest funkcją

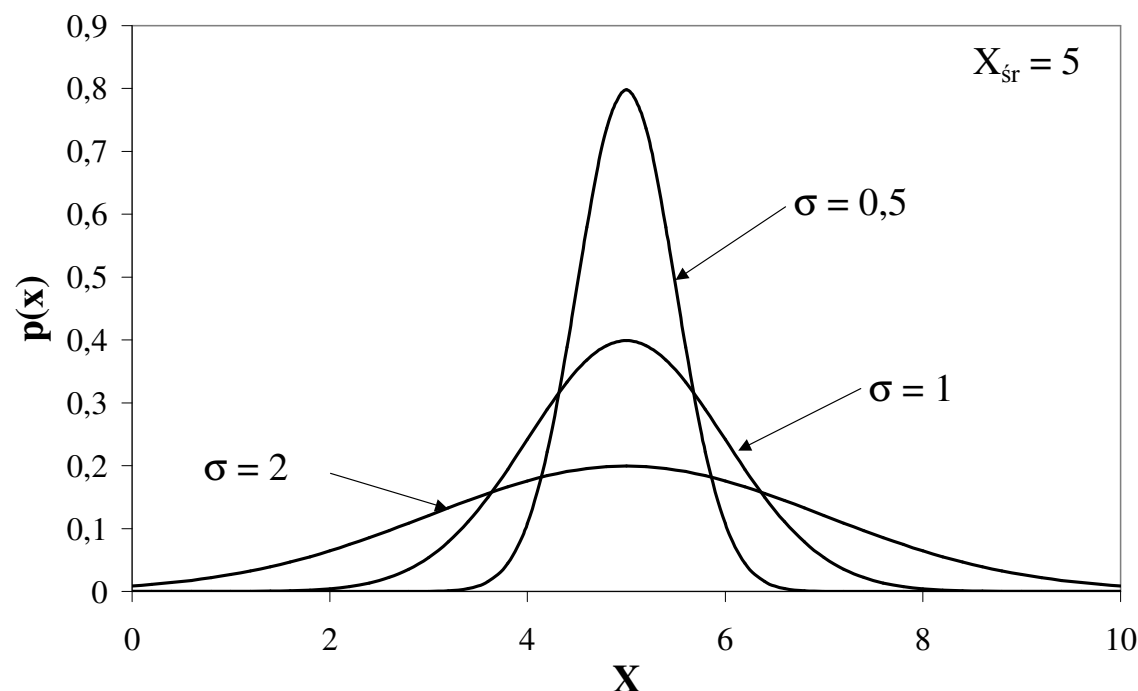
$$p(X) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(X - X_{sr})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \quad (16)$$

Rozkład ten, nazywany jest **rozkładem Gaussa** lub normalnym, a o przebiegu wykresu tego rozkładu, pokazanego na rys.7, decydują dwa parametry:

a) wartość średnia X_{sr}

b) błąd średni kwadratowy σ

Jak widać, maksimum o wartości $(\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi})^{-1}$ występuje przy wartości średniej, która w przypadku braku błędów systematycznych odpowiada wartości rzeczywistej. Z kolei błąd średni kwadratowy charakteryzuje stopień rozproszenia wyników pomiarów i może być miarą dokładności metody pomiarowej.



Rys.7. Przykładowe wykresy normalnego rozkładu prawdopodobieństwa dla różnych wartości parametru σ .

Prawdopodobieństwo, że wynik pomiaru będzie zawarty w przedziale od X_1 do X_2 można wyznaczyć jako powierzchnię zawartą pod krzywą $p(X)$ w tym przedziale, tzn.

$$P(X_1 < X < X_2) = \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(X - X_{\text{sr}})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \cdot dX = \alpha \quad (17)$$

Przedział od X_1 do X_2 jest nazywany przedziałem ufności, a prawdopodobieństwo α , że wynik pomiaru znajduje się w tym przedziale to poziom ufności. Granice przedziału ufności są

typowo umieszczone symetrycznie względem wartości średniej, a jego szerokość określana jest jako wielokrotność błędu średniego kwadratowego σ .

$$P(X_{\bar{s}r} - t_{\alpha} \cdot \sigma < X < X_{\bar{s}r} + t_{\alpha} \cdot \sigma) = \alpha \quad (18)$$

gdzie t_{α} jest współczynnikiem zależnym od poziomu ufności.

Szerokość przedziału ufności $t_{\alpha}\sigma$ oraz poziom ufności charakteryzują przypadkowy błąd pomiaru. Dla rozkładu normalnego zależność tych parametrów zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1.

t_{α}	α
0,5	0,38
0,7	0,51
1	0,683
1,64	0,9
2	0,954
3	0,997
3,5	0,9995
4	0,99993

Jak widać im węższy przedział ufności, tym mniejszy odpowiadający mu poziom ufności. Często, w praktyce pomiarowej błąd przypadkowy odpowiadający przedziałowi ufności o $t_{\alpha}=3$ jest wykorzystywany do charakteryzowania dokładności pomiaru i nazywany jest **błędem granicznym**.

Przedstawione rozważania dotyczą sytuacji wyidealizowanej, gdy badacz dysponuje bardzo dużą ilością wyników pomiarów. W praktyce, głównie ze względów ekonomicznych, badacz ma do dyspozycji skończoną liczbę wyników pomiarów.

Jak wynika ze statystyki matematycznej, najlepszym przybliżeniem rzeczywistej wartości wielkości mierzonej jest **średnia arytmetyczna** wyników pomiarów

$$X_{\acute{s}r} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (19)$$

gdzie n jest ilością wykonanych pomiarów wartości wielkości X . Gdy ilość pomiarów dąży do nieskończoności, to wartość średnia dąży do wartości rzeczywistej. **Błąd średni kwadratowy** σ_n opisany jest wzorem

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{\acute{s}r})^2}{n-1}} \quad (20)$$

Parametr σ_n jest miarą błędu, popełnianego przy wykorzystaniu dowolnego pojedynczego wyniku pomiaru. W celu określenia, jaki błąd popełnia badacz przyjmujący wartość średnią z n pomiarów za wartość rzeczywistą, wykorzystuje się **błąd średni kwadratowy z wartości średniej**

$$\sigma_{X_{\acute{s}r}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} \quad (21)$$

Jak widać rozważany błąd maleje pierwiastkowo wraz ze wzrostem ilości pomiarów. Przy czym zjawisko to jest najsilniej obserwowalne dla małych n . W praktyce, głównie ze względów ekonomicznych wykonuje się zaledwie kilka pomiarów. Dla tak małej ilości pomiarów, stosowanie rozkładu normalnego powoduje zaniżenie szerokości przedziału ufności przy założonym poziomie ufności. Dlatego przy małej ilości pomiarów zalecane jest stosowanie **rozkładu Studenta**, opisanego zależnością

$$p(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi \cdot (n-1) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \quad (22)$$

gdzie

$$t = \frac{X_{\acute{s}r} - X_{rz}}{\sigma_{X_{\acute{s}r}}} \quad (23)$$

natomiast Γ oznacza funkcję gamma Eulera o postaci

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-k} \cdot k^{x-1} \cdot dk \quad \text{dla } x > 0 \quad (24)$$

Jak widać w przypadku rozkładu Studenta, przedział ufności zależy nie tylko od założonego poziomu ufności, lecz również od ilości wykonanych pomiarów. Wartości parametru t_{α} odpowiadające wybranym wartościom poziomu ufności dla różnych ilości wykonanych pomiarów przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2

n	α			
	0,7	0,9	0,95	0,99
2	1,96	6,31	12,70	63,65
3	1,85	2,92	4,30	9,92
4	1,35	2,35	3,18	5,84
5	1,19	2,13	2,77	4,60
6	1,15	2,01	2,57	4,03
7	1,13	1,94	2,44	3,70
8	1,11	1,89	2,36	3,49
9	1,10	1,86	2,30	3,35
10	1,10	1,83	2,26	3,25
∞	1,03	1,64	1,96	2,57

Warto zauważyć, że dla liczby pomiarów dążącej do nieskończoności, rozkład Studenta przechodzi w rozkład normalny.

Przykład 2

Wykonano pięć pomiarów napięcia za pomocą woltomierza. Uzyskano następujące wyniki: 12,0 V; 12,1 V; 11,9 V, 12,2 V, 12,0 V. Należy obliczyć przedział ufności dla poziomu ufności 0,95.

Na podstawie podanych wyżej wzorów otrzymuje się:

Wartość średnią

$$X_{\acute{s}r} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{12 + 12,1 + 11,9 + 12,2 + 12}{5} = 12,04V \quad (25)$$

Błąd średni kwadratowy

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{\acute{s}r})^2}{n-1}} = \\ &= \sqrt{\frac{(12 - 12,04)^2 + (12,1 - 12,04)^2 + (11,9 - 12,04)^2 + (12,2 - 12,04)^2 + (12 - 12,04)^2}{5-1}} = 0,114V \end{aligned} \quad (26)$$

Błąd średni kwadratowy wartości średniej

$$\sigma_{X_{\acute{s}r}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = \frac{0,114V}{\sqrt{5}} = 0,051V \quad (27)$$

Z tabeli 2 dla $n = 5$ i $\alpha = 0,95$ odczytuje się wartość $t_\alpha = 2,77$ (rozkład Studenta) lub $t_\alpha = 1,96$ (rozkład normalny). A zatem iloczyn $t_\alpha \sigma$ wynosi $0,141 \text{ V}$ (rozkład Studenta) lub $0,1 \text{ V}$ (rozkład normalny). Otrzymany wynik oznacza, że z prawdopodobieństwem równym $0,95$ rzeczywista wartość mierzonego napięcia wynosi $12,04 \text{ V} \pm 0,141 \text{ V}$ (rozkład Studenta) lub $12,04 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V}$ (rozkład normalny). Otrzymany wynik potwierdza tezę, że wykorzystując rozkład normalny do oceny dokładności pomiaru, uzyska się wynik zbyt optymistyczny, tzn. węższy przedział ufności (mniejszą niepewność pomiaru).

Przedstawione powyżej rozważania dotyczyły przypadku, gdy pomiar wykonywany był metodą bezpośrednią. Jednak w praktyce, często wykorzystuje się metody pośrednie, np. pomiar rezystancji jako ilorazu napięcia i prądu. W takim przypadku można ogólnie napisać, że wielkość Z jest funkcją wielkości X oraz Y . A zatem wartość średnia wielkości Z jest funkcją wartości średnich $X_{\acute{s}r}$ oraz $Y_{\acute{s}r}$, które wyliczane są ze wzoru (19) odpowiadającego pomiarowi bezpośredniemu. Błąd średni kwadratowy wyznaczenia wartości wielkości Z dany jest zależnością

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 \cdot \left[\frac{\partial f(X_{\acute{s}r}, Y_{\acute{s}r})}{\partial X_{\acute{s}r}} \right]^2 + \sigma_Y^2 \cdot \left[\frac{\partial f(X_{\acute{s}r}, Y_{\acute{s}r})}{\partial Y_{\acute{s}r}} \right]^2} \quad (28)$$

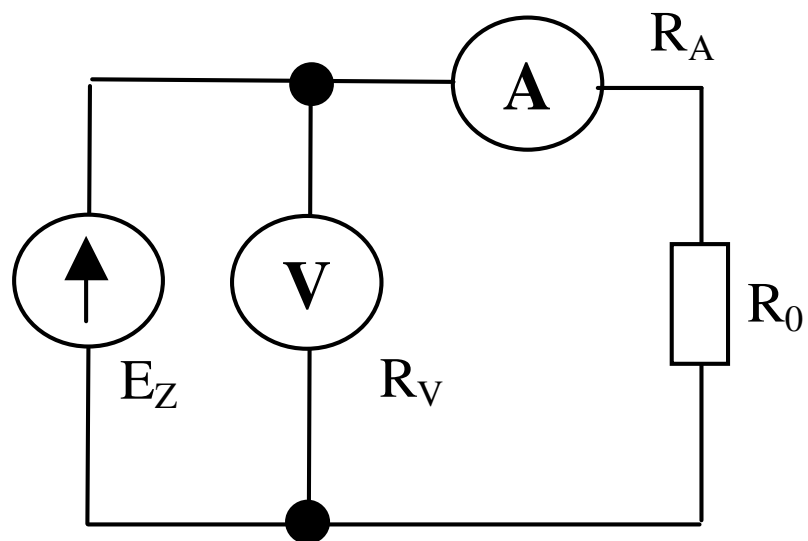
gdzie σ_X oraz σ_Y oznaczają błędy średnie kwadratowe wyznaczenia wielkości X oraz Y .

Błąd średni kwadratowy wyznaczenia wartości średniej σ_{Zsr} odpowiadający poziomowi ufności α opisany jest wzorem

$$\sigma_{Zsr} = \sqrt{\sigma_{Xsr}^2 \cdot \left[\frac{\partial f(X_{sr}, Y_{sr})}{\partial X_{sr}} \right]^2 + \sigma_{Ysr}^2 \cdot \left[\frac{\partial f(X_{sr}, Y_{sr})}{\partial Y_{sr}} \right]^2} \quad (29)$$

Przykład 3.

Wyznaczyć rzeczywistą wartość mocy wydzielanej na rezystorze R_0 , jeżeli pomiar wykonany został dziewięciokrotnie w układzie pokazanym na rys.8 za pomocą woltomierza o klasie 1 i rezystancji wewnętrznej $R_V = 6 \cdot 10^5 \Omega \pm 0,1 \%$ na zakresie 30 V oraz amperomierza o klasie 1, rezystancji wewnętrznej $R_A = 4 \Omega \pm 1 \%$ i zakresie 150 mA. Wyznaczyć błąd systematyczny i przypadkowy dla poziomu ufności $\alpha = 0,99$. Wyniki pomiarów przedstawiono w tabeli 3.



Rys.8. Analizowany układ pomiarowy.

Tabela 3

i	U_V [V]	I_A [mA]
1	20,1	98
2	20,0	97
3	20,3	101
4	19,8	103
5	19,9	105
6	20,2	99
7	19,9	98
8	19,8	100
9	20	99

Z analizy układu pomiarowego wynika, że moc wydzielana na rezystorze dana jest wzorem

$$P_0 = U_V \cdot I_A - I_A^2 \cdot R_A \quad (30)$$

Z drugiej strony, moc ta jest sumą wartości średniej mocy P_{0sr} oraz błędów przypadkowego i systematycznego.

$$P_0 = P_{0sr} \pm \varepsilon_{P_0}^S \pm \varepsilon_{P_0}^P \quad (31)$$

Rozwiązanie zadanie rozpoczniemy od wyznaczenia wartości średnich prądu i napięcia, które dane są wzorami

$$U_{sr} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n U_{Vi} = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^9 U_{Vi} = 20 [V] \quad (32)$$

$$I_{sr} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n I_{Ai} = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^9 I_{Ai} = 100 [mA] \quad (33)$$

Wartość średnia mocy dana jest wzorem

$$P_{0sr} = U_{Vsr} \cdot I_{Asr} - I_{Asr}^2 \cdot R_A = 1,96 [W] \quad (34)$$

Błąd średni kwadratowy wyznaczenia napięcia wynosi

$$\sigma_{U_{sr}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (U_{Vi} - U_{Vsr})^2}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 (U_{Vi} - U_{Vsr})^2}{9 \cdot (9-1)}} = \sqrt{\frac{0,24 [V]}{9 \cdot 8}} = 0,057 [V] \quad (35)$$

Błąd średni kwadratowy wyznaczenia prądu wynosi

$$\sigma_{I_{sr}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_{Ai} - I_{Asr})^2}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 (I_{Ai} - I_{Asr})^2}{9 \cdot (9-1)}} = \sqrt{\frac{54 [mA]}{9 \cdot 8}} = 0,866 [mA] \quad (36)$$

Dla rozkładu Studenta przy $n = 9$ oraz $\alpha = 0,99$ otrzymuje się $t_\alpha = 3,35$

$$\begin{aligned} \sigma_{P_{osr}} &= t_\alpha \cdot \sqrt{\sigma_{U_{sr}}^2 \cdot \left[\frac{\partial P_{0sr}}{\partial U_{sr}} \right]^2 + \sigma_{I_{sr}}^2 \cdot \left[\frac{\partial P_{0sr}}{\partial I_{sr}} \right]^2} = t_\alpha \cdot \sqrt{\sigma_{U_{sr}}^2 \cdot I_A^2 + \sigma_{I_{sr}}^2 \cdot [U_{sr} - 2 \cdot I_{sr} \cdot R_A]^2} = \\ &= 3,35 \cdot \sqrt{(0,057 \cdot 100)^2 + (0,886 \cdot 19,2)^2} = 58,88 [mW] = \varepsilon_{P_o}^p \end{aligned} \quad (37)$$

Z kolei, błąd systematyczny pomiaru wynika z klasy woltomierza i amperomierza oraz z niezerowej rezystancji wewnętrznej amperomierza, a zatem stosując metodę różniczki zupełnej uzyskuje się następujący opis błędu systematycznego

$$\varepsilon_{P_o}^s = \pm \left\{ \left| \frac{\partial P_0}{\partial U_V} \cdot \varepsilon_{UV} \right| + \left| \frac{\partial P_0}{\partial I_A} \cdot \varepsilon_{IA} \right| + \left| \frac{\partial P_0}{\partial R_A} \cdot \varepsilon_{RA} \right| \right\} = \pm \{ (I_A \cdot \varepsilon_{UV}) + (U_V - 2 \cdot I_A \cdot R_A) \cdot \varepsilon_{IA} + (I_A^2 \cdot \varepsilon_{RA}) \} \quad (38)$$

W powyższym wzorze należy przyjąć wartości średnie zmierzonego napięcia i prądu. Błędy bezwzględne wyznaczenia napięcia, prądu i rezystancji wewnętrznej amperomierza wynoszą odpowiednio

$$\varepsilon_{U_V} = \frac{1\% \cdot 30V}{100\%} = 0,3 V \quad (39)$$

$$\varepsilon_{IA} = \frac{1\% \cdot 150mA}{100\%} = 1,5 \text{ mA} \quad (40)$$

$$\varepsilon_{RA} = \frac{1\% \cdot 4\Omega}{100\%} = 0,04 \Omega \quad (41)$$

A zatem, po podstawieniu zależności (39-41) do wzoru (38) i podstawieniu wartości liczbowych wartość błędu systematycznego pomiaru mocy wynosi

$$\varepsilon_{P_0}^s = \pm \{100mA \cdot 0,3V + (20V - 2 \cdot 100mA \cdot 4\Omega) \cdot 1,5mA + 100^2 mA^2 \cdot 0,04\Omega\} = \pm 59,2 [mW] \quad (42)$$

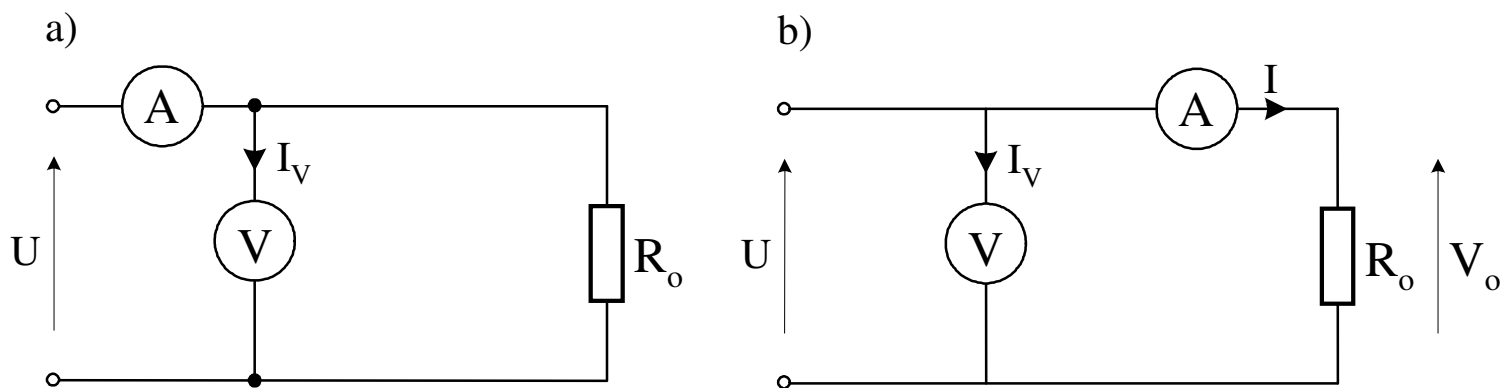
Zatem z prawdopodobieństwem równym 0,99, wartość mocy wydzielanej na rezystorze wynosi

$$P_0 = 1960 \text{ mW} \pm 59,2 \text{ mW} \pm 58,88 \text{ mW} \quad (43)$$

Systematyczny błąd względny wynosi 3,02%, natomiast przypadkowy błąd względny 3%.

Przykład 4

W układzie jak na rys.9 wykonano pomiar napięcia i prądu płynącego przez rezystor za pomocą amperomierza o klasie 1 i rezystancji wewnętrznej $0,2 \Omega$ oraz woltomierza o klasie 1 i rezystancji wewnętrznej $100 \text{ k}\Omega$.



Rys.9. Schematy analizowanych układów pomiarowych

Na podstawie wykonanych pomiarów wyznaczono wartość rezystancji R_o . Wyznaczyć błąd systematyczny pomiaru R_o w obu układach, jeżeli uzyskano następujące wyniki pomiarów:

- 1) $I_A = 1 \text{ A}$, $U_V = 10 \text{ V}$, $I_{zakr.} = 1,5 \text{ A}$, $V_{zakr.} = 15 \text{ V}$
- 2) $I_A = 8 \text{ }\mu\text{A}$, $U_V = 800 \text{ V}$, $I_{zakr.} = 10 \text{ }\mu\text{A}$, $V_{zakr.} = 1 \text{ kV}$

Rozwiązanie:

W układzie z rys. 6a wartość rzeczywista R_o wynosi:

$$R_{orz} = \frac{U_V}{I_A - I_V} \quad (44)$$

Wartość zmierzona

$$R_{oz} = \frac{U_V}{I_A} \quad (45)$$

Błąd metody dany jest wzorem

$$\varepsilon_m = R_{orz} - R_{oz} = \frac{U_V}{I_A - I_V} - \frac{U_V}{I_A} = \frac{U_V \cdot (I_A - I_A + I_V)}{(I_A - I_V) \cdot I_A} = \frac{U_V}{(I_A - I_V) \cdot I_A} \quad (46)$$

Podstawiając

$$I_V = \frac{U_V}{R_V} \quad (47)$$

uzyskuje się ostatecznie

$$\varepsilon_m = \frac{\frac{U_V^2}{R_V}}{I_A \left(I_A - \frac{U_V}{R_V} \right)} = \frac{U_V^2}{I_A \cdot (I_A R_V - U_V)} \quad (48)$$

Oprócz błędu metody występuje błąd wynikający z dokładności zastosowanych przyrządów pomiarowych, który należy wyznaczyć metodą różniczki zupełnej wzoru (45)

$$\varepsilon_m = \frac{\delta R_{oz}}{\delta U_V} \cdot \Delta U_V + \frac{\delta R_{oz}}{\delta I_A} \cdot \Delta I_A = \frac{\Delta U_V}{I_A} - \frac{U_V}{I_A^2} \cdot \Delta I_A = \frac{\Delta U_V}{I_A} - R_{oz} \cdot \frac{\Delta I_A}{I_A} \quad (49)$$

Błędy bezwzględne pomiaru woltomierzem i amperomierzem dane są wzorami

$$\Delta U_V = \frac{U_{zakr.} \cdot kl V}{100} \quad (50)$$

$$\Delta I_A = \frac{I_{zakr.} \cdot kl A}{100} \quad (51)$$

Ostatecznie całkowity błąd pomiaru rezystancji dany jest wzorem

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_m = \pm \left\{ \left| \frac{U_V^2}{I_A (I_A R_V - U_V)} \right| + \left| \frac{U_{zakr.} \cdot kl V}{100 I_A} \right| + \left| \frac{U_V}{I_A^2} \cdot \frac{I_{zakr.} \cdot kl A}{100} \right| \right\} \quad (52)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się

1) Dla zestawu 1) $R_{oz} = 10 \Omega$ oraz

$$\varepsilon = \pm \left\{ \left| \frac{10^2}{1(1 \cdot 100 \cdot 10^3 - 10)} \right| + \left| \frac{15 \cdot 1}{100 \cdot 1} \right| + \left| \frac{10}{1^2} \cdot \frac{1,5 \cdot 1}{100} \right| \right\} = \pm \{10^{-3} + 0,15 + 0,15\} = \pm 0,301 \Omega \quad (53)$$

Zatem błąd względny pomiaru wynosi

$$\delta = \frac{\varepsilon}{R_{oz}} = \pm 3,01\% \quad (54)$$

2) Dla zestawu 2) $R_{oz} = 100 M\Omega$ oraz

$$\varepsilon = \pm \left\{ \left| \frac{800^2}{8 \cdot 10^{-6} \cdot (8 \cdot 10^{-6} \cdot 10^5 - 800)} \right| + \left| \frac{1000 \cdot 1}{100 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} \right| + \left| \frac{800}{8 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 100} \right| \right\} =$$

$$= \pm \{10^8 + 2,5 \cdot 10^6\} = \pm 1,025 \cdot 10^8 \Omega \quad (55)$$

Zatem błąd względny pomiaru wynosi

$$\delta = \frac{\varepsilon}{R_{oz}} = \pm 102,5\% \quad (56)$$

W układzie z rys.6b wartość rzeczywista rezystancji R_0 wynosi

$$R_{orz} = \frac{U_V - I_A \cdot R_A}{I_A} \quad (57)$$

natomiast wartość zmierzona

$$R_{oz} = \frac{U_V}{I_A} \quad (58)$$

Błąd metody

$$\varepsilon_m = R_{orz} - R_{oz} = \frac{U_V - I_A \cdot R_A}{I_A} - \frac{U_V}{I_A} = -R_A \quad (59)$$

Błąd przyrządów pomiarowych jest taki sam jak w układzie z punktu b), a zatem całkowity błąd pomiaru opisany jest wzorem

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_m = \pm \left\{ |R_A| + \left| \frac{U_{zakr.} \cdot kl V}{100 I_A} \right| + \left| \frac{U_V}{I_A^2} \cdot \frac{I_{zakr.} \cdot kl A}{100} \right| \right\} \quad (60)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się:

1) dla zestawu 1) $R_{oz} = 10 \Omega$ oraz

$$\varepsilon = \pm \left\{ |0,2| + \left| \frac{15 \cdot 1}{100 \cdot 1} \right| + \left| \frac{10}{1^2} \cdot \frac{1,5 \cdot 1}{100} \right| \right\} = \pm \{0,2 + 0,15 + 0,15\} = \pm 0,5 \Omega \quad (61)$$

Zatem błąd względny pomiaru wynosi

$$\delta = \frac{\varepsilon}{R_{oz}} = \pm 5\% \quad (62)$$

2) dla zestawu 2) $R_{oz} = 100 \text{ M}\Omega$ oraz

$$\varepsilon = \pm \left\{ |0,2| + \left| \frac{1000 \cdot 1}{100 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} \right| + \left| \frac{800}{8 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 100} \right| \right\} = \pm \{0,2 + 2,5 \cdot 10^6\} = \pm 2,5 \cdot 10^6 \text{ } \Omega \quad (63)$$

Zatem błąd względny pomiaru wynosi

$$\delta = \frac{\varepsilon}{R_{oz}} = \pm 2,5\% \quad (64)$$

Niepewność pomiaru

O ile błąd pomiaru odnosi się do konkretnego wyniku pomiaru, to rozrzut wyników pomiarów uzyskanych w jednej serii pomiarów wykonanych w powtarzalnych warunkach jest charakteryzowany przez **niepewność pomiarów** wynikającą z losowości zjawisk zakłócających pomiar. Czasami w literaturze podaje się, że niepewność pomiaru jest odpowiednikiem granicznego błędu pomiaru.

Niedokładność pomiaru charakteryzuje się przez podanie niepewności standardowej, niepewności łącznej i niepewności rozszerzonej.

Niepewność standardowa u równa jest odchyleniu standardowemu wyników pomiarów $S = \sigma_n$.

Niepewność złożona (łączna) u_τ to niepewność standardowa wyniku pomiaru wykonanego metodą pośrednią. Jest ona dana wzorem

$$u_\tau = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 \cdot u_i^2} \quad (\text{B23})$$

gdzie f jest funkcją pomiarową, X_i oznacza wielkość mierzona metodą bezpośrednią, natomiast u_i – niepewność standardową pomiaru wielkości X_i .

Z kolei, niepewność rozszerzona U określa szerokość przedziału wartości mierzonej wielkości, w którym z prawdopodobieństwem równym poziomowi ufności znajduje się wartość prawdziwa mierzonej wielkości

$$U = k_p \cdot u_\tau(y) \quad (\text{B24})$$

gdzie wartość współczynnika rozszerzenia k_p jest równa wartości uprzednio wprowadzonego współczynnika t_α , którą należy odczytać z tabeli 1, gdy $n > 30$ lub z tabeli 2, gdy $n < 30$.

Niepewność pomiaru może być wyznaczona metodami statystycznymi (niepewność typu A) lub innymi metodami (niepewność typu B). Występująca w analizie niepewności wielkość nazywana **estymatą wartości prawdziwej** równa jest sumie wartości średniej X_{sr} wyników pomiarów i wartości wszystkich **poprawek**, tzn. błędów systematycznych.

Niepewność typu A określa się za pomocą metod statystycznych. Najpierw ze wzoru (B13) wyliczana jest wartość średnia mierzonej wielkości $X_{\text{śr}}$. Następnie wyznacza się niepewność standardową typu A ze wzoru

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{\text{śr}})^2}{(n-1) \cdot n}} \quad (\text{B25})$$

Niepewność rozszerzoną U wylicza się ze wzoru (B24) przy założonym poziomie ufności, przy czym $u_\tau = u_A$. Jeżeli rozkład wyników pomiarów nie jest opisany ani przez rozkład normalny, ani przez rozkład t-Studenta należy przyjąć arbitralnie wartość $k_p = 2$ dla poziomu ufności 0,95 lub $k_p = 3$ dla poziomu ufności 0,99.

Z kolei, niepewność typu B jest typowo stosowana przy ocenie niepewności wynikającej z niedoskonałości aparatury pomiarowej. Wówczas wykorzystuje się graniczne wartości błędów ε_g , charakteryzowane przez klasę przyrządu, a rozkład prawdopodobieństwa popełnienia błędu ma postać rozkładu równomiernego lub trójkątnego. W tym przypadku niepewność standardowa typu B dana jest wzorem

$$u_B = \begin{cases} \frac{\varepsilon_g}{\sqrt{3}} & \text{dla rozkładu równomiernego} \\ \frac{\varepsilon_g}{\sqrt{6}} & \text{dla rozkładu trójkatnego} \end{cases} \quad (\text{B26})$$

Niepewność rozszerzona U jest w tym przypadku równa iloczynowi poziomu ufności i błędu granicznego ε_g .

Jak wspomniano, jeżeli przy rozważanym pomiarze występuje tylko niepewność typu A, to niepewność łączna u_τ jest równa niepewności standardowej u_A , natomiast gdy w pomiarze występuje niepewność typu A oraz niepewność typu B, to niepewność łączna dana jest wzorem

$$u_\tau = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (\text{B27})$$

Przykład

Wykonano ośmiu pomiarów prądu za pomocą amperomierza o klasie 2 i zakresie 2 A. Uzyskano następujące wyniki: 0,97 A, 1 A, 1,01 A, 1,03 A, 1,04 A, 0,99 A, 0,98 A, 1,02 A. Należy obliczyć niepewność pomiaru dla poziomu ufności $\alpha = 0,95$. Na podstawie podanych wyżej wzorów otrzymuje się:

-wartość średnią

$$X_{\bar{sr}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{0,97 + 1 + 1,01 + 1,03 + 1,04 + 0,99 + 0,98 + 1,02}{8} = 1,005 \text{ V} \quad (\text{B28})$$

Ponieważ na niepewność pomiaru wpływa zarówno błąd przypadkowy o rozkładzie t-Studenta, charakteryzowany przez niepewność typu A, jak również błąd systematyczny amperomierza, charakteryzowany przez niepewność typu B, należy po kolei wyznaczyć wartości niepewności standardowych u_A oraz u_B . Niepewność standardowa typu A dana jest wzorem

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{sr})^2}{(n-1) \cdot n}} = \sqrt{\frac{(1,005 - 0,97)^2 + (1,005 - 1)^2 + (1,005 - 1,01)^2 + (1,005 - 1,03)^2 + (1,005 - 1,04)^2 + (1,005 - 0,99)^2 + (1,005 - 0,98)^2 + (1,005 - 1,02)^2}{(8-1) \cdot 8}} = 8,66 \text{ mA} \quad (\text{B29})$$

Z kolei, niepewność typu B przy równomiernym rozkładzie wartości błędów amperomierza dana jest wzorem

$$u_B = \frac{kl \cdot I_{\max}}{100 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 2}{100 \cdot \sqrt{3}} = 23,09 \text{ mA} \quad (\text{B30})$$

Niepewność łączna wyrażona jest wzorem

$$u_\tau = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{(8,66)^2 + (23,09)^2} = 24,66 \text{ mA} \quad (\text{B31})$$

Ponieważ niepewność typu B jest znacznie większa od niepewności typu A, więc przy wyznaczaniu niepewności rozszerzonej wykorzystuje się wartość współczynnika $k_p = \alpha \cdot \sqrt{3}$. A zatem niepewność rozszerzona wynosi

$$U = k_p \cdot u_\tau = 0,95 \cdot \sqrt{3} \cdot 24,66 \text{ mA} = 40,58 \text{ mA} \quad (\text{B32})$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że z prawdopodobieństwem równym 0,95 prawdziwa wartość prądu wynosi $1,005 \text{ A} \pm 40,58 \text{ mA}$.

Procedura wyznaczania niepewności pomiaru składa się z następujących kroków:

1. Ustalenie związku funkcjonalnego między wielkością mierzoną Y a wielkościami pomocniczymi (mierzonymi bezpośrednio) X_j . Może być to funkcja analityczna określona teoretycznie albo funkcja wyznaczona eksperymentalnie lub zależność rozwiązywana numerycznie.
2. Wyznaczenie wartości oczekiwanych wielkości pomocniczych i określenie oraz wniesienie poprawek o charakterze systematycznym do wartości tych wielkości.
3. Wyznaczenie i zestawienie niepewności standardowych wyznaczenia wartości wielkości X_j uzyskanych przy wykorzystaniu metody A oraz B.
4. Wyznaczenie wartości oczekiwanej wielkości mierzonej pośrednio Y w oparciu o związki tej wielkości z wielkościami pomocniczymi X_j .
5. Oszacowanie łącznej niepewności standardowej wyznaczenia wartości wielkości Y w oparciu o wyznaczone wartości wariancji i kowariancji wartości oczekiwanych wielkości mierzonych pośrednio X_j .
6. Wyznaczenie niepewności rozszerzonej (całkowitej). Współczynnik rozszerzenia w laboratoriach pomiarowych powinien wynosić 2.
7. Jeżeli liczba pomiarów, dla których stosujemy wyznaczanie niepewności metodą A jest mniejsza od 10 lub dane stosowane w metodzie B są niepewne, to należy współczynnik rozszerzenia pomnożyć przez współczynnik zależny od rozkładu prawdopodobieństwa popełnienia błędu (większy od 1).
8. Podać wynik pomiaru wraz z jego niepewnością standardową lub rozszerzoną oraz komentarzem opisującym sposób wyznaczenia tych wartości.

5. Mierniki magnetoelektryczne

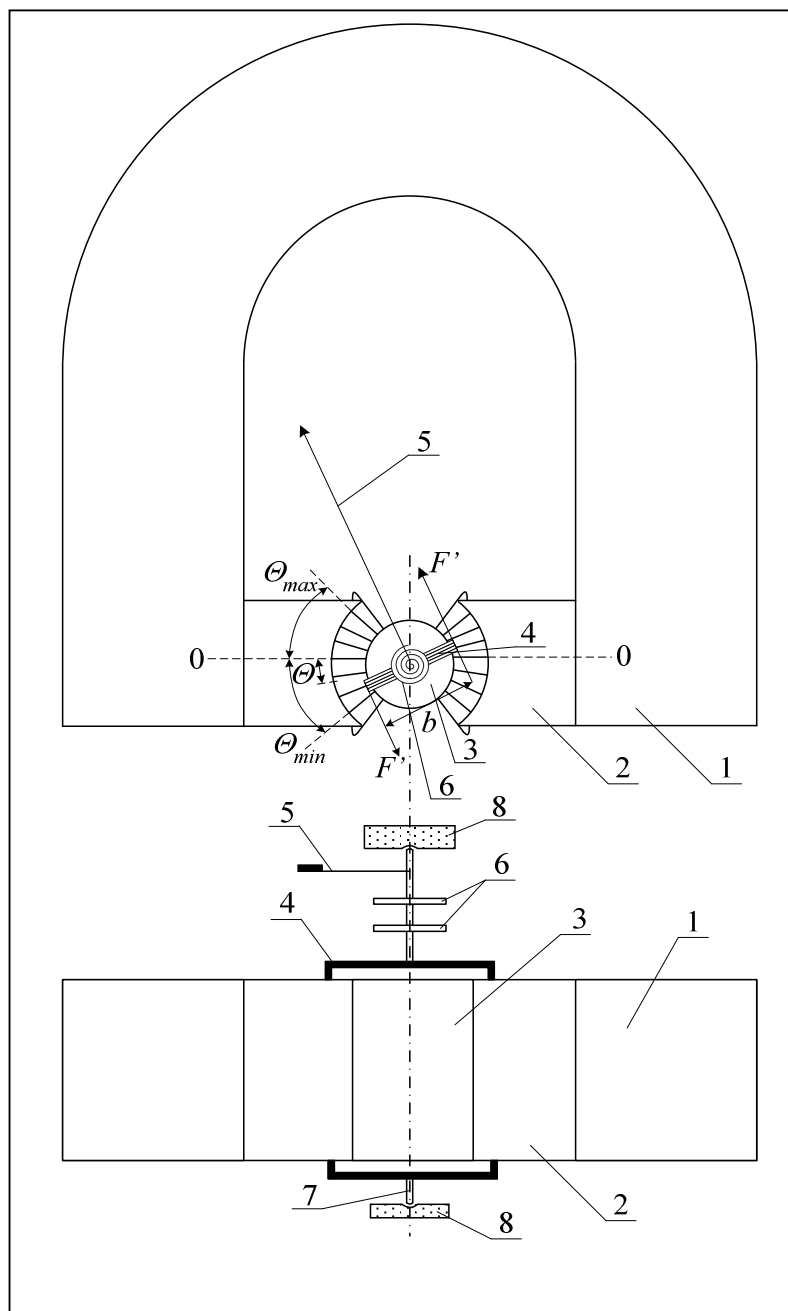
W mierniku magnetoelektrycznym, którego schemat mechaniczny przedstawiono na rys.10, wykorzystywane jest wzajemne oddziaływanie pól magnetycznych pochodzących od magnesu trwałego i od mierzonego prądu płynącego przez przewodnik.

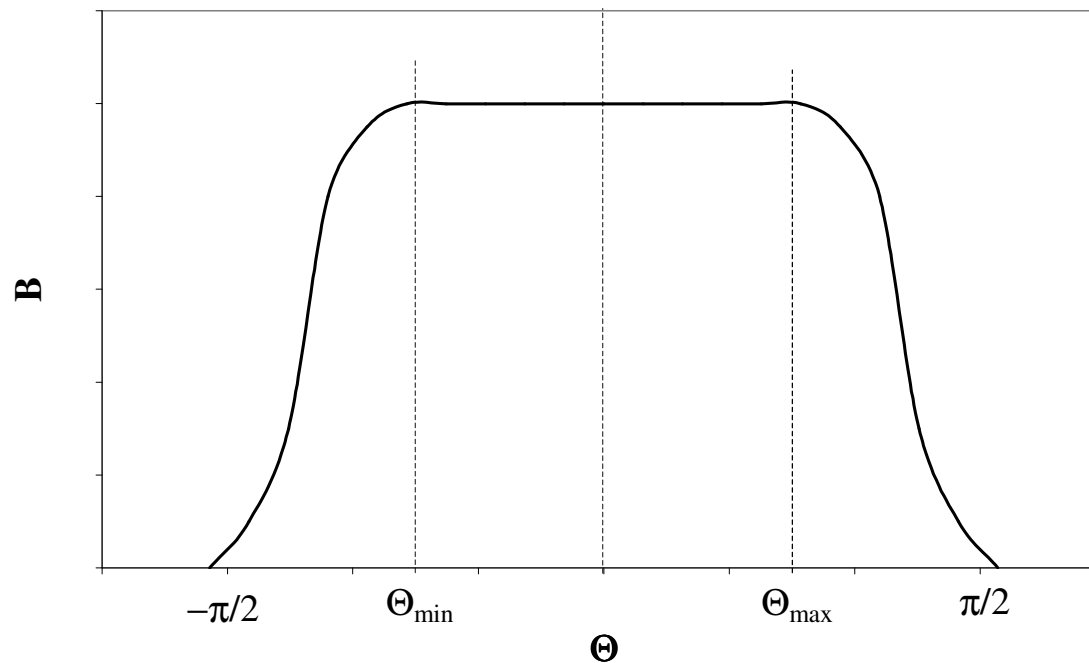
Na rys.10. symbole cyfrowe oznaczają:

- 1 – magnes trwały
- 2 – nabiegunniki
- 3 – rdzeń
- 4 – cewka
- 5 – wskazówka
- 6 – sprężynki zwrotne
- 7 – ośka
- 8 – łożyska.

Obwód magnetyczny złożony z magnesu trwałego, nabiegunników i rdzenia wytwarza w szczelinie pole magnetyczne, którego indukcja B ma rozkład pokazany na rys.11.

Rys.10. Schemat mechaniczny miernika magnetoelektrycznego





Rys.11. Rozkład indukcji pola magnetycznego B w szczelinie.

Jak wiadomo z podstawowego kursu fizyki, na przewodnik o długości l , znajdujący się w polu magnetycznym o indukcji B prostopadle do linii sił pola magnetycznego, przez który płynie prąd I działa siła o wartości

$$F = I \cdot B \cdot l \quad (68)$$

Jeżeli w polu magnetycznym, zamiast odcinka przewodu, zostanie umieszczona prostokątna cewka o z zwojach i bokach mających długości a oraz b , gdzie bok a jest

prostopadły do linii sił pola magnetycznego, to przy przepływie przez cewkę prądu I , będzie na nią działać para sił $F'-F'$, powodująca obrót cewki o kąt φ . Wówczas na cewkę działa moment napędowy M_n opisany zależnością

$$M_n = B \cdot I \cdot a \cdot b \cdot z \cdot \cos \varphi \quad (69)$$

W praktycznych rozwiązaniach mierników dąży się do takiego ukształtowania obwodu magnetycznego, aby uzyskać zerową wartość kąta φ między płaszczyzną cewki a liniami sił pola magnetycznego magnesu trwałego. Wówczas moment napędowy nie zależy od kąta wychylenia cewki.

Aby uzyskać stabilne wskazanie miernika, należy momentowi napędowemu M_n przeciwstawić moment zwrotny M_z proporcjonalny do kąta obrotu cewki. Wystąpienie momentu zwrotnego o żądanej wartości zapewnia zamocowanie osi cewki na sprężynkach, które jednocześnie są doprowadzeniami mierzonego prądu.

$$M_z = k_z \cdot \Theta \quad (70)$$

gdzie k_z jest stałą, natomiast Θ – kątem obrotu cewki.

W stanie ustalonym moment napędowy jest równy momentowi zwrotnemu. A zatem kąt obrotu cewki opisany jest zależnością


$$\Theta = \frac{B \cdot a \cdot b \cdot z}{k_z} \cdot I = S_I \cdot I \quad (71)$$

gdzie S_I oznacza czułość prądową miernika.

Jak widać w celu poprawy czułości przyrządu należy zastosować cewkę o dużej ilości zwojów.

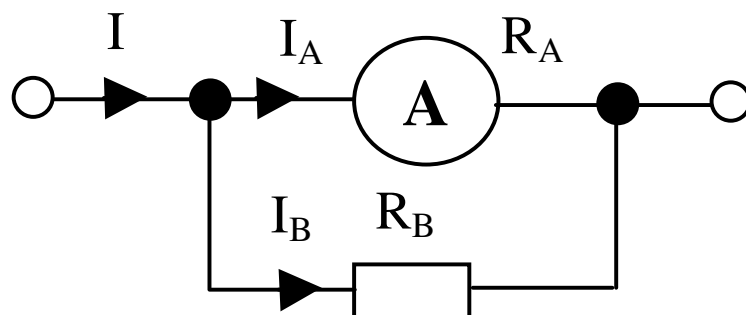
Mierniki magnetoelektryczne ze swej zasady działania są amperomierzami, ponieważ ich wskazanie jest proporcjonalne do mierzonego prądu, kierunek wychylenia wskazówki przyrządu zależy od kierunku przepływu prądu. Przy pomiarach prądu przemiennego, miernik wskaże wartość średnią mierzonego prądu. Mierniki magnetoelektryczne są odporne na działanie zakłócające innych pól magnetycznych.

Na skali miernika znajdują się następujące informacje:

- a) typ miernika \square - magnetoelektryczny
- b) rodzaj mierzonego prądu $=$ - prąd stały
- c) prawidłowe położenie miernika w czasie pracy \neg - poziome lub \perp - pionowe
- d) klasę przyrządu (liczba)
- e)  napięcie próby
- f) rezystancję wewnętrzną przyrządu lub pobór prądu przez woltomierz lub spadek napięcia na amperomierzu

Jak zaznaczono wcześniej, mierniki magnetoelektryczne są ze swej zasady działania amperomierzami. Jednak z faktu, że posiadają niezerową rezystancję o stałej wartości wynika, zgodnie z prawem Ohma, że mogą być one zastosowane zarówno do pomiaru prądu jak i napięcia.

Konkretny miernik magnetoelektryczny umożliwia pomiar prądu tylko na jednym zakresie pomiarowym. Aby rozszerzyć zakres mierzonych prądów do większych wartości należy zastosować rezystor połączony równolegle z amperomierzem. Przez ten rezystor, nazywany bocznikiem, płynie prąd będący różnicą między rozszerzoną wartością zakresową a wartością zakresową miernika. Sposób włączenia bocznika ilustruje rys.12.



Rys.12. Sposób podłączenia bocznika do amperomierza.

W przypadku podłączenia bocznika, prąd I dzieli się na prąd I_A płynący przez amperomierz oraz prąd I_B płynący przez bocznik. Zgodnie z prawem Kirchhoffa, spadek napięcia na boczniku musi być taki sam jak spadek napięcia na amperomierzu

$$I_A \cdot R_A = (I - I_A) \cdot R_B \quad (72)$$

Stąd wynika relacja między prądem całkowitym I a prądem mierzonym przez amperomierz I_A o następującej postaci

$$I = I_A \cdot \left(1 + \frac{R_A}{R_B}\right) = m \cdot I_A \quad (73)$$

A zatem chcąc rozszerzyć zakres pomiarowy amperomierza m razy, należy dobrać wartość bocznika zgodnie ze wzorem

$$R_B = \frac{R_A}{m - 1} \quad (74)$$

W przypadku zastosowania bocznika R_B do pomiaru prądu I , błąd systematyczny wyznaczenia tego prądu wynika z trzech przyczyn: dokładności amperomierza, dokładności wyznaczenia rezystancji wewnętrznej amperomierza oraz dokładności wykonania bocznika. Stosując metodę różniczki zupełnej do wzoru (73) otrzymuje się następującą zależność opisującą błąd bezwzględny tego pomiaru

$$\Delta I = \left(1 + \frac{R_A}{R_B}\right) \cdot \Delta I_A + \frac{I_A}{R_B} \cdot \Delta R_A + \frac{I_A \cdot R_A}{R_B^2} \cdot \Delta R_B \quad (75)$$

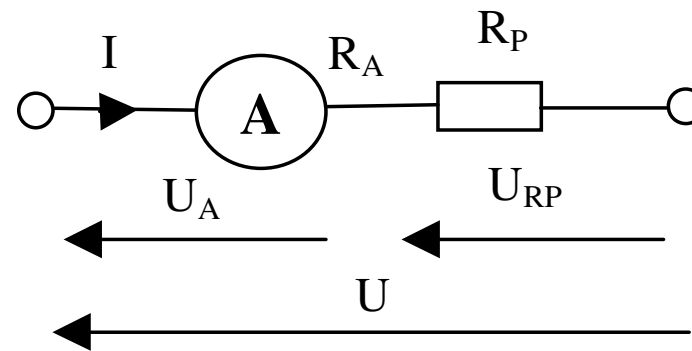
Stąd względny błąd pomiaru prądu I dany jest wzorem

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta I_A}{I_A} + \frac{R_A}{R_A + R_B} \cdot \left(\frac{\Delta R_A}{R_A} + \frac{\Delta R_B}{R_B} \right) \quad (76)$$

Dobierając bocznik do amperomierza należy uwzględnić maksymalną wartość mocy P_B jaka może się w nim wydzielć. Moc ta powinna spełniać warunek

$$P_B > (I - I_A)^2 \cdot R_B \quad (77)$$

Wykorzystując miernik magnetoelektryczny do pomiaru napięć należy stosować dodatkowe rezystory, nazywane posobnikami, włączone szeregowo z miernikiem, w celu zminimalizowania wartości prądu pobieranego z układu pomiarowego. Sposób włączenia posobnika ilustruje rys.13.



Rys.13. Sposób podłączenia posobnika do amperomierza przy pomiarze napięcia.

W rozważanej sytuacji, napięcie mierzone U jest sumą spadku napięcia na amperomierzu U_A oraz na posobniku U_{RP} . Wartość prądu płynącego przez amperomierz dana jest zależnością

$$I = \frac{U}{R_A + R_P} \quad (78)$$

Na podstawie powyższej zależności oraz przytoczonych wcześniej zależności kąta wychylenia wskazówki amperomierza od wartości płynącego przez ten przyrząd prądu można

określić zależność kąta wychylenia wskazówki miernika od napięcia U . Zależność ta dana jest wzorem

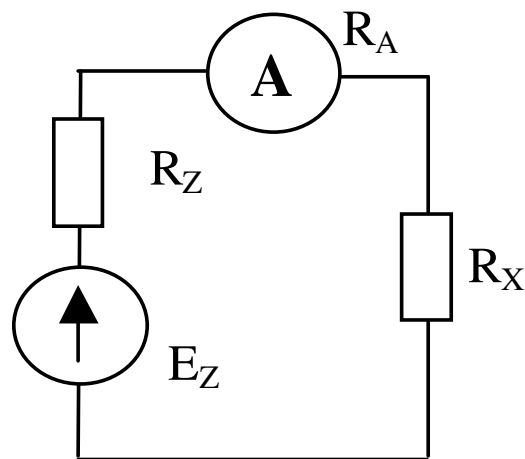
$$\Theta = S_I \cdot \frac{U}{R_A + R_P} = S_U \cdot U \quad (79)$$

gdzie S_U oznacza czułość napięciową woltomierza.

W celu rozszerzenia zakresu napięciowego woltomierza o rezystancji wewnętrznej R_V i zakresie napięciowym U_V należy szeregowo z woltomierzem włączyć rezystor nazywany posobnikiem o rezystancji R_P . Jeżeli zakres napięciowy woltomierza ma być rozszerzony m -krotnie, to rezystancja posobnika wyrażona jest wzorem

$$R_P = R_V \cdot (m - 1) \quad (79a)$$

Na rys.14 przedstawiono schemat omomierza szeregowego. Układ składa się ze źródła napięcia zasilającego o wydajności E_Z i rezystancji wewnętrznej R_Z , mierzonego rezystora R_X oraz amperomierza.



Rys.14. Schemat omomierza szeregowego.

Maksymalna wartość prądu płynącego w układzie pomiarowym opisana jest zależnością

$$I_{\max} = \frac{E_Z}{R_Z + R_A} \quad (80)$$

natomiast w przypadku włączenia w obwód badanego rezystora o rezystancji R_X prąd I_X płynący w układzie opisany jest zależnością

$$I_X = \frac{E_Z}{R_Z + R_A + R_X} \quad (81)$$

Przepływowi prądu I_{\max} odpowiada maksymalne wychylenie wskazówki amperomierza, natomiast wraz ze wzrostem wartości rezystancji R_X wychylenie to, proporcjonalne do wartości prądu płynącego w obwodzie, jest coraz mniejsze. Przekształcając powyższe wzory uzyskuje się następującą zależność kąta wychylenia Θ wskazówki miernika od wartości mierzonej rezystancji R_X .

$$\Theta_X = \frac{I_X}{I_{\max}} \cdot \Theta_{\max} = \frac{R_Z + R_A}{R_Z + R_A + R_X} \cdot \Theta_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{R_X}{R_Z + R_A}} \cdot \Theta_{\max} \quad (82)$$

Jak widać zależność powyższa jest hiperboliczna. Oznacza to, że skala przyrządu też musi być nieliniowa. Maksymalnemu wychyleniu wskazówki odpowiada zerowa wartość rezystancji, środek skali odpowiada rezystancji R_X równej sumie rezystancji wewnętrznej źródła zasilającego oraz amperomierza, natomiast zerowe wychylenie odpowiada nieskończenie dużej wartości rezystancji. Z faktu, że skala przyrządu pomiarowego jest nieliniowa wynika, że dokładność pomiaru rezystancji będzie różna, w zależności od kąta wychylenia wskazówki.

Przekształcając wzór (82) uzyskuje się zależność opisującą wartość rezystancji mierzonej R_X .

$$R_X = \left(\frac{\Theta_{\max}}{\Theta_X} - 1 \right) \cdot (R_Z + R_A) \quad (83)$$

Błąd bezwzględny wyznaczenia wartości rezystancji R_X zależy od dokładności przyrządu pomiarowego oraz od błędu wyznaczenia rezystancji wewnętrznych źródła i miernika

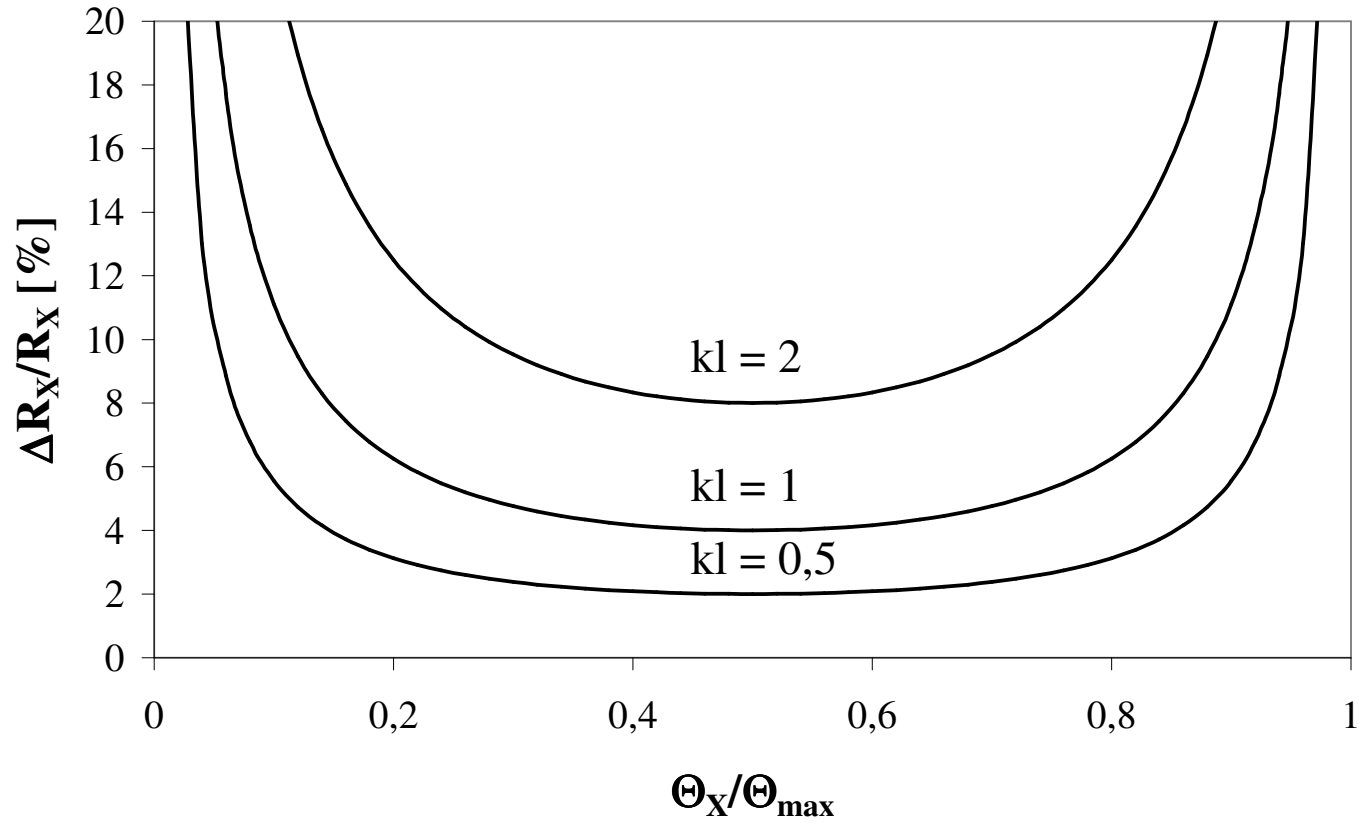
$$\Delta R_X = \frac{\Theta_{\max}}{\Theta_X^2} \cdot (R_Z + R_A) \cdot \Delta \Theta_X + \left(\frac{\Theta_{\max}}{\Theta_X} - 1 \right) \cdot (\Delta R_Z + \Delta R_A) \quad (84)$$

Błąd względny wyznaczenia tej rezystancji opisany jest wzorem

$$\frac{\Delta R_X}{R_X} = \frac{\frac{\Theta_{\max}^2}{\Theta_X^2}}{\frac{\Theta_{\max}}{\Theta_X} - 1} \cdot \frac{\Delta \Theta_X}{\Theta_{\max}} + \frac{\Delta R_Z + \Delta R_A}{R_Z + R_A} = \frac{kl}{\left(1 - \frac{\Theta_X}{\Theta_{\max}} \right) \cdot \frac{\Theta_X}{\Theta_{\max}}} + \frac{\Delta R_Z + \Delta R_A}{R_Z + R_A} \quad (85)$$

Na rys.15 przedstawiono przebieg błędu względnego pomiaru rezystancji omomierzem szeregowym dla różnych wartości klasy miernika.

Jak widać rozważany błąd osiąga minimum przy wychyleniu wskazówki do połowy skali.



Rys.15. Zależność błędu pomiaru rezystancji w zależności od kąta wychylenia wskazówki miernika.

6. Woltomierze napięć przemiennych

Woltomierze elektroniczne umożliwiają pomiar parametrów napięć zmiennych przy wykorzystaniu mierników magnetoelektrycznych. Sygnał przemienny może być scharakteryzowany przez jeden z poniższych parametrów:

1. Wartość chwilowa $u(t)$ – która zależy od momentu wykonywania pomiaru

2. Wartość szczytowa (amplituda) U_m

3. Wartość międzyszczytowa U_{pp}

$$U_{pp} = U_m^+ - U_m^-$$

4. Wartość skuteczna (U_{RMS}) – wartość odpowiadająca wartości napięcia stałego, które w tym samym obwodzie wydziela taką samą moc jak sygnał badany.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{u^2(t)}{R} dt = \frac{u_{RMS}^2}{R} \quad (86)$$

A zatem wartość skuteczną napięcia U_{RMS} definiują następujące wzory

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) \cdot dt} \quad (87)$$

dla przebiegu okresowego oraz

$$U_{RMS} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} u^2(t) \cdot dt} \quad (88)$$

dla przebiegu nieokresowego.

Przykładowo, dla sygnału harmonicznego o postaci

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (89)$$

wartość skuteczna wynosi

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi) \cdot dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (90)$$

5. Wartość średnia \bar{u} definiowana jest wzorem

$$\bar{u} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u(t) \cdot dt \quad (91)$$

dla sygnału nieokresowego

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot dt \quad (92)$$

dla sygnału okresowego.

Przykładowo dla przebiegu harmonicznego, danego wzorem (89), wartość średnia wynosi

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot dt = 0 \quad (93)$$

6. Wartość średnia z modułu $|\bar{u}|$ definiowana jest wzorem

$$|\bar{u}| = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} |u(t)| \cdot dt \quad (94)$$

Przykładowo dla sygnału harmonicznego

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T} \int_0^T (U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)) \cdot dt = \frac{2}{\pi} \cdot U_m \quad (95)$$

Woltomierze napięcia przemiennego charakteryzują następujące parametry:

1. Zakres
2. Przedział częstotliwości mierzonych napięć
3. Dopuszczalny kształt mierzonego przebiegu (najczęściej sinusoidalny)
4. Rodzaj mierzonej wartości napięcia, np. skuteczna, szczytowa, średnia z modułu
5. Błąd pomiaru
6. Impedancja (rezystancja) wejściowa

Z punktu widzenia zacisków wejściowych woltomierz można przedstawić jako równoległe połączenie pojemności C_{we} i rezystancji R_{we} . Admitancja wejściowa układu jest wówczas opisana wzorem

$$Y_{we} = G_{we} + j\omega C_{we} \quad (96)$$

gdzie $G_{we} = 1/R_{we}$ (97)

W przypadku idealnym

$$C_{we} \rightarrow 0 \text{ i } R_{we} \rightarrow \infty \quad (98)$$

Definiuje się dwie rezystancje wejściowe:

chwilową rezystancję wejściową r_{we} - równą ilorazowi wartości chwilowej napięcia i prądu

$$r_{we} = \frac{u_{we}}{i_{we}} \quad (99)$$

oraz **efektywną (skuteczną) rezystancję wejściową** R_{we} definiowaną jako rezystancja o takiej wartości, że przy tym samym napięciu wejściowym wydziela się na niej taka sama moc średnia, jak na rezystancji wejściowej woltomierza.

Poniżej przedstawiono opis wybranych układów woltomierzy prostownikowych.

W metrologii z *prostownikiem* utożsamia się element, na którego wyjściu po podaniu na wejście sygnału przemiennego w czasie (przeważnie bez składowej stałej) pojawia się sygnał zawierający składową stałą (wartość średnia większa od zera). Układy prostowników realizuje się przede wszystkim przy użyciu diod półprzewodnikowych.

Parametrami charakteryzującymi diody prostownicze są m. in. maksymalne napięcie wsteczne, maksymalny prąd przewodzenia, maksymalna wartość prądu wyprostowanego, maksymalna temperatura złącza. Podaje się również pojemność własną diody i częstotliwość graniczną.

Pod względem pomiarowym ważnym parametrem jest także *sprawność prostowania*

$$k_p = \frac{I_F}{I_R} = \frac{r_R}{r_F} \quad (100)$$

przy czym: I_F , r_F oznaczają odpowiednio prąd i rezystancję dynamiczną diody spolaryzowanej w kierunku przewodzenia; I_R , r_R - prąd i rezystancję dynamiczną diody spolaryzowanej w kierunku zaporowym.

Sprawność prostowania dla danej diody nie jest wielkością stałą, zależy ona od doprowadzonego napięcia (nieliniowość charakterystyki prądowo-napięciowej) i temperatury.

Innym czynnikiem ograniczającym możliwość stosowania diod jako prostowników jest ich pojemność własna — ogranicza ona górną wartość częstotliwości sygnału prostowanego.

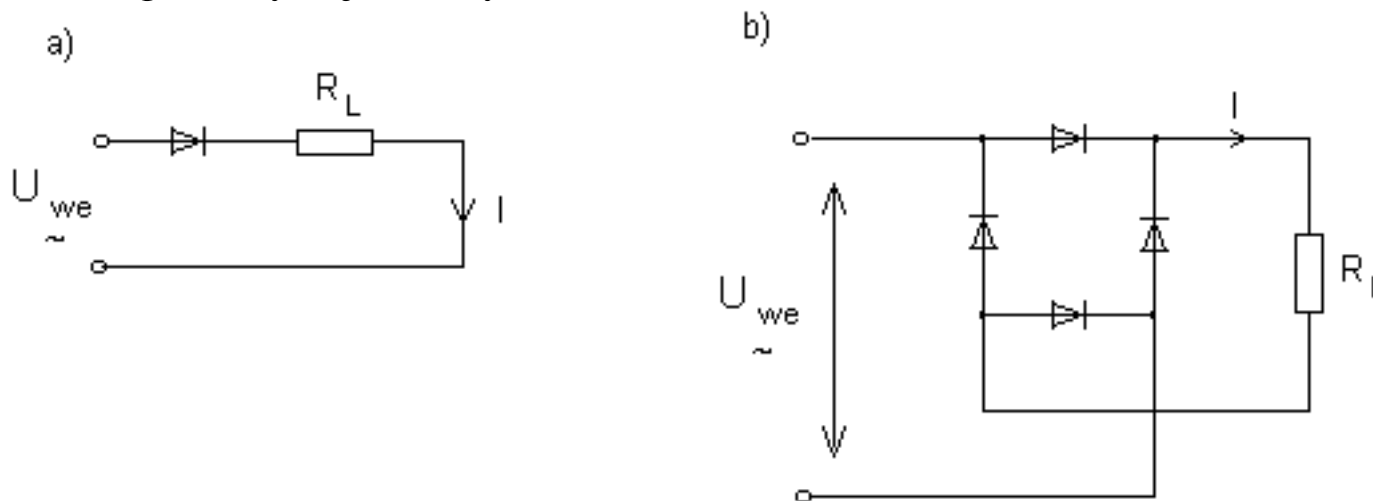
W celu scharakteryzowania napięcia lub prądu przemiennego podaje się ich wartość skuteczną, średnią lub maksymalną (szczytową). Wielkością wyjściową w prostowniku jest składowa stała wyprostowanego prądu (napięcia), równa wartości średniej tego przebiegu. Współczynnik przetwarzania $K = X_{wy}/X_{we}$ i błędy przetwarzania będą różne w zależności od tego, jaką wartość traktuje się jako wielkość wejściową. Z tych powodów prostowniki dzieli się na:

- prostowniki wartości średniej;
- prostowniki wartości skutecznej;
- prostowniki wartości szczytowej (maksymalnej).

Podział ten jest ściśle związany z zasadą działania przetwornika, z właściwościami stosowanych elementów, ich punktem pracy.

Prostowniki wartości średniej

Najprostszym przetwornikiem wartości średniej napięcia (lub prądu) przemienneego jest jednopołówkowy prostownik szeregowy (rys. 16a). Najczęściej korzysta się jednak z prostownika dwupołówkowego w układzie mostka Graetza (rys. 16b). O właściwościach układu prostowniczego decydują diody.



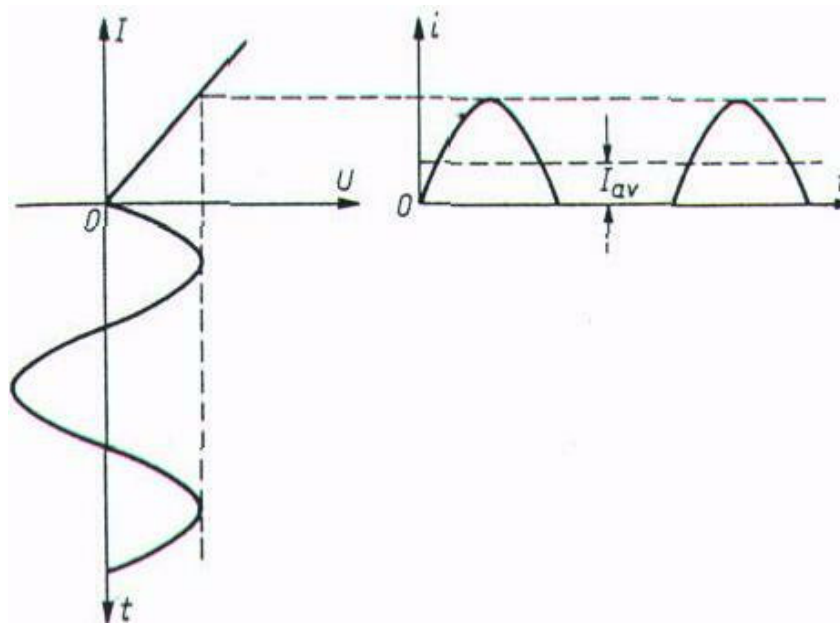
Rys. 16. Schematy prostowników: a) jednopołówkowego; b) dwupołówkowego

Zasada pracy prostownika jednopołówkowego zostanie rozważona na przykładzie przetwornika wartości średniej napięcia. Jeśli dioda ma charakterystykę prądowo-napięciową o przebiegu jak na rys.17, tzn. że w kierunku wstecznym $i = 0$, a w kierunku przewodzenia $i = bu$, to wartość średnia prądu płynącego przez obciążenie (jeśli $u = U_m \sin(\omega t)$) dana jest wzorem.

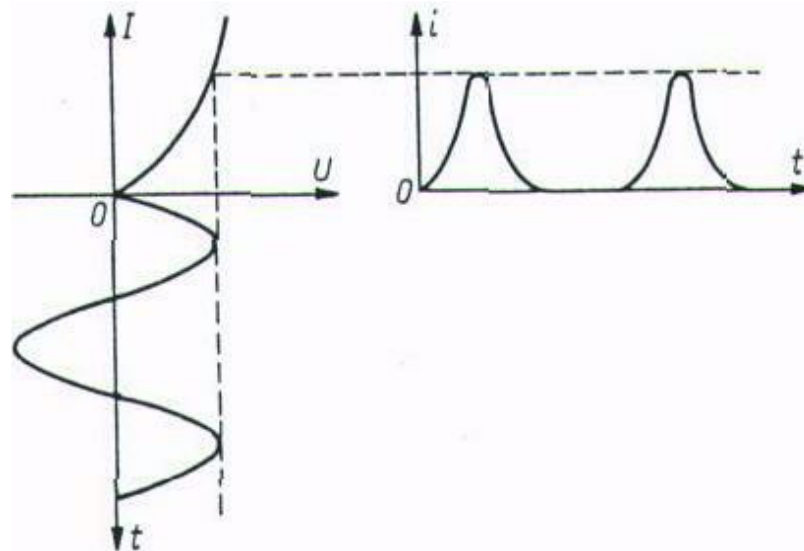
$$I_{av} = \frac{1}{T} \cdot b \int_0^{T/2} u \cdot dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot b \cdot U_m \int_0^{\pi} \sin(\omega \cdot t) \cdot d(\omega \cdot t) = b \frac{U_m}{\pi} = \frac{b}{2} \cdot U_{av} \quad (101)$$

W rzeczywistości charakterystyka diody w kierunku przewodzenia nie jest liniowa (rys.18), można ją w przybliżeniu opisać równaniem

$$i = b_0 + b_1 \cdot u + b_2 \cdot u^2 + b_3 \cdot u^3 + \dots \quad (102)$$



Rys. 18. Przebiegi w idealnym prostowniku liniowym



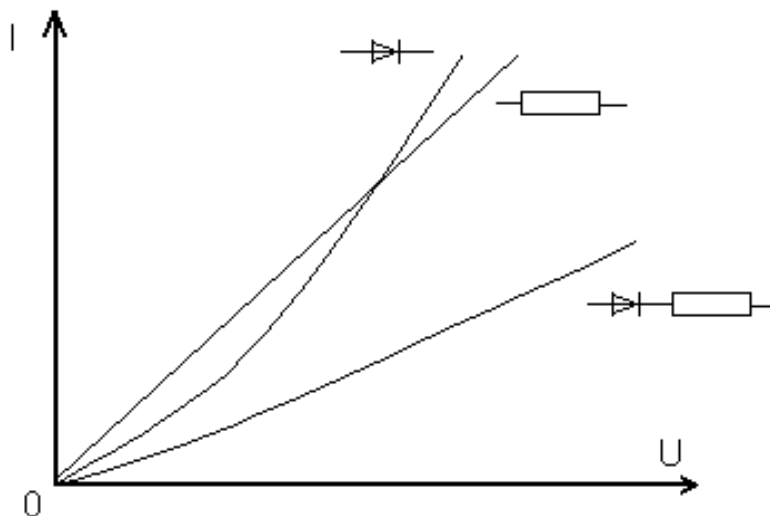
Rys. 19. Przebiegi w rzeczywistym prostowniku

Jeśli charakterystyka diody przechodzi przez początek układu współrzędnych, to ($i = 0$ dla $u = 0$), a wartość średnia prądu płynącego przez obciążenie (dla takiego samego wymuszenia jak poprzednio) dana jest wzorem

$$I_{av} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{T/2} i \cdot dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left[b_1 \cdot \int_0^{\pi} u \cdot d(\omega \cdot t) + b_2 \cdot \int_0^{\pi} u^2 \cdot d(\omega \cdot t) + \dots \right] = \frac{b_1}{2} \cdot U_{av} + \frac{b_2}{2} \cdot U_{RMS} + \dots \quad (103)$$

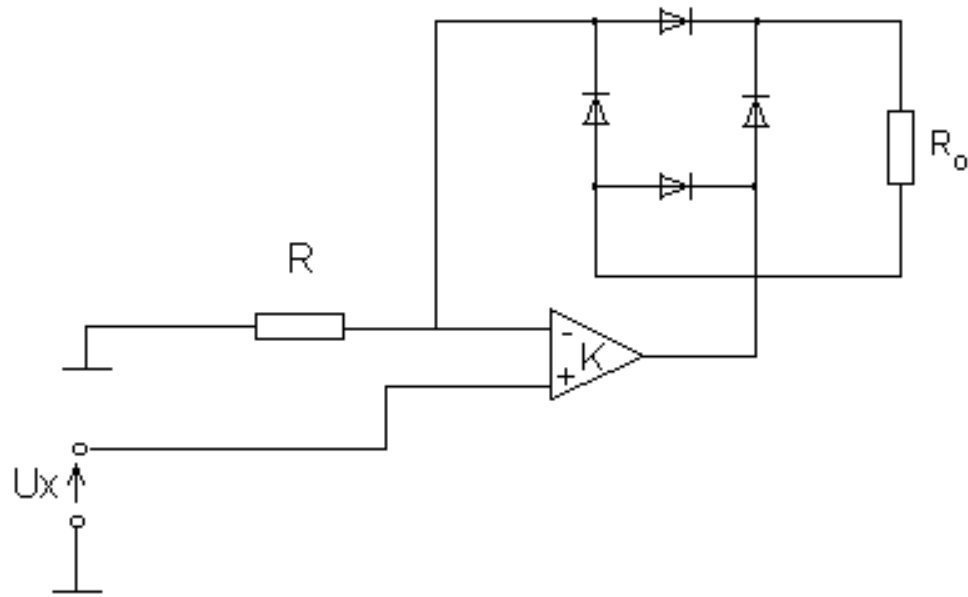
Wartość średnia prądu wyprostowanego jest więc proporcjonalna do wartości średniej mierzonego napięcia (lub prądu) tylko wtedy, gdy charakterystyka elementu prostowniczego jest liniowa. Oczywiście, żadna dioda nie ma takiej charakterystyki. Znaczną poprawę liniowości charakterystyki przetwarzania uzyskać można włączając w szereg z diodą rezystor

liniowy (rys.20). Rezystor powoduje jednak zmniejszenie wartości prądu w obciążeniu przy takim samym napięciu.



Rys. 20. Linearyzacja charakterystyki przetwarzania prostowników za pomocą rezystora

Innym sposobem linearyzacji charakterystyki przetwarzania jest stosowanie układów ze wzmacniaczami operacyjnymi (rys.21). Przedstawiony układ jest przetwornikiem napięcia na prąd. Dzięki prostownikowi dwupołówkowemu włączonemu w pętlę sprzężenia zwrotnego (a jednocześnie w obwód obciążenia), wartość chwilowa prądu obciążenia $i = U_x/R$. Wobec tego i wartość średnia prądu płynącego przez obciążenie jest funkcją liniową napięcia wejściowego. Układ prostowniczy ma liniową charakterystykę przetwarzania, niezależnie od charakterystyk diod.



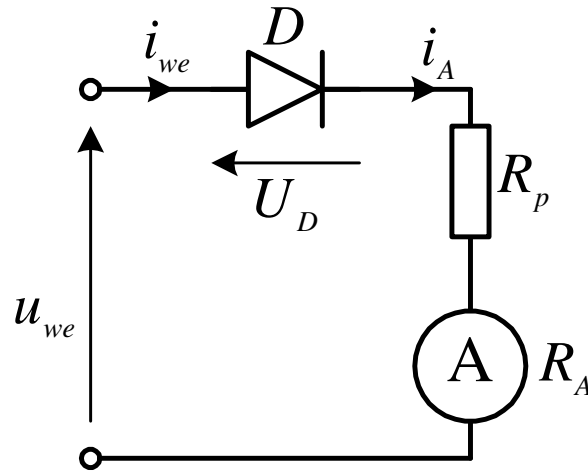
Rys. 21. Liniowy prostownik ze wzmacniaczem operacyjnym

1. Woltomierz prostownikowy jednopółówkowy umożliwia pomiar wartości średniej z modułu badanego napięcia. Schemat tego układu przedstawiono na rys.22.

W dalszych rozważaniach przyjęto, że dioda D jest diodą idealną, tzn., że jej charakterystyka statyczna opisana jest wzorem

$$i_D = \begin{cases} 0 & \text{dla } u_D \leq 0 \\ \infty & \text{dla } u_D > 0 \end{cases} \quad (104)$$

oraz oznaczono $R = R_p + R_A$



Rys.22. Układ woltomierza prostownikowego jednopółwukowego.

Prąd amperomierza opisany jest wzorem

$$i_A = \frac{U_R}{R_p + R_A} \quad (105)$$

przy czym zachodzi równość

$$i_{we} = i_D = i_A \quad (106)$$

$$u_{we} = u_D + u_R = f(i_D) + i_{we} R \quad (107)$$

gdzie $f(i_D)$ opisuje charakterystykę diody, daną wzorem (100).

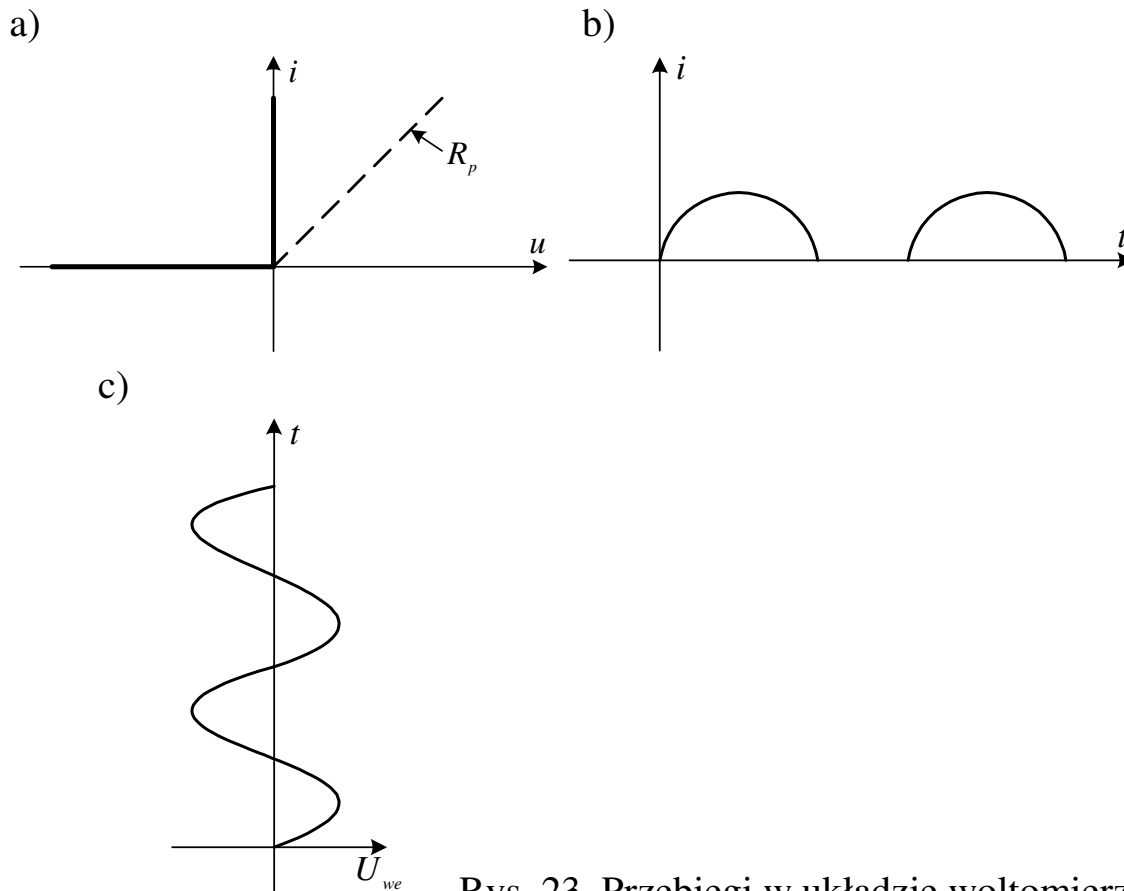
A zatem dla $u_{we} \leq 0$

$$u_{we} = U_R + U_D^{r_d \rightarrow \infty} = U_D \quad (108)$$

natomiast dla $u_{we} \geq 0$

$$u_{we} = U_R + U_D \stackrel{r_d=0}{=} U_R \quad (109)$$

A zatem prąd płynie w układzie tylko przez połowę okresu. Graficznie działanie rozważanego układu zilustrowano na rys.23. Sinusoidalny przebieg napięcia wejściowego powoduje przepływ prądu tylko w przypadku, gdy rezystancja dynamiczna diody jest skończona, tzn. dla napięć wejściowych $U_{we} > 0$.



Rys. 23. Przebiegi w układzie woltomierza prostownikowego jednopółwkowego.

Zgodnie z zasadą działania miernika magnetoelektrycznego, kąt wychylenia wskazówki jest proporcjonalny do wartości średniej prądu i_{we}

$$\bar{i}_{we} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i_{we} \cdot dt \quad (110)$$

Zakładając, że mierzone napięcie ma przebieg sinusoidalny, otrzymuje się następującą zależność opisującą wartość średnią prądu

$$\bar{i}_{we} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m}{R_A + R_d} \cdot \sin(\omega t) \cdot dt = \frac{U_m}{T \cdot (R_p + R_A)} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) \cdot dt = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{U_m}{(R_p + R_A)} \quad (111)$$

Z kolei, chwilowa rezystancja wejściowa opisana jest wzorem

$$r_{we} = \frac{U_{we}}{i_{we}} = \begin{cases} R & \text{dla } nT < t < (2n+1)\frac{T}{2} \\ \infty & \text{dla } (2n+1)\frac{T}{2} < t < (n+1)T \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots \quad (112)$$

W celu wyznaczenia rezystancji efektywnej R_{we} należy wyznaczyć wartość średnią mocy wydzielanej na rezystancji wejściowej oraz na R_{we}

$$p = u_{we} \cdot i_{we} \quad (113)$$

Wartość średnia mocy wydzielanej w rozważanym woltomierzu opisana jest zależnością

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T u_{we} \cdot i_{we} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u_{we} \cdot \frac{u_{we}}{R} \cdot dt \quad (114)$$

Dla sinusoidalnego napięcia wejściowego, moc ta wynosi

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} u_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{u_m}{R} \cdot \sin(\omega t) \cdot dt = \frac{u_m^2}{R \cdot T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2(\omega t) \cdot dt = \\ &= \frac{u_m^2}{R \cdot T} \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4 \cdot \omega} \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{u_m^2}{4 \cdot R} \end{aligned} \quad (115)$$

Z kolei moc wydzielana na rezystancji R_{we} opisana jest wzorem

$$\bar{p}_{R_{we}} = \frac{1}{T} \int_0^T u_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{u_m \cdot \sin(\omega t)}{R_{we}} \cdot dt = \frac{u_m^2}{T \cdot R_{we}} \int_0^T \sin^2(\omega t) \cdot dt = \frac{u_m^2}{2 \cdot R_{we}} \quad (116)$$

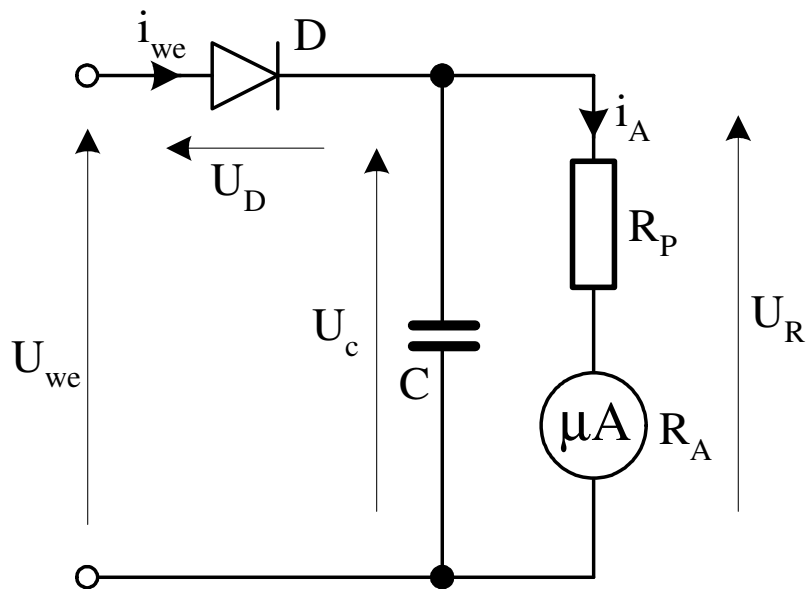
Z przyrównania wzorów (115) i (116) otrzymuje się

$$\frac{u_m^2}{4 \cdot R} = \frac{u_m^2}{2 \cdot R_{we}} \quad (117)$$

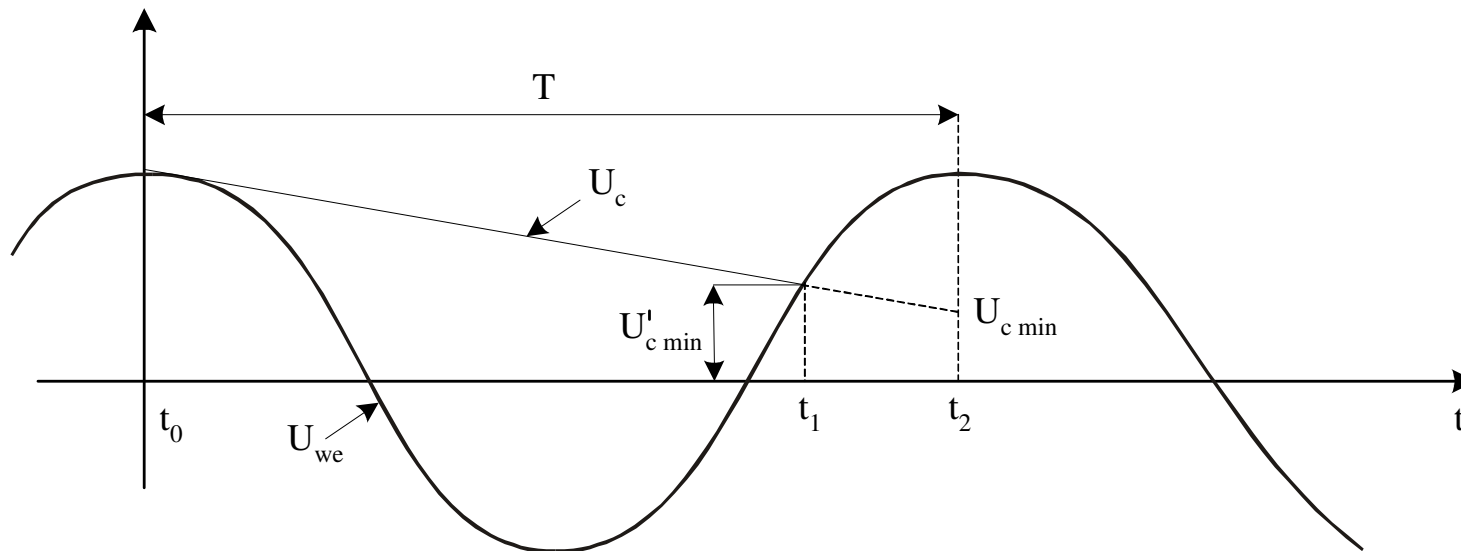
Stąd rezystancja ekwiwalentna dana jest wzorem

$$R_{we} = 2R = 2(R_p + R_A) \quad (118)$$

2. Woltomierz prostownikowy szeregowy szczytowy przedstawiono na rys.24, natomiast przebiegi wybranych napięć w tym układzie w stanie ustalonym pokazano na rys.25.



Rys.24. Układ woltomierza prostownikowego szeregowego szczytowego



Rys.25. Przebiegi napięć w woltomierzu prostownikowym szeregowym szczytowym

W czasie pracy układu naprzemiennie występują cykle ładowania i rozładowania pojemności. W czasie ładowania pojemności C spełnione są równania

$$i_{we} = i_{Clad} + i_A \quad (119)$$

$$u_C = u_{we} \quad (120)$$

natomiast w czasie rozładowania pojemności C – równania

$$i_{Crozl} = i_A \quad (121)$$

$$u_C = u_{we} + u_D \quad (122)$$

Przyjmując, że na wejściu układu występuje sygnał harmoniczny, przebiegi napięcia w układzie mają kształt przedstawiony na rys.25, gdzie przedziałowi czasu (t_0, t_1) odpowiada rozładowanie pojemności C, natomiast przedziałowi (t_1, t_2) - ładowanie pojemności C.

Ponieważ rozładowanie pojemności następuje przez rezystor $R = R_P + R_A$, napięcie na pojemności po czasie t_1 wynosi

$$u'_{C\min} = U_m \exp\left(-\frac{t_1 - t_0}{RC}\right) \quad (123)$$

Z kolei po czasie T napięcie to byłoby równe

$$u_{C\min} = U_m \exp\left(-\frac{T}{RC}\right) \quad (124)$$

Jeżeli czas ładowania jest znacznie krótszy od czasu rozładowania, tzn., gdy $t_2 - t_1 \ll t_1 - t_0$, to uzasadnione jest przyjęcie uproszczenia $u_{C\min} \cong U'_{C\min}$. Wówczas

$$\frac{u'_{C\min}}{U_m} = \exp\left(-\frac{T}{RC}\right) \quad (125)$$

W zależności od wartości ilorazu $RC/T=n$, relacja między napięciem $U'_{C\min}$ a U_m przyjmuje różne wartości, co zilustrowano w tabeli 4.

n	9,49	19,5	99,5	999,5
$\frac{u'_{C\min}}{U_m} = \exp\left(-\frac{T}{RC}\right)$	0,9	0,95	0,99	0,999
$\frac{RC}{T} \left[1 - \exp\left(-\frac{T}{RC}\right)\right]$	0,949	0,975	0,995	0,999

Prąd płynący przez miernik wynosi

$$i_A = \frac{u_C}{R} \quad (126)$$

natomiast napięcie na kondensatorze

$$u_C = U_m \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (127)$$

Wówczas wskazanie miernika jest proporcjonalne do wartości średniej prądu, danej wzorem

$$\alpha \sim \bar{i}_A = \frac{1}{T} \int_0^T i_A \cdot dt \cong \frac{u_m}{R \cdot T} \int_0^T \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right) \cdot dt = \frac{u_m}{R} \cdot \frac{R \cdot C}{T} \left[1 - \exp\left(-\frac{T}{R \cdot C}\right)\right] \quad (128)$$

dla $RC/T \gg 1$ wyrażenie w nawiasie dąży do 1 (tabela 4) i wówczas

$$\bar{i}_A = \frac{U_m}{R} \quad (129)$$

A zatem wskazania woltomierza są proporcjonalne do amplitudy mierzonego napięcia.

W celu obliczenia ekwiwalentnej rezystancji wejściowej należy wyznaczyć średnią moc wydzielaną w rozważanym układzie. Dana jest ona wzorem

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u_C^2}{R} dt = \frac{u_m^2}{R \cdot T} \int_0^T \exp\left(-\frac{2 \cdot t}{R \cdot C}\right) dt = \frac{u_m^2}{R} \cdot \frac{R \cdot C}{T} \left[1 - \exp\left(-\frac{2 \cdot T}{R \cdot C}\right)\right] \approx \frac{u_m^2}{R} \quad (130)$$

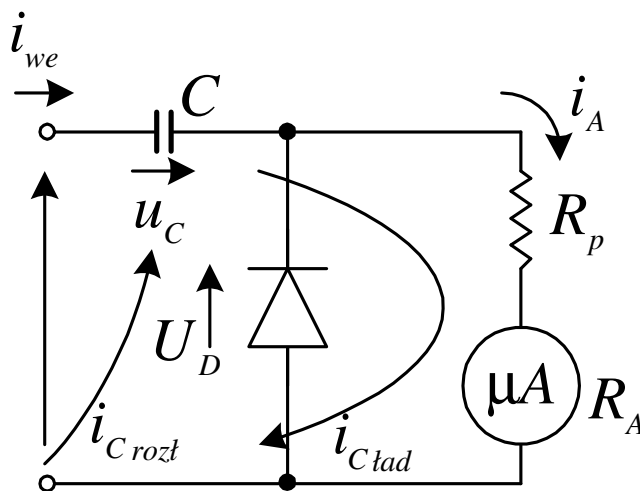
Podobnie jak w przypadku woltomierza prostownikowego jednopółwkowego, przyrównuje się moce średnie wydzielane w woltomierzu i na rezystancji R_{we} (wzór (116))

$$\frac{u_m^2}{R} \cong \frac{u_m^2}{2 \cdot R_{we}} \quad (131)$$

Stąd rezystancja ekwiwalentna dana jest wzorem

$$R_{we} = \frac{R}{2} = \frac{R_p + R_A}{2} \quad (132)$$

3. Woltomierz prostownikowy równoległy szczytowy przedstawiono na rys.26. Jak widać, w porównaniu z układem woltomierza prostownikowego szeregowego szczytowego dioda i kondensator zostały zamienione miejscami.



Rys.26. Układ woltomierza prostownikowego równoległego szczytowego.

Układ pracuje w dwóch cyklach: ładowania i rozładowania pojemności. W czasie ładowania pojemności spełnione są zależności:

$$i_{we} = i_{C_{lad}} \quad (133)$$

$$i_A = 0 \quad (134)$$

$$u_C = -u_{we} \quad (135)$$

natomiast w czasie rozładowania pojemności - zależności

$$i_{we} = i_{C_{lad}} = i_A \quad (136)$$

$$u_R = u_D = U_{we} + u_C \quad (137)$$

Wskazanie amperomierza jest proporcjonalne do wartości średniej płynącego przez niego prądu. A zatem

$$\begin{aligned} \alpha \sim \bar{i}_A &= \frac{1}{T} \int_0^T i_A \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{R} \int_0^T u_D \cdot dt = \frac{u_m}{R} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \left[\cos(\omega \cdot t + \pi) + \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right) \right] dt = \\ &= \frac{U_m}{R} \cdot \frac{R \cdot C}{T} \left[1 - \exp\left(-\frac{T}{R \cdot C}\right) \right] \end{aligned} \quad (138)$$

Ponieważ, jak wynika z tabeli 3, drugi czynnik dąży do 1 dla $RC/T \gg 1$, więc

$$\bar{i}_A = \frac{U_m}{R} \quad (139)$$

Oznacza to, że wskazanie rozważanego woltomierza dla dostatecznie dużej częstotliwości sygnału mierzonego jest proporcjonalne do amplitudy tego sygnału.

W celu wyznaczenia rezystancji ekwiwalentnej przyrządu należy obliczyć wartość średnią mocy w nim wydzielanej ze wzoru

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m^2}{R} \cdot dt \cong \frac{U_m^2}{T \cdot R} \int_0^T (1 + \cos(\omega t))^2 \cdot dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{U_m^2}{R} \quad (140)$$

Z przyrównania mocy wydzielanej w przyrządzie i na rezystancji R_{we}

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{U_m^2}{R} = \frac{U_m^2}{2 \cdot R_{we}} \quad (141)$$

otrzymuje się zależność opisującą R_{we} o postaci

$$R_{we} = \frac{R_p + R_A}{3} \quad (142)$$

Woltomierz równoległy szczytowy umożliwia pomiar napięć zmiennych ze składową stałą. Jej wpływ jest eliminowany, co ilustruje następująca analiza.

Przyjmijmy, że na wejście woltomierza podano sygnał harmoniczny ze składową stałą, opisany zależnością

$$u_{we} = u_{DC} - U_m \cdot \cos(\omega t) \quad (143)$$

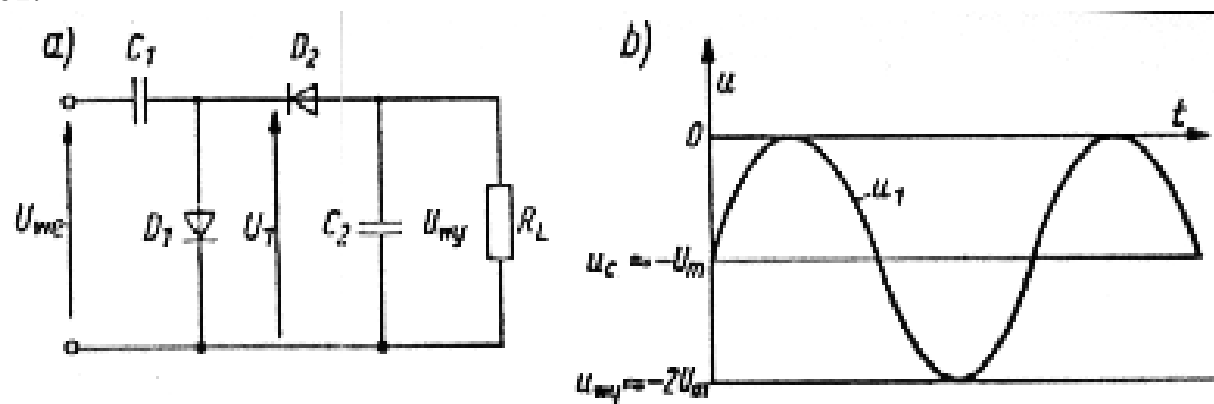
Wówczas wychylenie wskazówki amperomierza proporcjonalne jest do wartości średniej prądu, danej wzorem

$$\begin{aligned} \alpha \sim \bar{i}_A &= \frac{1}{T} \int_0^T i_A \cdot dt = \frac{1}{R \cdot T} \int_0^T \left[u_{DC} - U_m \cdot \cos(\omega t) + (U_m + u_{DC}) \cdot \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right) \right] \cdot dt = \\ &= \frac{u_{DC}}{R} \left\{ 1 - \frac{R \cdot C}{T} \left[1 - \exp\left(-\frac{T}{R \cdot C}\right) \right] \right\} + \frac{U_m}{R} \cdot \frac{R \cdot C}{T} \left[1 - \exp\left(-\frac{T}{R \cdot C}\right) \right] = \frac{U_m}{R} \end{aligned} \quad (144)$$

Jak widać, wskazanie amperomierza jest proporcjonalne do amplitudy, a składowa stała nie ma wpływu na wynik pomiaru.

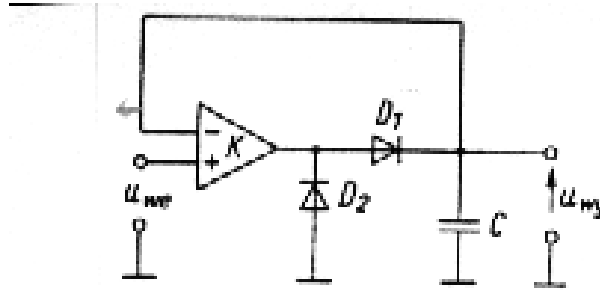
W układzie prostownika równoległego rezystancja wejściowa jest mniejsza niż w układzie prostownika szeregowego, mimo to jest on częściej stosowany, gdyż w przeciwieństwie do prostowników szeregowych umożliwia eliminację składowej stałej z mierzonego przebiegu napięcia. Do pomiaru napięć niesymetrycznych stosuje się układy prostowania

międzyszczytowego (rys.27a). Prostownik taki jest połączeniem kaskadowym dwóch prostowników: równoległego (szczytu dodatniego) i szeregowego (szczytu ujemnego). Jeśli napięcie prostowane jest sinusoidalne, to przebieg napięcia na diodzie D_1 jest taki jak u_1 na rys.27b. Podczas trwania półfali ujemnej sygnału wejściowego wartość szczytowa tego napięcia jest równa podwójnej amplitudzie $2U_m$. Wobec tego kondensator będzie ładował się też do takiej wartości.



Rys.27. Wyjaśnienie zasady działania prostownika wartości międzyszczytowej.

Układy prostowników szczytowych biernych mają wiele wad: współczynnik przetwarzania ($K_p = U_{av} / U_m$) nie przekracza jedności (mała czułość), a charakterystyka przetwarzania nie jest liniowa. Wady te można wyeliminować stosując układy prostowników ze wzmacniaczami, ogranicza się jednak wówczas górny zakres częstotliwościowy. Linearyzację charakterystyki przetwarzania najłatwiej zrealizować przez umieszczenie prostownika w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego wzmacniacza operacyjnego (rys. 28).

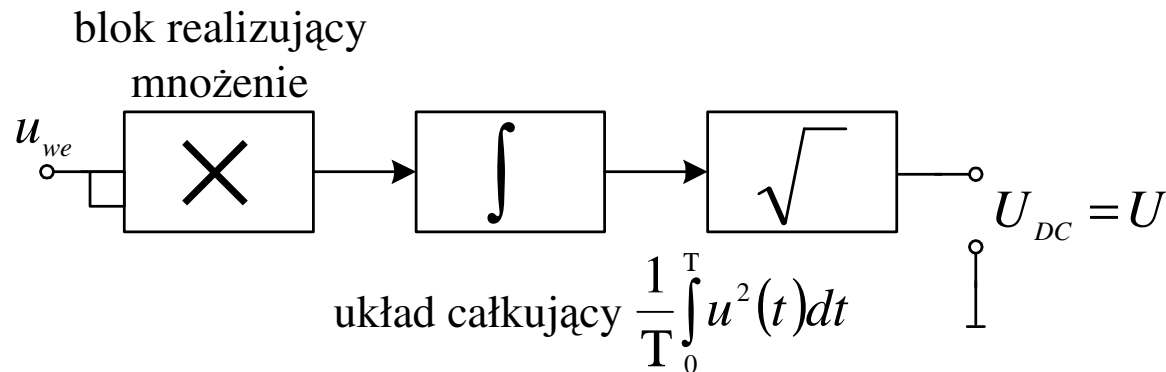


Rys. 28. Schemat prostownika szczytowego ze wzmacniaczem operacyjnym.

Wzmocnienie układu wynosi jeden. Wzmacniacz pobiera ze źródła badanego napięcia tylko prąd polaryzacyjny. Czas narastania napięcia na wyjściu wzmacniacza w zasadzie zależy tylko od możliwości prądowych jego wyjścia, a nie zależy od stałej czasowej $\tau = r_F C$. Dioda D_2 zabezpiecza wzmacniacz przed przeciążeniem, gdy napięcie na jego wyjściu osiąga ujemny stan nasycenia oraz ogranicza napięcie wsteczne diody D_1 . Błąd przetwarzania można zmniejszyć przez zastosowanie wzmacniacza z tranzystorami unipolarnymi na wejściu.

Prostowniki wartości skutecznej

Realizacja pomiarów wartości skutecznej napięcia jest możliwa w układzie o schemacie blokowym, pokazanym na rys. 29, realizującym wzór definicyjny (87).



Rys.29. Schemat blokowy woltomierza wartości skutecznej.

Przy realizacji konieczne jest wykonanie bloku, który zrealizuje funkcję kwadratową (np. tranzystora polowego, pracującego w zakresie nasycenia), układu całkującego oraz układu pierwiastkującego.

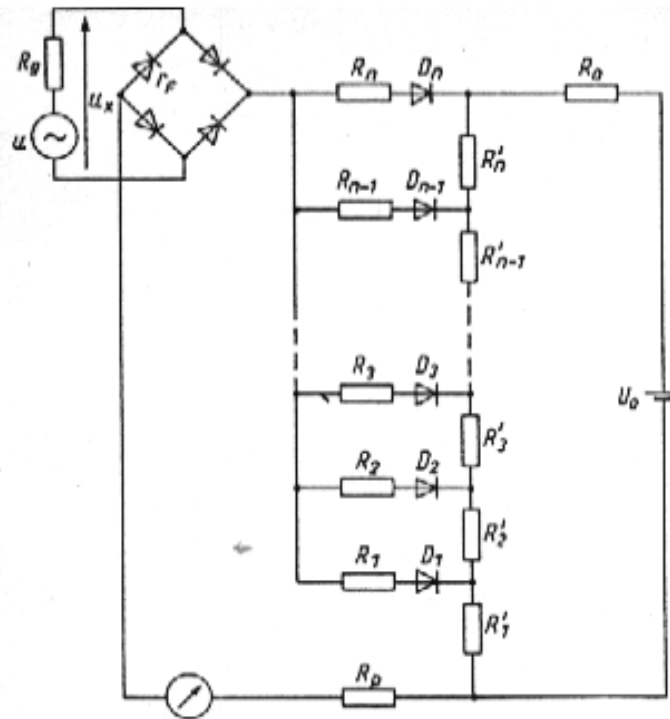
Detekcja wartości skutecznej jest w zasadzie możliwa tylko przy użyciu elementów prostowniczych o parabolicznych charakterystykach prądowo-napięciowych

$$i = a \cdot u^2 \quad (145)$$

Wówczas wartość średnia prądu w obciążeniu dana jest wzorem

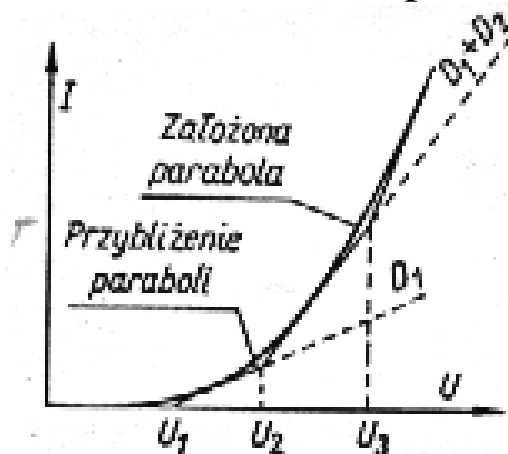
$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = a \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = aU^2 \quad (146)$$

Aby zrealizować taką charakterystykę przetwarzania, wykorzystuje się początkową część charakterystyki diody półprzewodnikowej, którą można aproksymować przebiegiem parabolicznym. Inny sposób, to aproksymowanie żądanej charakterystyki parabolicznej odcinkami. W tym celu buduje się odpowiednie układy diodowo-rezystancyjne, np. podany na rys.30.



Rys. 30. Schemat przetwornika prostownikowego wartości skutecznej.

Źródło napięcia U_0 wraz z rezystorem o dużej rezystancji R_0 tworzą źródło prądowe. Rezystancje rezystorów R_n i R'_n są tak dobrane, że praktycznie cały prąd ze źródła płynie przez rezystory R'_n . Powstałe na nich spadki napięcia U_n są stałe i niezależne od prądów płynących przez diody, gdyż prąd ze źródła U_0 jest znacznie większy od prądów diod. Duże wartości rezystancji rezystorów R_n zapewniają spełnienie powyższych warunków oraz linearyzują charakterystyki diod, z których jest składana charakterystyka przetwornika. Duże wartości rezystancji R_n powodują ponadto uniezależnienie charakterystyki przetwornika od rezystancji wewnętrznej źródła mierzonego napięcia R_g oraz rezystancji dynamicznych w kierunku przewodzenia r_F diod włączonych w układzie mostka prostowniczego.



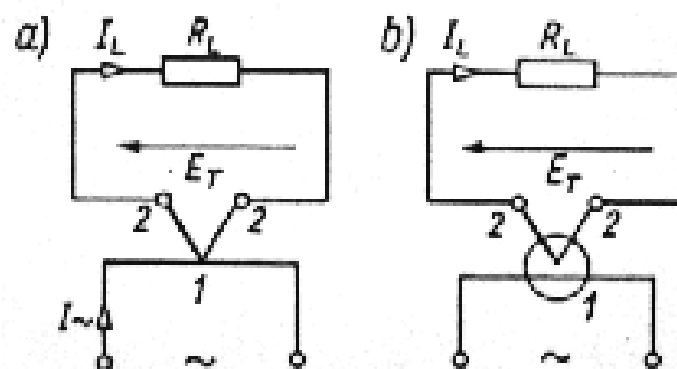
Rys.31. Zasada kształtowania parabolicznej charakterystyki przetwarzania

Zasada działania układu jest następująca. Wzrostowi wartości chwilowej napięcia mierzonego towarzyszy wzrost napięcia wyprostowanego U . Dopóki jego wartość nie przekroczy U_1 (rys.31), dopóty przez przyrząd nie płynie prąd. Gdy wartość ta zostanie

przekroczona przewodzi dioda D_1 . Prąd miernika jest wówczas określony charakterystyką wypadkową diody D_1 i rezystora R_1 . Napięcie mierzone wzrasta dalej, w związku z czym napięcie wyprostowane przekracza kolejne napięcia progowe U_2, U_3, \dots, U_n . Prąd płynący przez miernik jest więc określony charakterystyką wypadkową przewodzących diod. Otrzymana charakterystyka układu, dzięki doborowi elementów R_n i R'_n oraz napięcia U_0 , jest zbliżona do paraboli. Przybliżenia jest tym lepsze, im więcej jest użytych układów aproksymujących R_n, R'_n, D_n (w praktyce stosuje się od 4 do 8 takich układów).

Przetworniki termoelektryczne wartości skutecznej.

Jako przetworniki wartości skutecznej współpracujące z miernikiem sygnałów stałoprądowych stosuje się przetworniki termoelektryczne. Przetwornik taki składa się z grzejnika i termoogniwa (termoelementu). Grzejnik może być budowany oddzielnie albo łącznie z termogniwem. Wykonanie pierwsze umożliwia dobranie każdego z elementów oddzielnie. Grzejnik dobiera się ze względu na możliwość dużego wydzielenia ciepła, małą intensywność zjawiska naskórkowości, małe pojemności rozproszone. Termoogniwo natomiast ze względu na wartość powstającego napięcia termoelektrycznego. Wykonanie drugie jest stosowane dla mniejszych prądów. Grzejnik może być nieizolowany od termoogniwa lub izolowany (rys.32).



Rys. 32. Schematy przetworników termoelektrycznych : a) z grzejnikiem nieizolowanym ; b) z grzejnikiem izolowanym.

Przetworniki termoelektryczne do pomiaru małych prądów (mniejszych od 1 A) wykonuje się jako próżniowe (pogorszenie chłodzenia pozwala uzyskać podwyższenie temperatury grzejnika). Grzejniki wykonuje się z materiałów o dużej rezystywności (duża rezystancja i duża moc wydzielana przy małych wymiarach) odpornych na wysokie temperatury. Metalami spełniającymi te wymagania są najczęściej: konstantan, chromonikielina, wolfram, platyna, platynorod.

Termoogniwo składa się z dwóch termoelektrod, wykonanych z różnych metali dobranych tak, aby napięcie powstałe przy różnicy temperatur między końcami złączonymi (punkt 1 na rys.32) i wolnymi (punkt 2) była jak największa. Do budowy przetworników pomiarowych najczęściej są używane następujące termoogniwa: konstantan-chromel, konstantan-żelazo, platyna-platynorod.

Prąd mierzony przepływając przez grzejnik ogrzewa go (powodując zmianę temperatury grzejnika). Podwyższa się więc również temperatura spoiny termoogniwa z wartości T_0

(temperatura otoczenia) do temperatury T_1 odpowiednio wyższej. Przyrost temperatury grzejnika ($\Delta T = T_1 - T_0$) jest proporcjonalny do mocy wydzielonej na grzejniku, a tym samym do kwadratu wartości skutecznej przepływającego prądu.

$$\Delta T = k I_{sk}^2 \quad (147)$$

Pod wpływem różnicy temperatury między złączonymi i wolnymi końcami termoelementu, powstaje między końcami wolnymi napięcie termoelektryczne, którego wartość można wyznaczyć według wzoru

$$E_T = a(T_1 - T_0) + b(T_1^2 + T_0^2) + \dots \quad (148)$$

gdzie: a i b – współczynniki stałe, zależne od materiału termoelektrod. Jeśli różnica temperatur ΔT jest niezbyt duża, czyli $a \gg b$, to

$$E_T \approx a(T_1 - T_0) = a \cdot k \cdot I^2 \quad (149)$$

W układach rzeczywistych, zawierających grzejniki w postaci odcinków prostych przewodów z termoelementami umocowanymi w ich środku, występują znaczne odchylenia od podanej wyżej zależności. Różnice te wynikają zarówno ze strat cieplnych grzejników, jak i zależności rezystancji grzejników od temperatury. Dlatego w ogólnym przypadku należy mówić o zależności

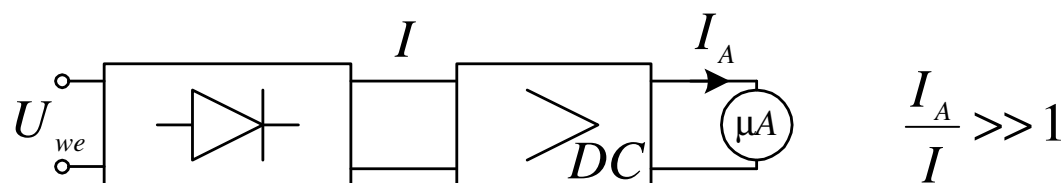
$$E_T = f_1(I^2) \quad (150)$$

Pod wpływem napięcia termoelektrycznego w obciążeniu, którym może być miernik magnetoelektryczny, włączonym od zacisków wolnych termoelementu, popłynie prąd stały

$$I_L = \frac{E_T}{R} = f_2(I^2) \quad (151)$$

gdzie R – rezystancja termooigniwa i miernika magnetoelektrycznego.

W celu zwiększenia czułości pomiaru i zwiększenia rezystancji wejściowej przyrządu pomiarowego, przed układem woltomierza stosuje się wzmacniacz (rys.33), a przy pomiarach napięcia o wysokiej częstotliwości stosuje się specjalne sondy pomiarowe.



Rys. 33. Schemat blokowy woltomierza napięcia przemiennego ze wzmacniaczem.

Przyrządy pomiarowe są typowo wyskalowane w wartościach skutecznych dla przebiegu sinusoidalnego, a mierzą napięcie średnie z modułu lub szczytowe. W przypadku pomiaru sygnału o innym kształcie niż sinusoidalny wskazanie byłoby błędne. Dlatego definiuje się współczynniki korekcyjne, nazywane współczynnikami szczytu i współczynnikami kształtu.

Współczynnik szczytu zdefiniowany jest wzorem

$$k_s = \frac{u_m}{U_{RMS}} \quad (152)$$

natomiast współczynnik kształtu zdefiniowany jest wzorem

$$k_k = \frac{U_{RMS}}{|\overline{U}|} \quad (153)$$

Przykład 5

Wyznaczyć wartość współczynnika szczytu i współczynnika kształtu dla sygnału w postaci fali prostokątnej i dla sygnału sinusoidalnego.

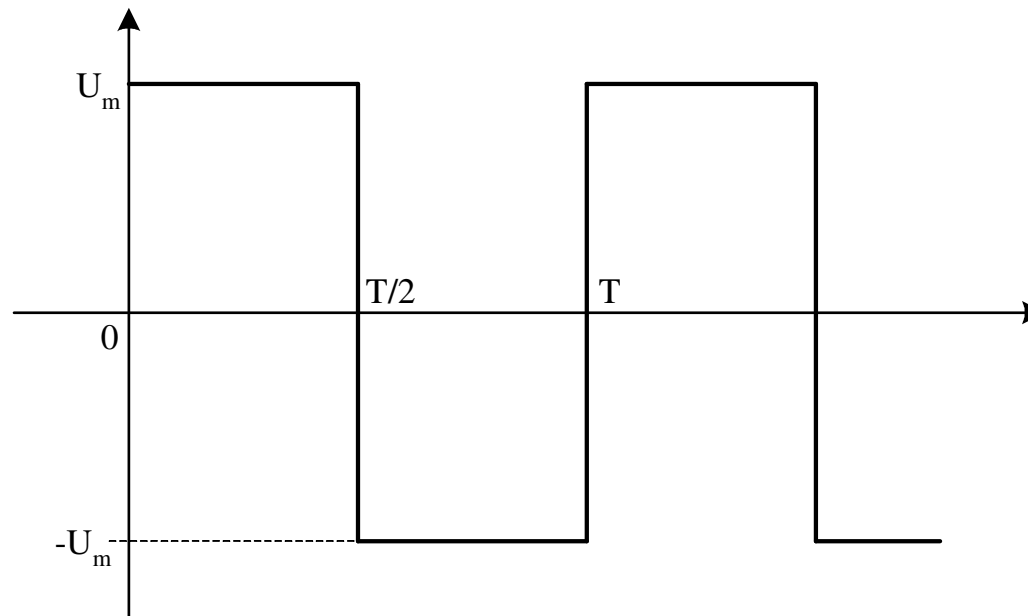
Zgodnie z definicją daną wzorem (152), w celu wyznaczenia wartości współczynnika szczytu należy wyznaczyć wartość skuteczną oraz maksymalną dla rozważanych przebiegów.

Dla przebiegu prostokątnego, przedstawionego na rys.34, wartość maksymalna wynosi U_m , natomiast wartość skuteczna dana jest wzorem

$$u_{RMSp} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot 2 \cdot \int_0^{T/2} U_m^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \cdot U_m^2 \cdot \frac{T}{2}} = U_m \quad (154)$$

A zatem współczynnik szczytu dla przebiegu prostokątnego wynosi

$$k_{sp} = \frac{U_m}{U_m} = 1 \quad (155)$$



Rys. 34. Rozważany przebieg prostokątny.

Z kolei, dla przebiegu sinusoidalnego wartość skuteczna opisana jest wzorem

$$u_{RMS\sim} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot 2 \int_0^{T/2} U_m^2 \cdot \sin^2(\omega t) \cdot dt} = U_m \cdot \sqrt{\frac{2}{T} \cdot \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4 \cdot \omega} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \right]_0^{T/2}} = U_m \cdot \sqrt{\frac{2}{T} \cdot \frac{T}{4}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (156)$$

Stąd współczynnik szczytu wynosi

$$k_{s\sim} = \frac{U_m}{U_m / \sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (157)$$

Jak wynika z wzoru (153), do obliczenia wartości współczynnika kształtu potrzebne są wartości: średnia z modułu i skuteczna. Wartość skuteczna obliczono przy wyznaczaniu

współczynnika szczytu, natomiast wartość średnia z modułu dla przebiegu prostokątnego wynosi

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U_m \cdot dt = U_m \quad (158)$$

Stąd współczynnik kształtu tego przebiegu wynosi

$$k_{kp} = \frac{U_m}{U_m} = 1 \quad (159)$$

Z kolei, dla przebiegu harmonicznego wartość średnia z modułu wynosi

$$\begin{aligned} |\bar{u}|_{\sim} &= \frac{1}{T} \cdot U_m \cdot \int_0^T |\sin(\omega t)| \cdot dt = \frac{2 \cdot U_m}{T} \cdot \int_0^{T/2} \sin(\omega t) \cdot dt = -\frac{2 \cdot U_m}{T} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \cos(\omega t) \Big|_0^{T/2} = \\ &= -\frac{2 \cdot U_m}{T \cdot \omega} \cdot [\cos(\pi) - \cos(0)] = \frac{4 \cdot U_m}{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot U_m \end{aligned} \quad (160)$$

A stąd współczynnik kształtu równy jest

$$k_{k\sim} = \frac{U_m / \sqrt{2}}{U_m \cdot \frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad (161)$$

Aby przeliczyć napięcie wskazane przez miernik wartości średniej z modułu na napięcie skuteczne dla badanego przebiegu, należy zastosować następujący wzór

$$U_{RMS} = \frac{k_k}{k_{k\sim}} U_{\sim} \quad (162)$$

gdzie U_{\sim} jest wskazaniem przyrządu, natomiast k_k oraz $k_{k\sim}$ są współczynnikami kształtu badanego sygnału oraz sygnału sinusoidalnego

W przypadku miernika wartości szczytowej należy posłużyć się zależnością

$$U_{RMS} = \frac{k_{s\sim}}{k_s} U_{\sim} \quad (163)$$

gdzie k_s oraz $k_{s\sim}$ oznaczają współczynniki szczytu odpowiednio sygnału mierzonego i sygnału sinusoidalnego

Wartości tych współczynników dla przebiegu sinusoidalnego, trójkątnego oraz prostokątnego podano w tabeli 4.

Tabela4

	sinus	trójkąt	prostokąt
$\frac{ \overline{U} }{U_m}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	1
$k_S = \frac{U_m}{U_{RMS}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	1
$k_k = \frac{U_{RMS}}{ \overline{U} }$	$\frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

Przykład 6.

Miernikiem uniwersalnym, o wskazaniach proporcjonalnych do wartości średniej z modułu, zmierzono wartość

a) napięcia trójkątnego

b) napięcia prostokątnego

Ile wynosi błąd wynikający z nieuwzględnienia kształtu mierzonego napięcia?

W przypadku przebiegu trójkątnego błąd ten wynosi

$$\delta = \frac{U_{\sim} - U_{\Delta}}{U_{\sim}} = \frac{U_{\sim} - \frac{k_{k\Delta}}{k_{k\sim}} U_{\sim}}{U_{\sim}} = 1 - \frac{k_{k\Delta}}{k_{k\sim}} = 1 - \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} = -0,04 \quad (164)$$

natomiast dla przebiegu prostokątnego

$$\delta = \frac{U_{\sim} - U_p}{U_{\sim}} = \frac{U_{\sim} - \frac{k_{kp}}{k_{k\sim}} \cdot U_{\sim}}{U_{\sim}} = 1 - \frac{k_{kp}}{k_{k\sim}} = 1 - \frac{1}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} = -0,1 \quad (165)$$

Jak zatem widać, dla przebiegu trójkątnego wynik pomiaru jest zawyżony o 4%, natomiast dla prostokątnego o 10%.

Przykład 7.

Woltomierzem elektronicznym o odchyleniu proporcjonalnym do wartości szczytowej zmierzono wartość skuteczną napięcia prostokątnego. Obliczyć błąd wynikający z nieuwzględnienia jego kształtu.

Błąd ten wyrażony jest wzorem

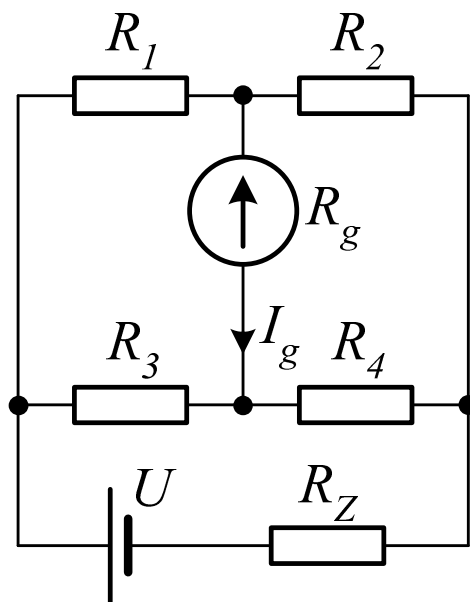
$$\delta = \frac{U_{\sim} - U_p}{U_{\sim}} = \frac{U_{\sim} - \frac{k_{s\sim}}{k_{sp}} U_{\sim}}{U_{\sim}} = 1 - \frac{k_{s\sim}}{k_{sp}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{1} = -0,414 \quad (166)$$

Jak zatem widać, błąd pomiaru wynosi w tym przypadku aż 41,4%.

*

Mostki prądu stałego.

Mostki rezystancyjne (mostki prądu stałego) są wykorzystywane w metrologii do pomiarów wartości rezystancji. Strukturę najprostszego czterogłęziowego mostka prądu stałego mostka Wheatstone'a przedstawiono na rys.33. Składa się on z czterech gałęzi zawierających rezystory oraz dwóch przekątnych mostka, w które włączone są źródło napięcia zasilania oraz wskaźnik równowagi (galwanometr). Prąd płynący w gałęzi kontrolnej mostka przez galwanometr jest opisany zależnością



Rys. 33. Mostek Wheatstone'a.

$$I_g = U \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + (R_1 + R_2) [R_3 R_4 + R_g (R_3 + R_4)]} \quad (164)$$

Łatwo zauważyć, że prąd $I_g = 0$, gdy spełniony jest warunek

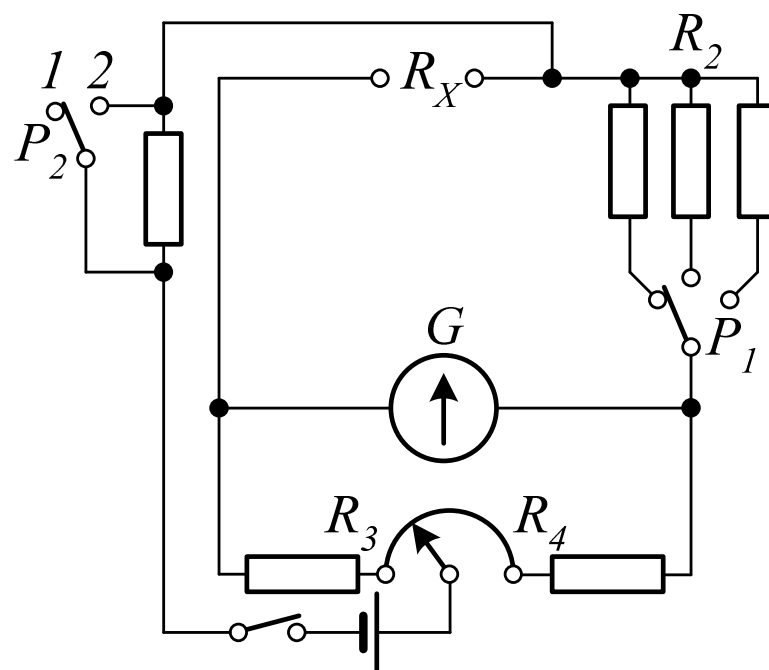
$$R_1 R_4 - R_2 R_3 = 0 \quad (165)$$

A zatem w stanie równowagi mostka (gdy $I_g = 0$) można wyznaczyć wartość rezystancji R_1 na podstawie znajomości trzech pozostałych rezystancji w mostku. Jeżeli mierzony rezystor R_x włączony jest w gałęzi R_1 , to jego wartość w stanie równowagi mostka opisuje zależność

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (166)$$

Z postaci powyższego wzoru wynikają możliwości równoważenia mostka przez zmianę rezystancji rezystora R_2 lub przez zmianę ilorazu rezystancji R_3/R_4 .

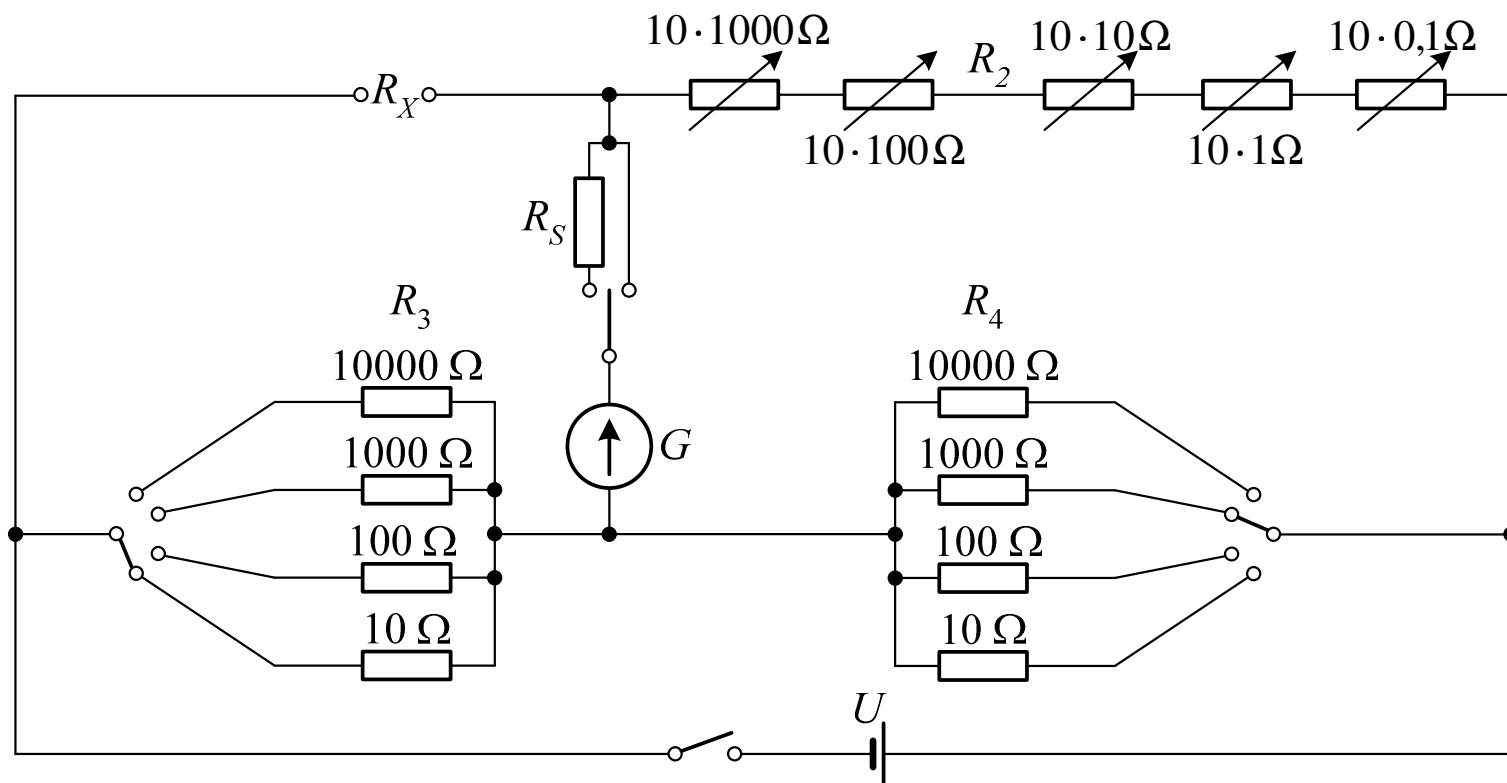
W praktyce, w zależności od żądanej dokładności pomiaru wykorzystuje się mostki techniczne (rys. 34) lub laboratoryjne (rys.35).



Rys.34. Układ technicznego mostka Wheatstone'a.

W mostku technicznym za pomocą przełącznika P1 wybiera się wartość rezystora R_2 , która powinna być tego samego rzędu, co rezystancja mierzona R_x , natomiast równoważenia dokonuje się przez regulację położenia suwaka potencjometru, które decyduje o relacji R_3/R_4 . W początkowym etapie pomiaru przełącznik P_2 znajduje się w położeniu 1, ograniczając prąd galwanometru. Po wstępnym zrównoważeniu przełącznik P_2 przełączany jest w pozycję 2, umożliwiając wykorzystanie czułości galwanometru wbudowanego w mostek. Zakres mierzonych rezystancji zawiera się typowo od kilku Ω do kilkuset $k\Omega$, a dokładność pomiaru jest rzędu ułamka %. Mostki takie są zwykle wykonywane w jednej obudowie a czas pomiaru rezystancji jest krótki.

Z kolei w mostku laboratoryjnym, którego schemat przedstawiono na rys.35, za pomocą przełączników kołkowych wybiera się wartości R_3 oraz R_4 tak, aby ich iloraz zapewniał pełne wykorzystanie dekad rezystora R_2 przy równoważeniu. Przy zastosowaniu rezystancji o wartościach podanych na rysunku zakres mierzonych rezystancji R_x zawiera się w przedziale od $1\ \Omega$ do $10\ \text{M}\Omega$. Zewnętrzny galwanometr charakteryzuje się dużą czułością, natomiast rezystor R_S ogranicza wartość płynącego przez niego prądu podczas wstępnego równoważenia mostka.



Rys.35. Układ laboratoryjnego mostka Wheatstone'a.

Błędy przy pomiarach mostkiem Wheatstone'a można wyznaczyć stosując metodę różniczki zupełnej w odniesieniu do zależności (166). Wówczas błąd względny wyznaczenia rezystancji R_X opisuje wzór

$$\delta_{sRx} = \delta_{R2} + \delta_{R3} - \delta_{R4} \quad (167)$$

gdzie δ_{R2} , δ_{R3} , δ_{R4} oznaczają błędy względne określenia wartości rezystancji w mostku, odpowiednio $R2$, $R3$, $R4$. Ponieważ znaki tolerancji rezystorów mogą być różne, więc można posługiwać się błędem granicznym δ_{sgRx}

$$\delta_{sgRx} = |\delta_{R2}| + |\delta_{R3}| + |\delta_{R4}| \quad (168)$$

W przypadku stosowania mostka technicznego, błąd ten wynika z niedokładności wyznaczenia rezystancji rezystora R_2 oraz niedokładności wyznaczania ilorazu R_3/R_4 .

$$\delta_{sRx} = \delta_{R2} + \delta_{R3/R4} \quad (169)$$

Błąd pomiaru ograniczony jest także czułością galwanometru S_m ,

$$S_m = \frac{\Delta a}{\delta_{Ri}} \quad (170)$$

gdzie Δa oznacza jedną działkę na skali przyrządu.
Stosuje się także definicję czułości prądowej mostka

$$S_{ml} = \frac{I_g}{\delta_{Ri}} \quad (171)$$

oraz czułości galwanometru na zmianę poszczególnych rezystancji w mostku

$$S_{mI1} = \frac{I_g}{\delta_{R1}}; \quad S_{mI2} = \frac{I_g}{\delta_{R2}}; \quad S_{mI3} = \frac{I_g}{\delta_{R3}}; \quad S_{mI4} = \frac{I_g}{\delta_{R4}} \quad (172)$$

Jak łatwo wykazać

$$S_{mI1} = S_{mI4} \text{ oraz } S_{mI2} = S_{mI3} = -S_{mI1} \quad (173)$$

Czułość prądową mostka można opisać zależnością

$$S_{mI} = \frac{I_g}{\delta_R} = U \frac{1}{R_g + R_m} f(R) \quad (174)$$

gdzie $f(R)$ jest pewną funkcją rezystancji rezystorów mostka.

A zatem czułość mostka jest opisana wzorem

$$S_m = \frac{\Delta a}{\delta_R} = \frac{I_g}{C_{Ig} \delta_R} = \frac{U}{C_{Ig}} \frac{1}{(R_g + R_m)} f(R) \quad (175)$$

Błąd nieczułości mostka jest definiowany wzorem

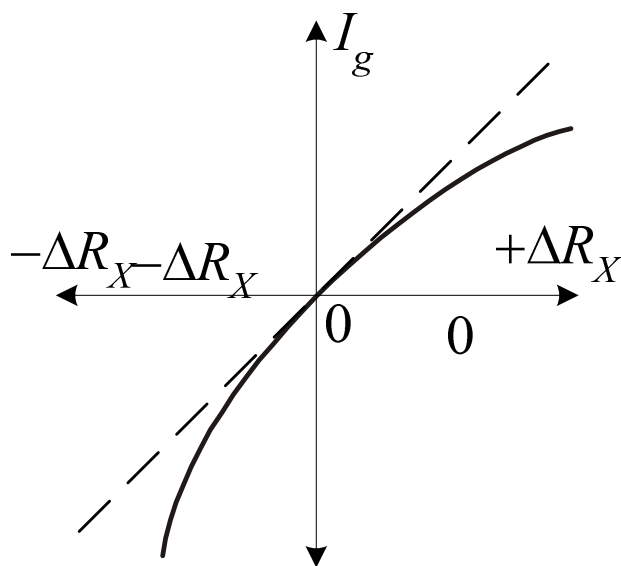
$$\delta_n = \frac{\Delta R_{xn}}{R_x} = \frac{\Delta R_{2n}}{R_2} \quad (176)$$

który można przekształcić do postaci

$$\delta_n = k \frac{1}{S_m} = k \frac{C_{I_g} (R_g + R_m)}{Uf(R)} \quad (177)$$

z wzoru tego wynika, że w celu uzyskania najlepszej dokładności pomiaru należy stosować galwanometr o dużej czułości i małej rezystancji wewnętrznej oraz możliwie duże napięcie zasilania mostka.

Oprócz mostków zrównoważonych stosuje się także w metrologii mostki niezrównoważone, w których pomiar wykonywany jest przy prądzie $I_g \neq 0$. Charakterystykę takiego mostka przedstawiono na rys.36

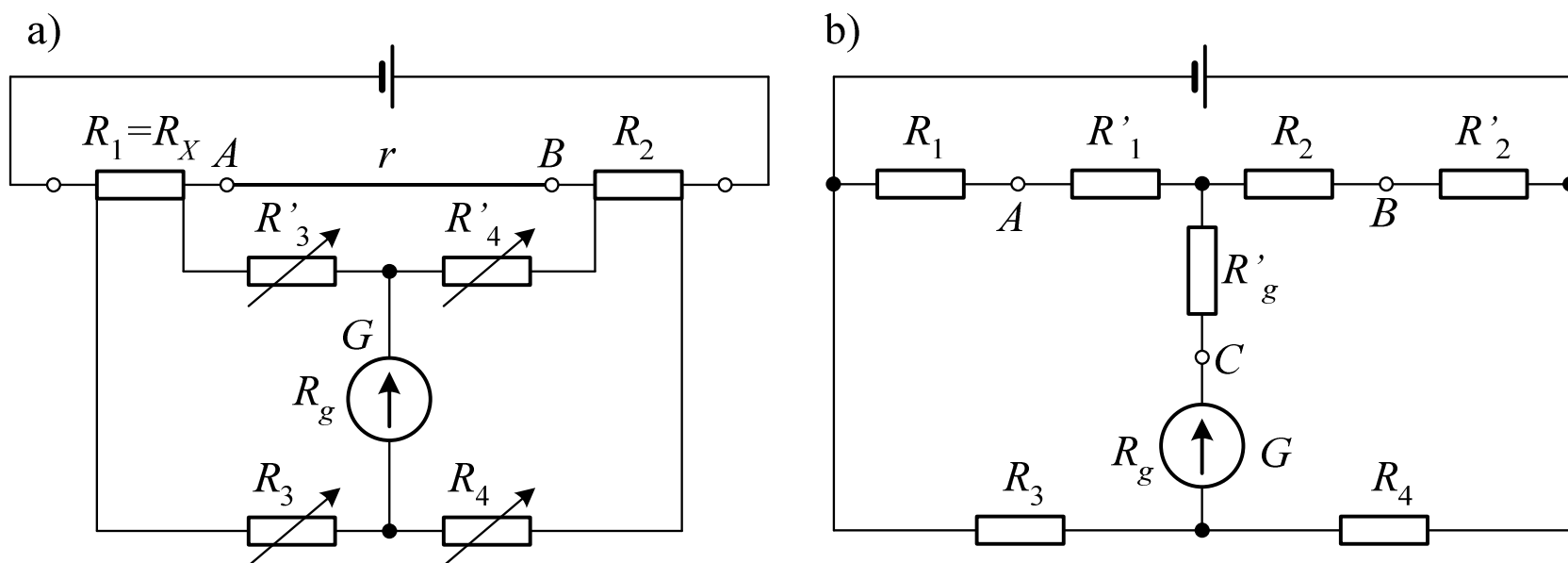


Rys.36. Charakterystyka mostka niezrównoważonego

Mostki niezrównoważone są stosowane do wielu pomiarów przemysłowych, np. do pomiaru temperatury, siły, naprężenia, przesunięcia za pomocą czujników rezystancyjnych. W celu zwiększenia czułości układu pomiarowego i poprawienia jego liniowości, stosuje się w mostkach niezrównoważonych dwa czujniki rezystancyjne o przeciwnych zmianach ΔR . Właściwości mostka niezrównoważonego są wykorzystywane przy masowej produkcji oporników do automatycznej segregacji według grup tolerancji. Napięcie nierównowagi mostka uruchamia — przez specjalne wzmacniacze - urządzenie zbierające oporniki o różnych tolerancjach, np. 0,5; 1; 2; 5; 10%, w oddzielnych pojemnikach.

Mostek Thomsona

Modyfikacją mostka Wheatstone'a jest mostek sześciogąłęziowy nazywany mostkiem Thomsona lub mostkiem podwójnym (rys.37a). Przeznaczony jest on do pomiaru małych rezystancji, gdyż umożliwia eliminowanie wpływu rezystancji przewodów łączących, która może być współmierna z mierzoną rezystancją R_X .



Rys.37. Mostek Thomsona: a) układ; b) układ zastępczy

Do analizy działania i właściwości mostka wygodnie jest przekształcić układ sześciogąłęziowy w czterogąłęziowy. W tym celu obwód ABC połączony w trójkąt zastępuje się równoważnym mu obwodem połączonym w gwiazdę (rys.37b). Rezystancje ramion gwiazdy wyznacza się z następujących wzorów:

$$R'_1 = \frac{rR'_3}{r + R'_3 + R'_4}; \quad R'_2 = \frac{rR'_4}{r + R'_3 + R'_4}; \quad R'_g = \frac{R'_3 R'_4}{r + R'_3 + R'_4} \quad (178)$$

Rezystancję r stanowi rezystancja przewodu łączącego zacisk prądowy rezystora mierzonego R_X i wzorcowego R_2 , mierzoną między zaciskami napięciowymi tych rezystorów.

W stanie równowagi mostka obowiązuje zależność

$$\frac{R_1 + R'_1}{R_3} = \frac{R_2 + R'_2}{R_4} \quad (179)$$

z której po przekształceniu otrzymuje się równanie

$$\frac{R_1}{R_3} + \frac{R'_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} + \frac{R'_2}{R_4} \quad (180)$$

Równanie to upraszcza się do postaci podobnej jak dla mostka Wheatstone'a

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \quad (181)$$

wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$\frac{R'_1}{R_3} = \frac{R'_2}{R_4} \quad (182)$$

Podstawiając wyrażenia na R'_1 i R'_2 do wyżej podanego wzoru, otrzymuje się po uproszczeniu

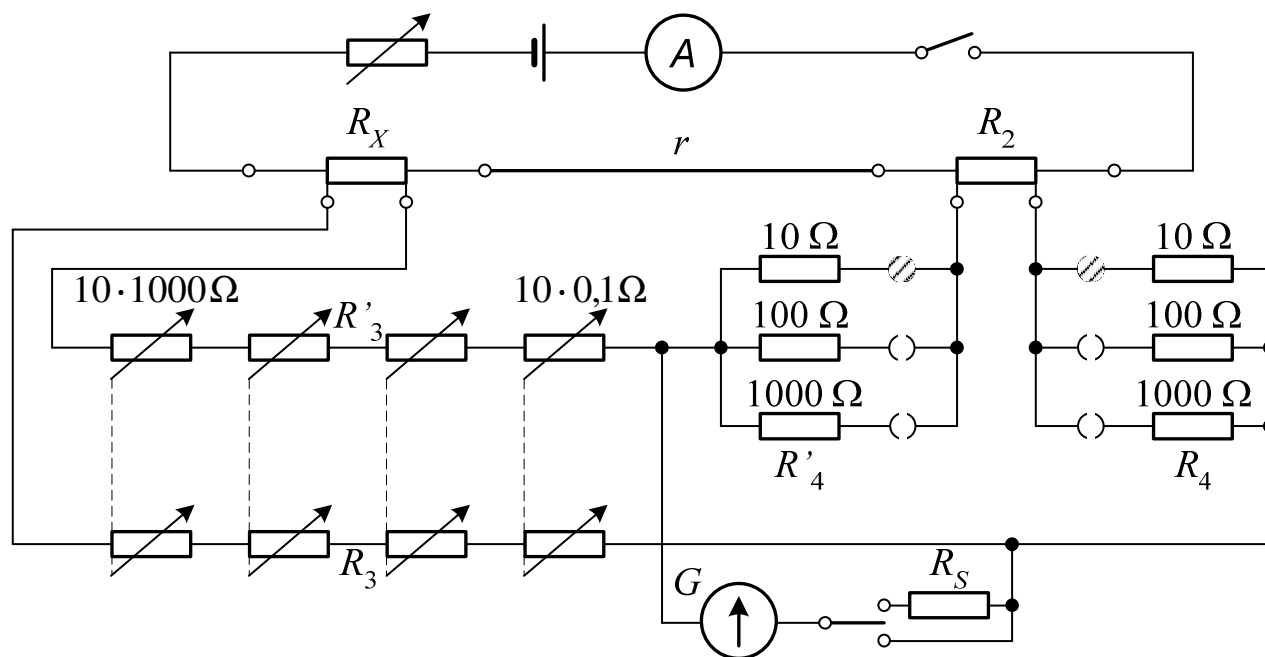
$$\frac{R'_3}{R_3} = \frac{R'_4}{R_4} \quad (183)$$

Jest to warunek, który musi być spełniony, aby wzór (181) był poprawny dla mostka podwójnego. Ze względów konstrukcyjnych najłatwiej jest spełnić ten warunek przez dobór

$$R'_3 = R_3 \text{ oraz } R'_4 = R_4 \quad (184)$$

Układ połączeń laboratoryjnego mostka Thomsona przedstawiono na rys.38. Rezystory R_X i R_2 (wzorcowy, o rezystancji zbliżonej do R_X) są włączone w zewnętrzny obwód prądowy, zamykający się poza mostkiem właściwym. Zaciski prądowe rezystorów R_X i R_2 łączy się

przewodem miedzianym, możliwie krótkim i grubym, aby jego rezystancja r była jak najmniejsza. Zaciski napięciowe tych rezystorów dołącza się do mostka. Rezystory R_3 i R'_3 są skonstruowane jako zestaw podwójnych dekad sprzężonych mechanicznie (na każdej osi przełącznika po dwie jednakowe dekady). Rezystor wzorcowy R_2 jest elementem czterozaciskowym, wymiennym, zależnie od wartości R_X . Stosuje się rezystory wzorcowe o rezystancjach od $0,0001\ \Omega$ do $1\ \Omega$ i dopuszczalnym prądzie obciążenia nawet do ok. $100\ \text{A}$, w celu uzyskania dostatecznej czułości przy małych rezystancjach mierzonych. Zakres pomiaru mostka zmienia się przełącznikiem kołkowym, wybierając odpowiednią parę jednakowych wartości R_4 i R'_4 .



Rys.38. Uproszczony układ laboratoryjnego mostka Thomsona

Rezystory laboratoryjnych mostków Thomsona wykonuje się z tolerancją 0,02% lub 0,05%. Mostki takie są budowane najczęściej jako czterodekadowe, gdyż wykazują nieco większe błędy pomiaru niż laboratoryjne mostki Wheatstone'a, które są budowane jako 5- lub 6-dekadowe. Zakresy pomiarowe mostków Thomsona obejmują rezystancje od $10^{-6}\Omega$ do 10Ω przy łącznym błędzie pomiaru w granicach od 0,05% do 0,2%.

Oprócz mostków laboratoryjnych Thomsona są także budowane mostki techniczne. Są to mostki przenośne, o kilku zakresach pomiaru, prostej konstrukcji, z wbudowanym galwonometrem. Równoważenie osiąga się przez regulację rezystora R_2 wykonanego w postaci manganinowego potencjometru drutowego o rezystancji $10^{-4}\Omega$ do $10^{-2}\Omega$. Suwak potencjometru jest sprzężony z podziałką, opisaną np. w miliomach, umożliwiającą bezpośredni odczyt wyniku pomiaru. Błędy pomiaru mostkami technicznymi zwykle przekraczają 1%.

Spotyka się również laboratoryjne mostki kombinowane o przełączalnym układzie, w których przez proste przełączenie elementów uzyskuje się mostek Wheatstone'a lub Thomsona.

Błędy pomiaru mostkiem Thomsona zależą przede wszystkim od tolerancji wykonania rezystorów mostka i od błędu nieczułości. Błąd systematyczny, wynikający z ograniczonej dokładności rezystorów mostka, oblicza się za pomocą różniczki zupełnej równania mostka zrównoważonego. Graniczny błąd systematyczny wynosi

$$\delta_{sgRx} = |\delta_{R_2}| + |\delta_{R_3}| + |\delta_{R_4}| + \frac{r}{R_x + R_2} (|\delta_{R_3}| + |\delta_{R_4}| + |\delta_{R'_3}| + |\delta_{R'_4}|) \quad (185)$$

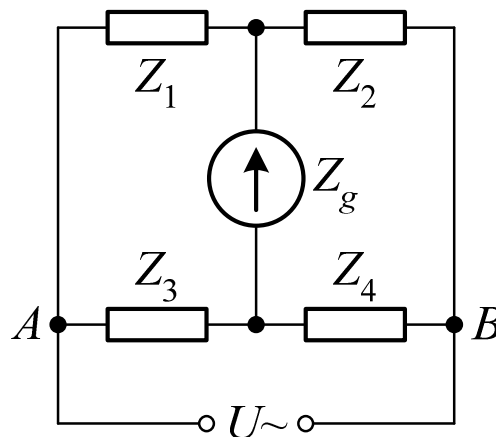
Błąd systematyczny pomiaru mostkiem Thomsona może być zbliżony do błędu pomiaru mostkiem Wheatstone'a wówczas, gdy rezystancja r przewodu łączącego rezystory R_X i R_2 jest dostatecznie mała w porównaniu z sumą rezystancji $R_X + R_2$.

Błąd nieczułości mostka Thomsona wyznacza się doświadczalnie podczas pomiaru. Czułość układu dobiera się tak, aby błąd nieczułości był znacznie mniejszy od błędu systematycznego granicznego, a wtedy można go pominąć.

W mostku laboratoryjnym zwiększenie czułości osiąga się przez zwiększenie prądu w obwodzie R_X i R_2 (w granicach wynikających z dopuszczalnej mocy rezystorów) i zastosowanie czulszego galwanometru.

MOSTKI PRĄDU PRZEMIENNEGO

Mostki prądu przemiennego są przeznaczone do pomiarów parametrów elektrycznych cewek i kondensatorów a także obwodów, w których występują indukcyjności lub pojemności. Istnieje wiele odmian układów mostków prądu przemiennego różniących się liczbą ramion, rodzajem włączonych elementów (rezystory, kondensatory, cewki, transformatory), przeznaczeniem, zakresem pomiaru itp. Mostki laboratoryjne umożliwiają pomiary z błędem nie przekraczającym 0,5%.



Rys.39. Układ mostka prądu przemiennego

Mostki prądu przemiennego są układami czterogłęziowymi, jak na rys.39, lub mogą być przekształcone do takiej postaci. Zasilane są napięciem sinusoidalnym (zwykle o częstotliwość $f = 1 \text{ kHz}$), a jako wskaźnik równowagi stosuje się zwykle woltomierze selektywne o różnych konstrukcjach. Przy częstotliwościach akustycznych wskaźnikiem równowagi może być słuchawka.

W stanie równowagi mostka wskaźnik równowagi wskazuje zerowe napięcie, co świadczy o tym, że wartości chwilowe napięcia w punktach dołączenia wskaźnika (CD) są jednakowe. Obowiązuje wtedy następujące równanie równowagi mostka

$$\underline{Z_1 Z_4} = \underline{Z_2 Z_3} \quad (186)$$

Impedancje ramion mogą być przedstawione w postaci zespolonej

$$\underline{Z} = R + jX \quad (187)$$

lub w postaci wykładniczej

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} \quad (188)$$

Rozwiązanie równania mostka prądu przemiennego prowadzi do dwóch warunków równowagi. Przy postaci zespolonej otrzymuje się dwa równania, wynikające z przyrównania osobno części rzeczywistych i osobno części urojonych. Przy postaci wykładniczej otrzymuje się równanie modułów i faz

$$\begin{aligned} Z_1 Z_4 &= Z_2 Z_3 \\ \varphi_1 + \varphi_4 &= \varphi_2 + \varphi_3 \end{aligned} \quad (189)$$

Dwa warunki równowagi wskazują na konieczność równoważenia mostka dwoma elementami regulowanymi. Równoważenie takie przeprowadza się metodą kolejnych przybliżeń, sprowadzając do minimum odchylenie wskaźnika równowagi dwoma elementami równoważącymi.

W większości mostków czterogałęziowych rozróżnia się dwa ramiona podstawowe i dwa pomocnicze. W ramionach podstawowych włączona jest impedancja mierzona i impedancja odwzorowująca wielkość mierzoną. Ramiona pomocnicze służą do zmiany zakresu pomiarowego mostka. Warunek równowagi mostka, w którym ramionami podstawowymi są impedancje Z_1 i Z_2 , a pomocniczymi - stałe impedancje Z_3 i Z_4 , można zapisać w postaci

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 \underline{k} \quad (190)$$

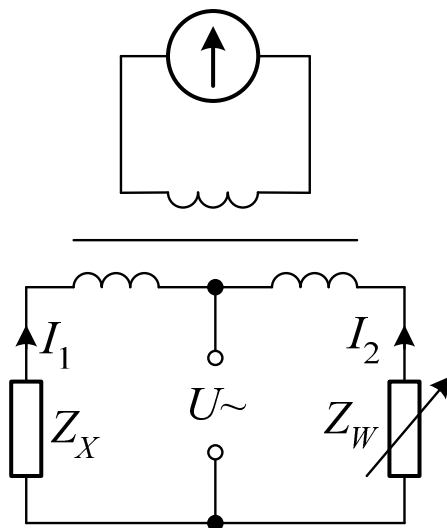
przy czym

$$\underline{k} = \underline{Z}_3 / \underline{Z}_4 \quad (191)$$

Wynika stąd, że w stanie równowagi mostka, składowe R_1 i X_1 impedancji mierzonej mogą być określone przez składowe impedancji równoważającej R_2 i X_2

Do mostków prądu przemiennego zalicza się także układy pomiarowe z transformatorem różnicowym. Transformator różnicowy pozwala na zrealizowanie układu mostkowego przedstawionego na rys.40. W układzie tym dwie symetryczne połowy pierwotnego uzwojenia transformatora różnicowego tworzą dwa ramiona mostka, a dwie pozostałe są utworzone z impedancji mierzonej Z_x i wzorcowej Z_w . Do uzwojenia wtórnego transformatora jest dołączony wskaźnik równowagi. Wskaźnik równowagi wykazuje brak napięcia na uzwojeniu wtórnym, gdy prądy I_1 oraz I_2 w obu połówkach uzwojenia pierwotnego są równe. Równość prądów świadczy o równości impedancji

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_w \quad (192)$$



Rys.40. Układ mostka z transformatorem różnicowym

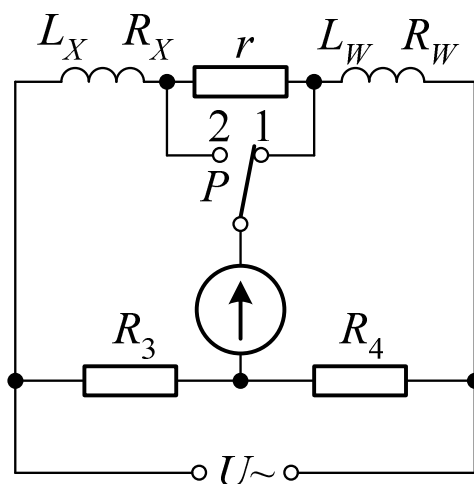
Na tej zasadzie buduje się wiele odmian układów pomiarowych, nazywanych mostkami transformatorowymi. Transformatory różnicowe mogą mieć uzwojenia o różnych liczbach zwojów.

W zależności od sposobu równoważenia rozróżnia się mostki równoważone ręcznie, półautomatyczne i automatyczne.

W elektrotechnice stosuje się kilka podstawowych układów mostków prądu przemiennego; ważniejsze z nich opisano w następnych podrozdziałach.

Mostek Maxwella

Mostek Maxwella służy do pomiaru indukcyjności własnej obwodów liniowych (nie zawierających rdzeni ferromagnetycznych). Układ mostka Maxwella przedstawiono na rys.41. Indukcyjność mierzona L_x porównuje się w mostku z indukcyjnością wzorcową L_w .



Rys.41. Układ mostka Maxwella

W stanie równowagi mostka, przy założeniu $r = 0$, obowiązuje zależność

$$(R_x + j\omega L_x)R_4 = (R_w + j\omega L_w)R_3 \quad (193)$$

stąd

$$R_x R_4 + j\omega L_x R_4 = R_w R_3 + j\omega L_w R_3 \quad (194)$$

Z porównania części rzeczywistych oraz urojonych otrzymuje się

$$R_x R_4 = R_w R_3, \text{ oraz } L_x R_4 = L_w R_3 \quad (195)$$

A zatem indukcyjność i rezystancję badanego obwodu opisują wzory

$$L_x = L_w \frac{R_3}{R_4}; \quad R_x = R_w \frac{R_3}{R_4} \quad (196)$$

które stanowią dwa warunki równowagi mostka. Dzieląc stronami te wzory, otrzymuje się

$$\frac{L_x}{R_x} = \frac{L_w}{R_w} \quad (197)$$

Mostek osiąga więc stan równowagi tylko w przypadku równości stałych czasowych elementu mierzonego i wzorca indukcyjności. Równość taka zachodzi bardzo rzadko. Wprowadza się więc w mostku dodatkowy regulowany rezystor r , który włącza się przełącznikiem P w ramię R_x (położenie 1) lub R_w (położenie 2) zależnie od tego, które z ramion ma większą stałą czasową. Jeśli $L_x/R_x > L_w/R_w$, to po ustawieniu przełącznika w pozycji 1 przez regulację rezystora r osiąga się warunek równowagi

$$\frac{L_x}{R_x + r} = \frac{L_w}{R_w} \quad (198)$$

We wzorze (196) uwzględnia się wartość r dodając ją do R_x lub R_w , zależnie od położenia przełącznika P.

W praktyce proces równoważenia mostka zaczyna się przy zerowej wartości r i ustawieniu P w dowolnej pozycji. Zmieniając rezystancję R_3 , sprowadza się wskazanie wskaźnika równowagi na wartość minimalną, a następnie zwiększając rezystancję r obserwuje się odchylenie wskaźnika równowagi. Jeżeli wzrost wartości r od zera powoduje zmniejszenie napięcia nierównowagi, to znaczy, że przełącznik P jest ustawiony we właściwym położeniu. Jeżeli natomiast nastąpi zwiększenie napięcia nierównowagi, to należy zmienić położenie przełącznika. Całkowite zrównoważenie mostka wymaga kilkakrotnego regulowania na przemian rezystorów R_3 i r .

Wielkością charakteryzującą jakość cewki indukcyjnej jest jej dobroć Q , przy czym dla szeregowego układu zastępczego cewki wyznacza się ją ze wzoru

$$Q = \frac{\omega \cdot L_x}{R_x} \quad (199)$$

Graniczny błąd systematyczny, wynikający z tolerancji wykonania elementów mostka, oblicza się ze wzoru podobnego jak w przypadku mostków prądu stałego

$$\delta_{L_x} = \left| \delta_{L_w} \right| + \left| \delta_{R_3} \right| + \left| \delta_{R_4} \right| \quad (200)$$

Na podstawie pomiaru mostkiem Maxwella można wyznaczyć indukcyjność wzajemną dwóch cewek. Dwukrotnie mierzy się indukcyjność cewek połączonych szeregowo-zgodnie i szeregowo-przeciwsobnie. W wyniku pomiarów otrzymuje się dwie wartości indukcyjności

$$L' = L_1 + L_2 + 2L_{12} \quad (201)$$

$$L'' = L_1 + L_2 - 2L_{12} \quad (202)$$

Odejmując równania stronami, otrzymuje się

$$L' - L'' = 4 \cdot L_{12} \quad (203)$$

stąd indukcyjność wzajemna dana jest wzorem

$$L_{12} = \frac{L' - L''}{4} \quad (204)$$

Do pomiarów indukcyjności stosuje się również tzw. mostki Maxwella-Wiena, w których mierzoną indukcyjność porównuje się z pojemnością kondensatora wzorcowego. W mostku takim, w ramieniu Z_1 umieszcza się badaną cewkę L_1 , R_1 ; ramiona Z_2 i Z_3 stanowią rezystory R_2 i R_3 , a w ramieniu Z_4 znajdują się równolegle połączone opornik R_4 i kondensator C_4 .

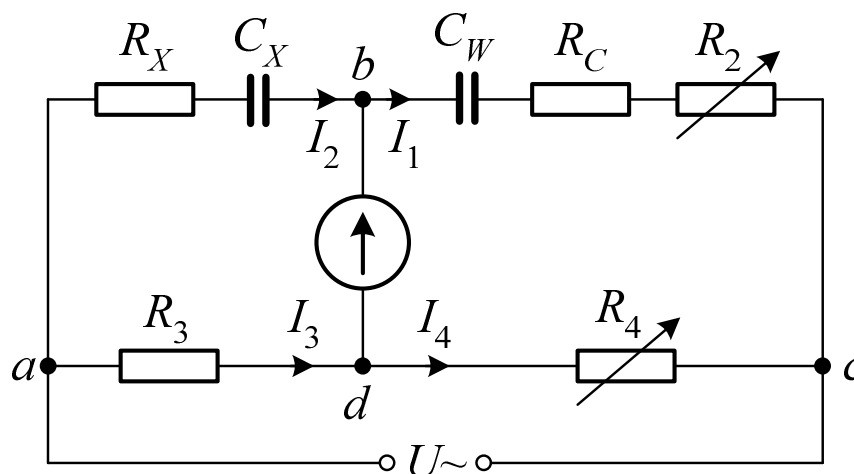
Z warunku równowagi mostka otrzymuje się wzory określające mierzone parametry cewki

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad L_1 = R_2 R_3 C_4 \quad (205)$$

Mostki takie są stosowane do pomiaru indukcyjności w zakresie do ok. 10 H, z błędem od 0,1% do 0,2% w dość szerokim zakresie częstotliwości.

Mostek Wiena

Mostek Wiena jest przeznaczony do pomiarów pojemności i stratności kondensatorów. Uproszczony układ pomiarowy mostka przedstawiono na rys.42. Pojemność mierzoną C_x porównuje się w mostku z pojemnością C_w kondensatora wzorcowego. Rezystancje R_x i R_c reprezentujące straty kondensatora badanego i wzorcowego.



Rys.42. Układ mostka Wiena

Równoważenia mostka dokonuje się kolejno rezystorami R_4 i R_2 . W stanie równowagi, gdy wskaźnik równowagi wskazuje zero, zachodzi równość

$$\left(R_x + \frac{1}{j\omega C_x} \right) R_4 = \left(R_c + R_2 + \frac{1}{j\omega C_w} \right) R_3 \quad (206)$$

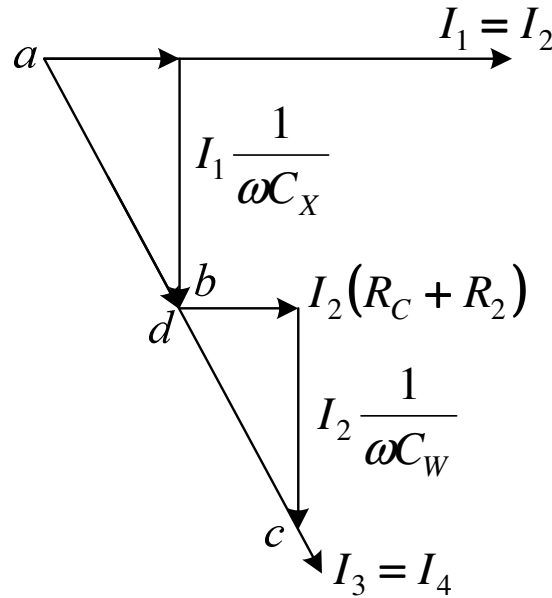
Stąd po przyrównaniu części rzeczywistych i urojonych otrzymuje się dwa warunki równowagi o postaci

$$C_x = C_w \frac{R_4}{R_3} \quad R_x = (R_c + R_2) \frac{R_3}{R_4} \quad (207)$$

W kondensatorach wzorcowych, praktycznie bezstratnych (np. powietrznych), rezystancja strat może być pominięta, wtedy $R_c \approx 0$. Stratność badanego kondensatora $\tan \delta$ można wyznaczyć z zależności

$$\tan \delta_x = \omega C_x R_x = \omega C_w \frac{R_4}{R_3} (R_c + R_2) \frac{R_3}{R_4} = \omega C_w (R_c + R_2) \quad (208)$$

Rys.43 przedstawia wykres wskazowy mostka Wiena w stanie równowagi. Rysowanie wykresu wygodnie jest rozpocząć od prądu I_1 , który w stanie równowagi jest równy prądowi I_2 . Wyznaczone spadki napięcia na składowych impedancji Z_1 i Z_2 stanowią napięcie U zasilające mostek. Prąd $I_3 = I_4$ w rezystancyjnych ramionach pomocniczych jest w fazie z napięciem zasilającym. Podział spadków napięcia na rezystorach R_3 i R_4 jest taki, że punkt d na wykresie pokrywa się z punktem b. Świadczy to o braku różnicy potencjałów w przekątnej mostka.



Rys.43. Wykres wektorowy mostka Wiena

Błędy systematyczne graniczne pomiaru, wynikające z niedokładności elementów mostka, oblicza się ze wzorów

$$\delta_{C_x} = |\delta_{C_w}| + |\delta_{R_3}| + |\delta_{R_4}| \quad (209)$$

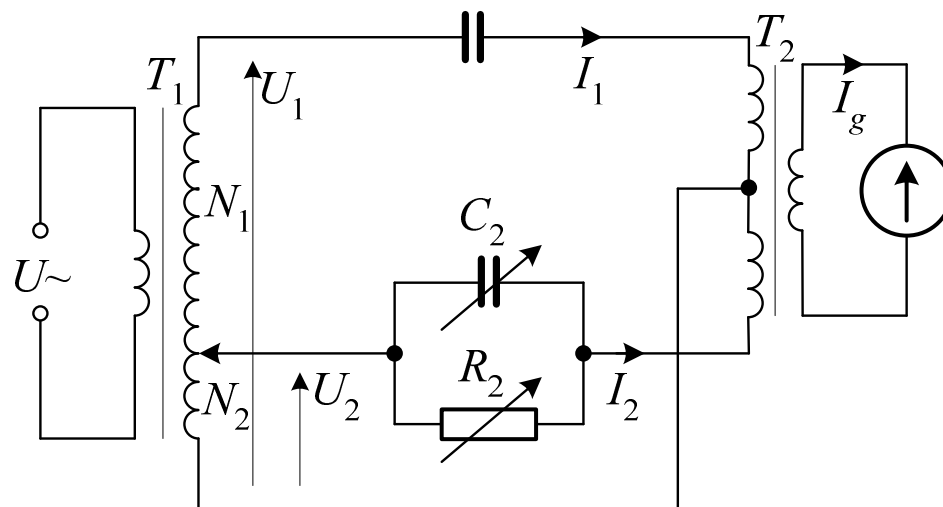
$$\delta_{tg\delta} = |\delta_{C_w}| + |\delta_{\omega}| + |\delta_{R_c}| \frac{R_c}{R_c + R_2} + |\delta_{R_2}| \frac{R_2}{R_c + R_2} \quad (210)$$

przy czym δ_{ω} jest względnym błędem określenia częstotliwości napięcia zasilającego mostek.

Mostki transformatorowe

Mostki transformatorowe są budowane z jednym lub z dwoma transformatorami. Układy o dwóch transformatorach wykazują wiele zalet, dlatego też są częściej stosowane.

Przykładem mostka transformatorowego o regulowanej impedancji równoważącej jest układ przedstawiony na rys.44 pomiar mostkiem polega na zrównaniu wartości prądów I_1 i I_2 w symetrycznych połowach uzwojenia transformatora różnicowego T_2 . Zerowe odchylenie wskaźnika równowagi ($I_g = 0$) świadczy o równości prądów $I_1 = I_2$. Prądy w impedancji mierzonej i równoważącej wyznacza się z zależności



Rys.44. Układ mostka transformatorowego równoważonego kondensatorem i rezystorem R_2

$$\underline{I_1} = \frac{\underline{U_1}}{\underline{Z_1}}, \quad \underline{I_2} = \frac{\underline{U_2}}{\underline{Z_2}} \quad (211)$$

Napięcie wyjściowe U_2 transformatora zasilającego T_1 jest regulowane przez zmianę liczby zwojów N_2 uzwojenia wtórnego. Napięcie to ma fazę zgodną z napięciem U_1

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \frac{N_2}{N_1} \quad (212)$$

przy czym N_2/N_1 jest stosunkiem liczby zwojów uzwojeń wtórnych.

W mostku zrównoważonym, gdy $I_g = 0$, występuje równość prądów

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_1 N_2}{\underline{Z}_2 N_1} \quad (213)$$

stąd

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_x = \underline{Z}_2 \frac{N_1}{N_2} \quad (214)$$

Łatwo wykazać, że mierzona pojemność i stratność określają następujące wzory:

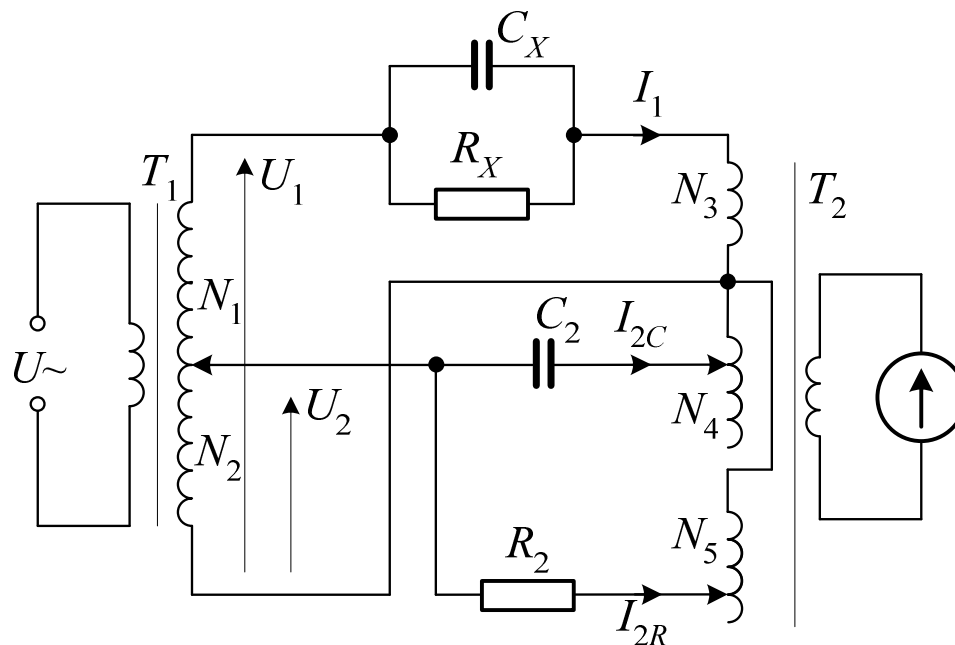
$$C_x = C_2 \frac{N_2}{N_1}; \quad \operatorname{tg} \delta_x = \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{1}{\omega R_2 C_2} \quad (215)$$

Regulowana liczba zwojów N_2 umożliwia zmianę zakresu pomiaru pojemności C_x . Przedstawiony na rys.44 mostek musi mieć regulowany kondensator wzorcowy C_2 , np. dekadowy oraz regulowany rezystor wzorcowy R_2 .

Budowane są również mostki transformatorowe nie wymagające stosowania regulowanych wzorców pojemności i rezystancji. Przykład mostka transformatorowego o stałej pojemności wzorcowej C_2 i stałej rezystancji R_2 przedstawiono na rys.45. Równoważenia mostka dokonuje się przez zmianę liczby zwojów w transformatorach T_1 i T_2 . Zmieniając liczbę zwojów N_2 w

transformatorze zasilającym T_1 , zmienia się zakres pomiaru. Transformator różnicowy ma trzy uzwojenia pierwotne: jedno o nieregulowanej liczbie zwojów N_3 oraz dwa o regulowanej liczbie zwojów N_4 i N_5 . W zrównoważonym mostku galwanometr wskazuje $I_g = 0$, gdy suma przepływów w transformatorze różnicowym jest równa zero

$$I_1 N_3 - I_{2C} N_4 - I_{2R} N_5 = 0 \quad (216)$$



Rys.45. Mostek transformatorowy zrównoważony za pomocą zmiany liczby zwojów

Stąd równanie

$$I_1 N_3 = I_{2C} N_4 + I_{2R} N_5 \quad (217)$$

Przy założeniu, że impedancje uzwojeń transformatora różnicowego są pomijalne w porównaniu z impedancją mierzoną i wzorcową oraz przyjmując równoległy schemat zastępczy kondensatora badanego, poszczególne prądy można opisać następującymi wzorami:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \underline{U}_1 \left(\frac{1}{R_x} + j\omega C_x \right) \quad (218)$$

$$\underline{I}_{2C} = \frac{\underline{U}_2}{X_{C2}} = \underline{U}_1 \frac{N_2}{N_1} j\omega C_2 \quad (219)$$

$$\underline{I}_{2R} = \frac{\underline{U}_2}{R_2} = \underline{U}_1 \frac{N_2}{N_1} \frac{1}{R_2} \quad (220)$$

Podstawiając te zależności do równania przepływów, otrzymuje się wzór

$$N_3 \left(\frac{1}{R_x} + j\omega C_x \right) = N_4 \frac{N_2}{N_1} j\omega C_2 + N_5 \frac{N_2}{N_1} \frac{1}{R_2} \quad (221)$$

Stąd, z porównania części urojonych i rzeczywistych, otrzymuje się wyrażenia opisujące wartości mierzonej pojemności C_x i rezystancji strat równoległych R_x

$$C_x = C_2 \frac{N_2 N_4}{N_1 N_3} \quad (222)$$

$$R_x = R_2 \frac{N_1 N_3}{N_2 N_5} \quad (223)$$

stratność opisana jest wzorem

$$\operatorname{tg} \delta_x = \frac{1}{\omega R_x C_x} = \frac{1}{\omega R_2 C_2 \frac{N_4}{N_5}} \quad (224)$$

Mostki transformatorowe stosuje się do pomiarów parametrów zarówno kondensatorów jak i cewek.

Podział liczby zwojów w mostku może być określony znacznie dokładniej niż wyznacza się wartości wzorcowe C_2 i R_2 . Dlatego też głównym źródłem błędu systematycznego, wynikającego z niedokładności zastosowanych elementów, jest wzorcowy kondensator C_2 i rezystor R_2 .

Nowe konstrukcje mostków transformatorowych umożliwiają wykonywanie pomiarów z większą dokładnością niż w innych mostkach prądu przemiennego.

Mostki półautomatyczne RLC

Mostki półautomatyczne RLC są przeznaczone do pomiaru rezystancji, indukcyjności i pojemności oraz umożliwiają wyznaczenie dobroci cewek i stratności kondensatorów

Przy omawianiu mostków prądu zmiennego wykazano, że do zrównoważenia mostka jest potrzebna regulacja wartości dwóch elementów. W mostkach półautomatycznych jedną wartość ustawia się ręcznie, druga natomiast zmienia się samoczynnie, czyli automatycznie.

Typowy mostek półautomatyczny RLC umożliwia siedem rodzajów pomiarów:

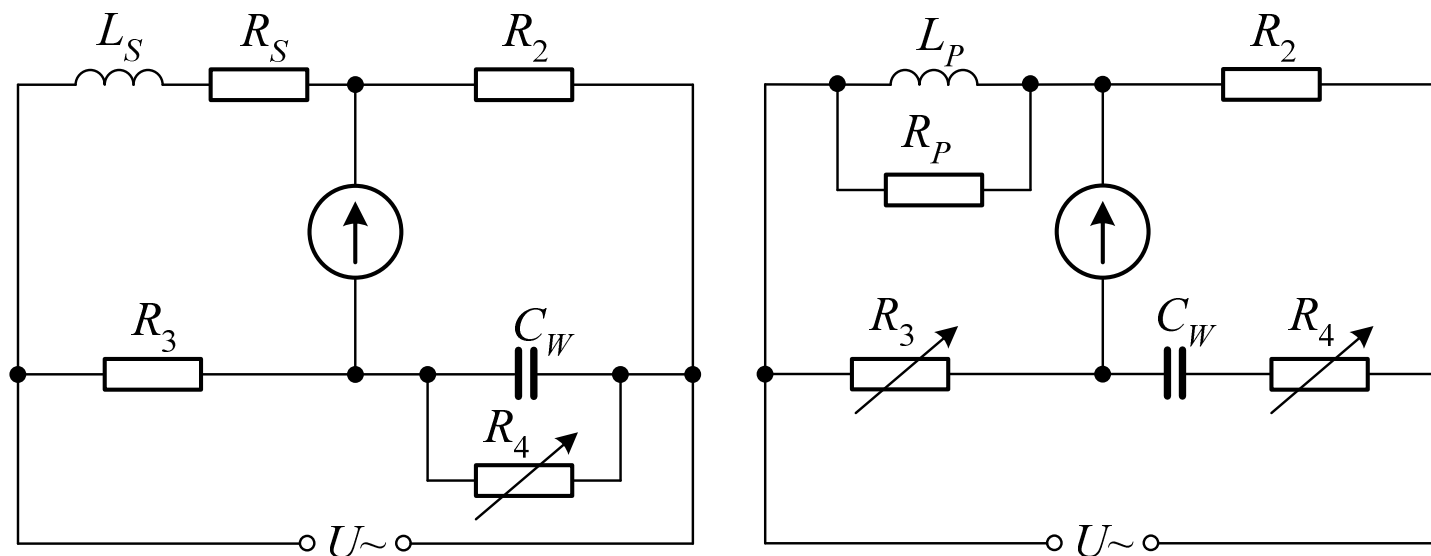
- rezystancji mierzonych prądem stałym;
- indukcyjności L_S i rezystancji R_S cewki wyznaczonych dla szeregowego układu zastępczego;
- indukcyjności L_p i rezystancji R_p cewki wyznaczonych dla równoległego układu zastępczego;
- indukcyjności L_A z automatycznym równoważeniem rezystancji strat;

- pojemności C_s i rezystancji strat R_s kondensatora wyznaczonych dla szeregowego układu zastępczego;
- pojemności C_p i rezystancji strat R_p kondensatora wyznaczonych dla równoległego układu zastępczego;
- pojemności C_A kondensatora z automatycznym równoważeniem strat.

Wymienione funkcje pomiarowe realizowane są w siedmiu układach zrównoważonego mostka czterogałęziowego.

Pomiar rezystancji odbywa się w mostku Wheatstone'a zasilanym napięciem stałym. Przebieg pomiaru jest taki jak w mostku laboratoryjnym Wheatstone'a.

Pomiary indukcyjności odbywają się na podstawie porównania z wzorcem pojemności w układzie mostka Maxwella - Wiena z rys.46. W mostkach przedstawionych na rys.46 elementami porównawczymi są: nastawny rezystor R_2 , który służy do zmiany zakresu pomiarowego; wielodekadowy rezystor R_3 , który służy do ręcznego równoważenia mostka; kondensator wzorcowy C_w i płynnie regulowany (ręcznie) rezystor R_4 - służy do równoważenia składowej rezystancyjnej mierzonej cewki. W zrównoważonym mostku z rys.46a (napięcie U_g w przekątnej mostka równe zero) wyznacza się wielkości charakteryzujące cewkę w szeregowym układzie zastępczym



Rys.46. Układy mostków Maxwella - Wiena do pomiarów indukcyjności: a) o szeregowym układzie zastępczym; b) o równoległym układzie zastępczym

$$L_s = C_w R_2 R_3, \quad R_s = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (225)$$

oraz dobroć cewki

$$Q = \frac{\omega L_s}{R_s} = \omega R_4 C_w \quad (226)$$

Układ ten służy do pomiaru cewek o małych wartościach dobroci Q (do ok. 10), to znaczy cewek o dużych rezystancjach strat, ponieważ dla dużych wartości Q należałoby stosować rezystor R_4 o bardzo dużej rezystancji.

W mostku przedstawionym na rys.46b wyznacza się wielkości charakteryzujące cewkę w równoległym układzie zastępczym. Wielkości mierzone wyznacza się z zależności

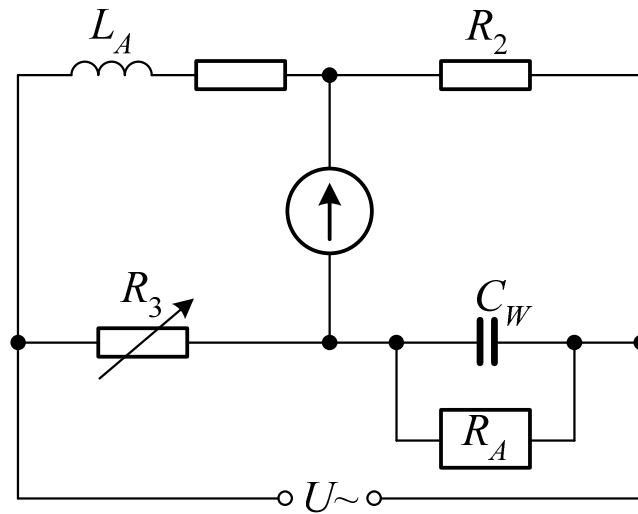
$$L_p = R_2 R_3 C ; \quad R_p = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (227)$$

natomiast dobroć cewki w układzie równoległym wynosi

$$Q = \frac{R_p}{\omega L_p} = \frac{1}{\omega R_4 C_w} \quad (228)$$

W cewkach o małych stratach rezystancja równoległego układu zastępczego R_p osiąga bardzo duże wartości, rzędu megaomów.

Pomiar indukcyjności cewki z automatycznym równoważeniem strat wymaga tylko równoważenia ręcznego rezystorem dekadowym R_3 (rys.47), natomiast równoważenie rezystancji cewki przebiega samoczynnie w obwodzie R_A dołączonym równolegle do kondensatora C_w . Mierzoną indukcyjność opisuje zależność $L_A = R_2 R_3 C_w$. Rezystancji cewki ani jej dobroci w tym pomiarze nie wyznacza się.



Rys.47. Mostek do pomiaru indukcyjności z automatycznym równoważeniem rezystancji cewki.

W wielu przypadkach istotna jest tylko indukcyjność cewki, a nie jej rezystancja, wtedy korzysta się z pomiaru półautomatycznego.

Zależność między indukcyjnością cewki w układzie szeregowym i równoległym jest określona równaniem

$$L_s = \frac{Q^2}{1+Q^2} L_p \quad (229)$$

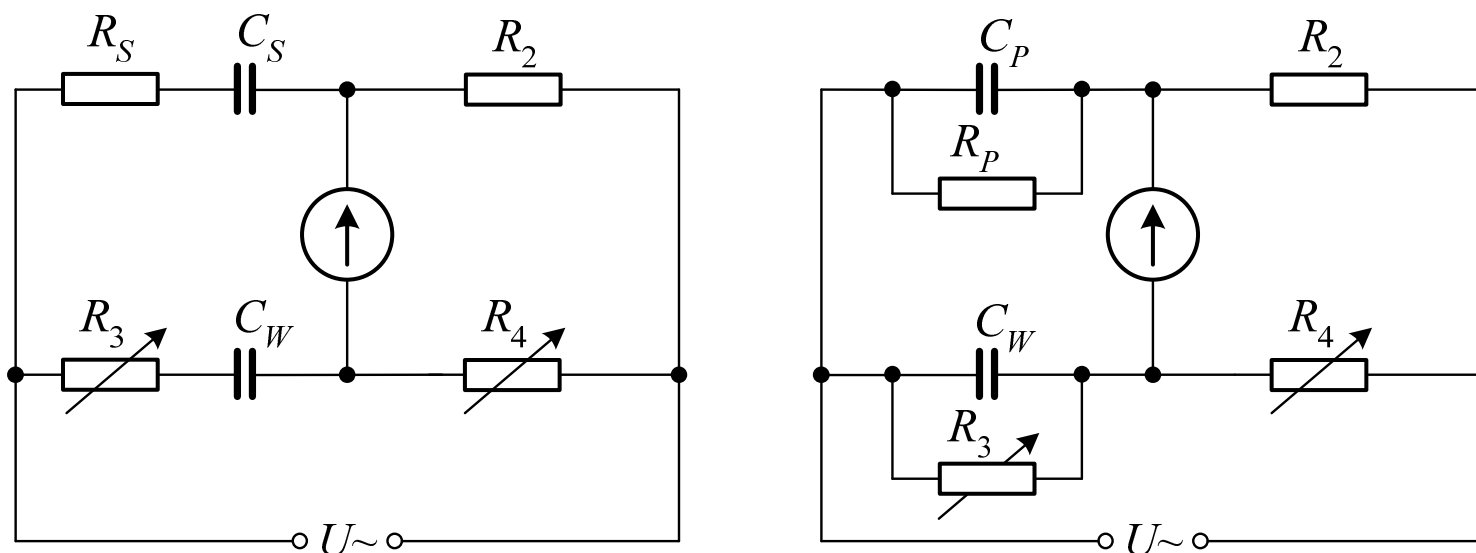
Przy dużych wartościach dobroci indukcyjności te są praktycznie równe $L_s \approx L_p$.

Pomiary pojemności i stratności kondensatorów przeprowadza się ręcznie w dwóch układach przedstawionych na rys.47, podobnie jak poprzednio opisane pomiary indukcyjności. Mostek doprowadza się do równowagi rezystorem dekadowym R_4 i płynnie regulowanym R_3 .

Układ z rys.47a służy do pomiaru pojemności i kąta strat kondensatora w szeregowym układzie zastępczym; wyznacza się je z zależności:

$$C_S = C_W \frac{R_4}{R_2}; \quad R_S = R_3 \frac{R_2}{R_4}; \quad \operatorname{tg} \delta = \omega \cdot R_S C_S = \omega \cdot R_3 \cdot C_W \quad (230)$$

Układ ten jest stosowany do pomiarów parametrów kondensatorów o małych wartościach $\operatorname{tg} \delta \leq 0,1$.



Rys.48. Układ mostków do pomiaru pojemności: a) kondensatorów o szeregowym układzie zastępczym; b) kondensatorów o równoległym układzie zastępczym

Wielkości charakteryzujące kondensatory o równoległym układzie zastępczym mierzy się mostkiem, którego układ pokazano na rys.48b. Opisane są one równaniami:

$$C_p = C_w \frac{R_4}{R_2}; \quad R_p = R_3 \frac{R_2}{R_4}; \quad \operatorname{tg} \delta_x = \frac{1}{\omega R_p C_p} = \frac{1}{\omega R_3 C_w} \quad (231)$$

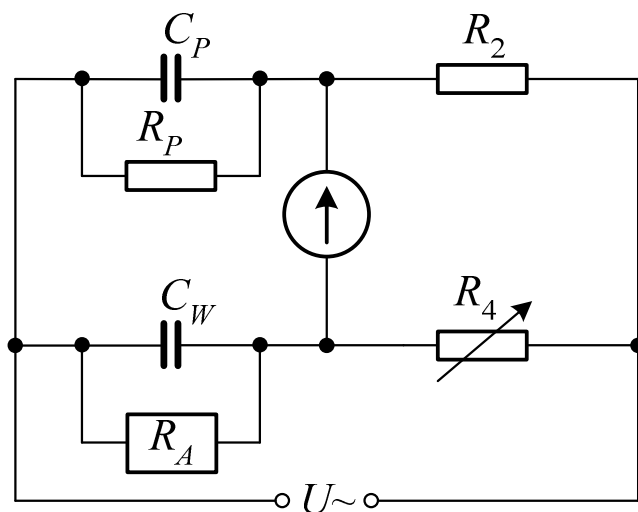
Układ ten jest przydatny do pomiarów kondensatorów o dużych wartościach $\operatorname{tg} \delta \geq 0,1$.

Pomiar pojemności C_A kondensatorów z automatycznym równoważeniem rezystancji strat wykonuje się w układzie przedstawionym na rys.49. Równoważenie mostka przeprowadza się ręcznie rezystorem dekadowym R_4 , a równoważenie rezystancji strat przebiega automatycznie za pomocą sterowanej rezystancji R_A włączonej równolegle do kondensatora wzorcowego. Mierzoną pojemność wyraża zależność

$$C_A = C_w \frac{R_4}{R_2} \quad (232)$$

jest to pojemność w równoległym układzie zastępczym. Rezystancji strat w tym pomiarze nie wyznacza się. Związek między pojemnością zastępczego układu szeregowego i równoległego jest następujący:

$$C_s = C_p (1 + \operatorname{tg}^2 \delta) \quad (233)$$

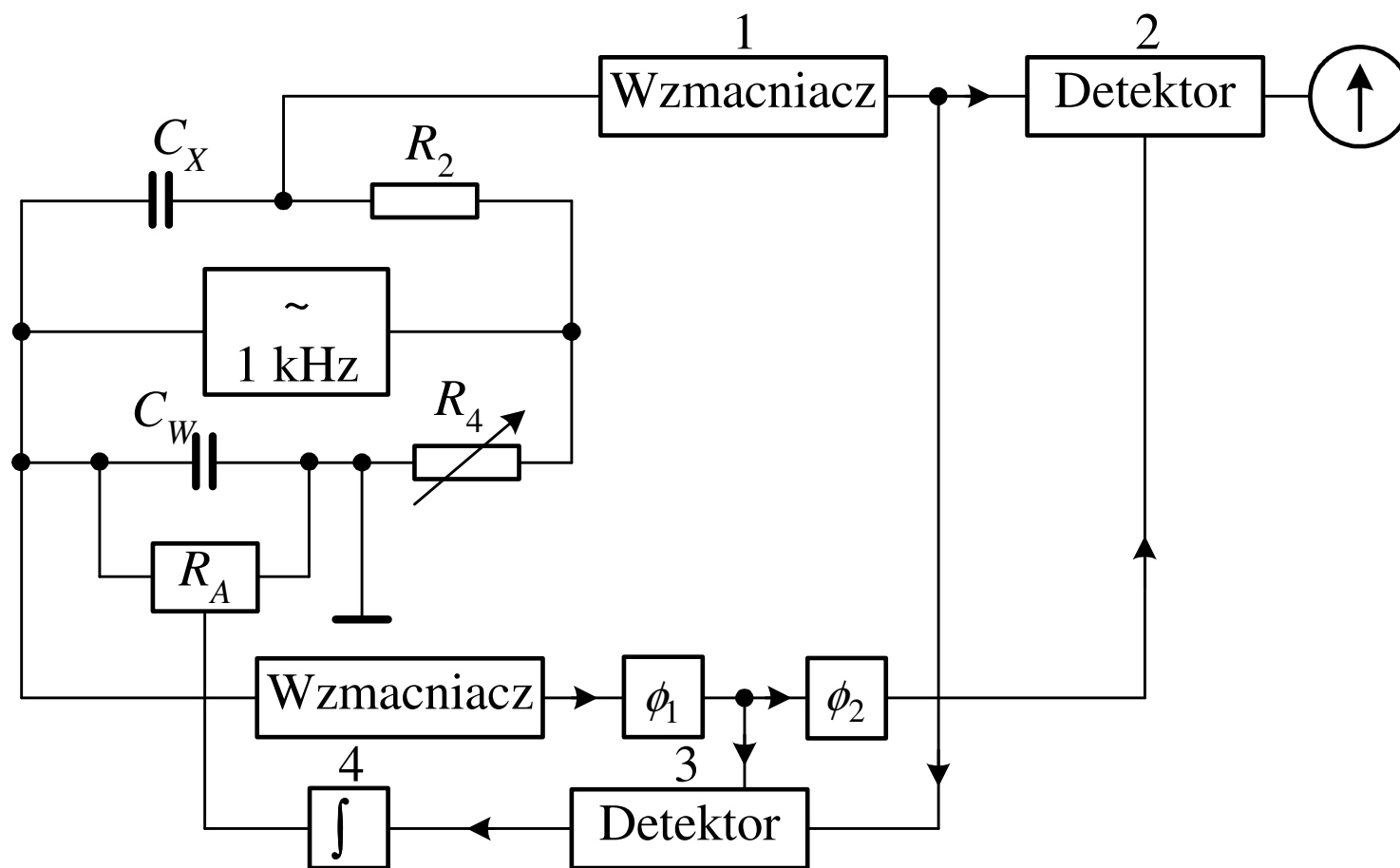


Rys.49. Mostek do pomiaru pojemności z automatycznym równoważeniem rezystancji strat.

Działanie mostka z automatycznym równoważeniem rezystancji strat cewki lub kondensatora wyjaśnia schemat blokowy na rys.50, na przykładzie pomiaru pojemności. Rezystorem dekadowym R_4 w mostku równoważy się ręcznie składową reaktancyjną elementu mierzonego, natomiast składową rezystancyjną równoważy automatycznie rezystancja sterowana R_A połączona z kondensatorem wzorcowym. Rezystancję sterowaną stanowi fotorezystor oświetlany diodą elektroluminescencyjną. Fotorezystor nieoświetlony ma bardzo dużą rezystancję, natomiast w miarę zwiększania natężenia oświetlenia rezystancja ta maleje. Intensywność oświetlenia zależy od prądu diody elektroluminescencyjnej.

Napięcie nierównowagi mostka jest wzmacniane we wzmacniaczu 1 (rys.50), następnie prostowane w detektorze fazoczułym 2 i doprowadzone do magnetoelektrycznego wskaźnika nierównowagi. Detektor fazoczuły sterowany napięciem z przesuwnika fazowego φ_2 ,

wprowadzającego przesunięcie fazowe 90^0 , wyodrębnia z napięcia niezrównoważenia wartość zależną od niezrównoważenia składowej reaktancyjnej mierzonej impedancji. Napięcie pobrane z kondensatora wzorcowego jest napięciem odniesienia dla obu detektorów fazoczułych. Detektor 3 sterowany napięciem z przesuwnika fazowego ϕ_1 wyodrębnia z napięcia nierównowagi wartość proporcjonalną do składowej rezystancyjnej elementu mierzonego. Napięcie z detektora 3 jest całkowane w układzie 4, który steruje diodą elektroluminescencyjną a tym samym fotorezystorem. Prowadzi to do równoważenia mostka. Półautomatyczny pomiar indukcyjności L_A przebiega analogicznie do opisanego pomiaru C_A . Laboratoryjne półautomatyczne mostki RLC mają dekadowy rezystor równoważący i umożliwiają pomiar wartości R, L, C na wielu zakresach z błędami podstawowymi od $\pm 0,1\%$ do $\pm 0,5\%$, zależnie od zakresu i wielkości mierzonej.



Rys. 50. Schemat blokowy półautomatycznego mostka do pomiaru pojemności

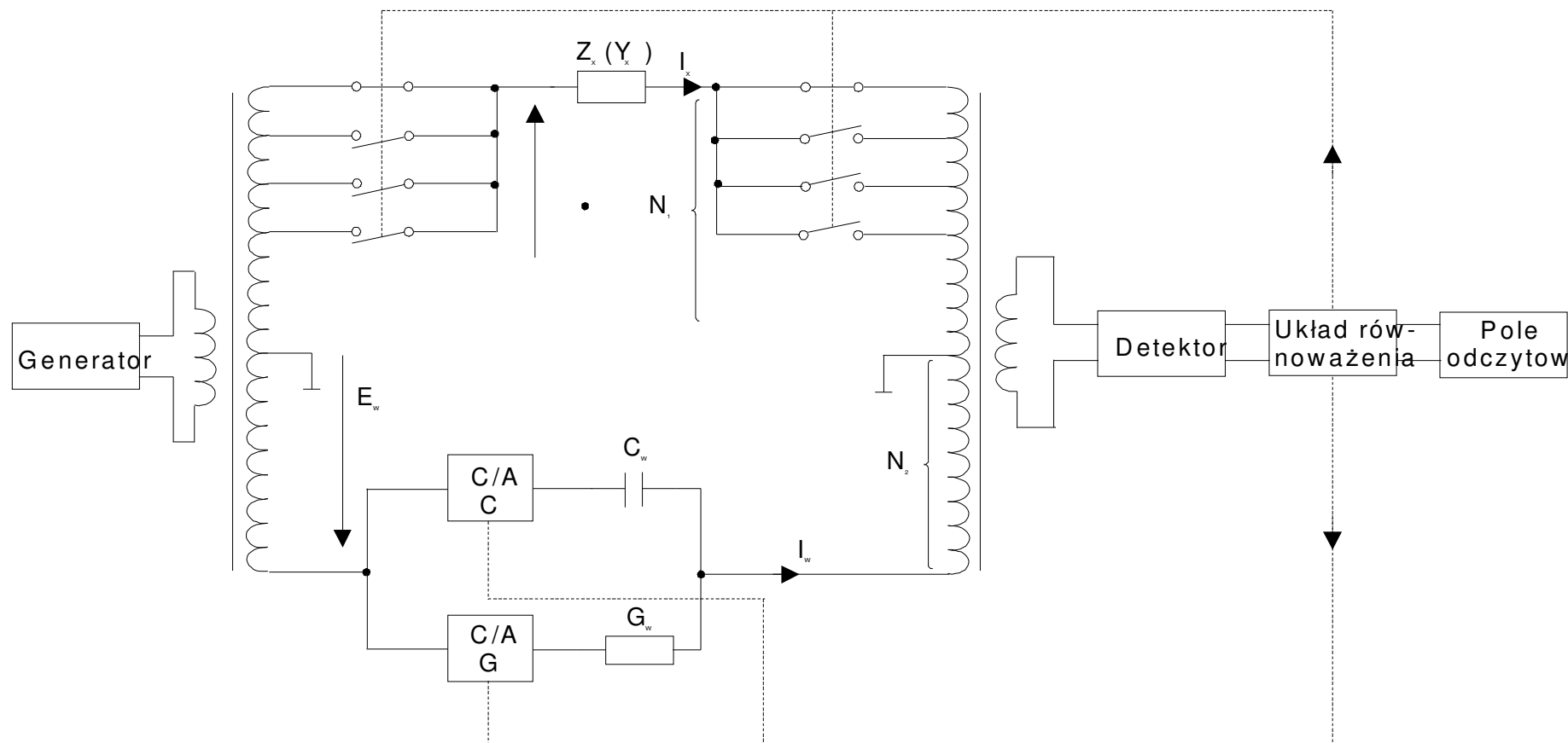
Mostki automatyczne RLC - cyfrowe

Cyfrowe mostki prądu przemiennego, podobnie jak równoważone ręcznie, są stosowane do pomiarów indukcyjności, pojemności, strat dielektrycznych i rezystancji.

Algorytm automatycznego równoważenia mostka cyfrowego prądu przemiennego jest skomplikowany, ponieważ konieczne jest jednoczesne równoważenie dwóch składowych impedancji: reaktancyjnej i rezystancyjnej lub susceptancyjnej i konduktancyjnej.

Najczęściej automatyzowane są mostki transformatorowe (nazywane także różnicowymi), ze względu na takie ich korzystne właściwości metrologiczne jak szeroki zakres pomiarowy i duża dokładność.

Ze względu na sposób automatycznego równoważenia i cyfrowego wskazywania (indykacji) składowych impedancji, mostki można podzielić na dwie grupy. W mostkach pierwszej grupy równoważenie automatyczne i cyfrowa ekspozycja wyniku obejmuje tylko główną składową, np. L lub C , natomiast składowa resztkowa (rezystancja strat) jest równoważona automatycznie bez możliwości odczytu. W mostkach drugiej grupy równoważenie obydwu składowych przebiega automatycznie i obie są wyświetlane w postaci wartości cyfrowej.



Rys.51. Schemat funkcjonalny cyfrowego mostka prądu przemiennego

Uproszczony schemat funkcjonalny mostka cyfrowego z oddzielnym wyświetlaniem obydwu składowych (np. C i $\operatorname{tg} \delta$) pokazano na rys.51. Mostek jest zrównoważony wówczas, gdy $N_1 \underline{I}_x = N_2 \underline{I}_w$, a ponieważ

$$\underline{I}_x = \frac{\underline{E}_x}{\underline{Z}_x} \text{ oraz } \underline{I}_w = \frac{\underline{E}_w}{\underline{Z}_w} \quad (234)$$

zatem impedancja mierzona

$$\underline{Z}_x = \frac{N_1}{N_2} \frac{\underline{E}_x}{\underline{E}_w} \underline{Z}_w \quad (235)$$

Równoważenie mostka odbywa się przez zmianę ilorazów N_1/N_2 i E_x/E_w oraz składowych impedancji Z_w . Automatyczna zmiana zakresów odbywa się poprzez zmianę ilorazów N_1/N_2 i E_x/E_w . Uzyskuje się to za pomocą odpowiednich układów przełączających składających się z przełączników tranzystorowych i przekładników. Dokładne zrównoważenie mostka uzyskuje się za pomocą dwóch przetworników cyfrowo - analogowych. Jeden z nich znajduje się w torze składowej biernej (susceptancyjnej), a drugi w torze składowej czynnej (konduktancyjnej). Sygnały analogowe tych przetworników sterują wartościami C_w i G_w . Równoważenie mostka rozpoczyna się wtedy, gdy detektor zera wykaże stan nie zrównoważenia. Detektor zera jest układem fazoczułym i w związku z tym sygnał nie zrównoważenia jest rozkładany na dwie składowe przesunięte względem siebie w fazie o 90° . Sygnały te są podawane do układu równoważenia, który przez przetworniki cyfrowo - analogowe w kolejnych cyklach powoduje równoważenie jednej składowej, a następnie drugiej. W czasie równoważenia każdej składowej detektor wysyła impulsy do licznika zmieniając jego stan oraz zmieniając napięcie wyjściowe z przetwornika cyfrowo - analogowego. Stan dekad C_w i G_w po zakończeniu procesu równoważenia jest dekodowany i wyświetlany na dwuczęściowym polu odczytowym.

Błędy przy pomiarach mostkami prądu przemiennego

Dokładność mostków prądu przemiennego jest na ogół mniejsza niż dokładność mostków prądu stałego. Głównymi przyczynami powstawania błędów pomiaru w układach mostków prądu przemiennego są:

- niedokładność elementów mostka;
- niedostateczna czułość mostka;
- wpływ szkodliwych sprzężeń i zakłóceń.

Błędy podstawowe elementów R, L, C , określone ich klasą dokładności przy częstotliwości akustycznej (najczęściej stosowane w mostkach pomiarowych), zwykle są mniejsze niż 0,1%; w specjalnych wykonaniach elementy te są trochę dokładniejsze. Ograniczenia dokładności elementów przy prądzie przemiennym wynikają głównie z wewnętrznych indukcyjności i pojemności pasożytniczych wzorców R, L, C . Błąd systematyczny graniczny pomiaru mostkiem, wynikający z niedokładności elementów, oblicza się jako sumę odpowiednich błędów względnych impedancji ramion mostka według wzorów podanych przy omawianiu kolejnych mostków.

Niedostateczna czułość mostka może być dodatkowym źródłem błędów pomiaru, tzn. błędów nieczułości. Właściwy dobór czułości umożliwia ograniczenie błędu nieczułości do dostatecznie małej wartości.

Przy analizie czułości prądu przemiennego stosuje się wiele określeń: czułość prądowa, napięciowa, mocowa, bezwzględna, względna, całkowita, jednostkowa itp. Przy stosowaniu elektronicznych wskaźników równowagi zwykle wyznacza się czułość względną napięciową

$$S_u = \lim_{\delta_{Z_1} \rightarrow 0} \frac{\Delta U_g}{\delta_{Z_1}} \quad (236)$$

przy czym ΔU_g - przyrost napięcia w gałęzi wskaźnika, wywołany rozrównoważeniem mostka o

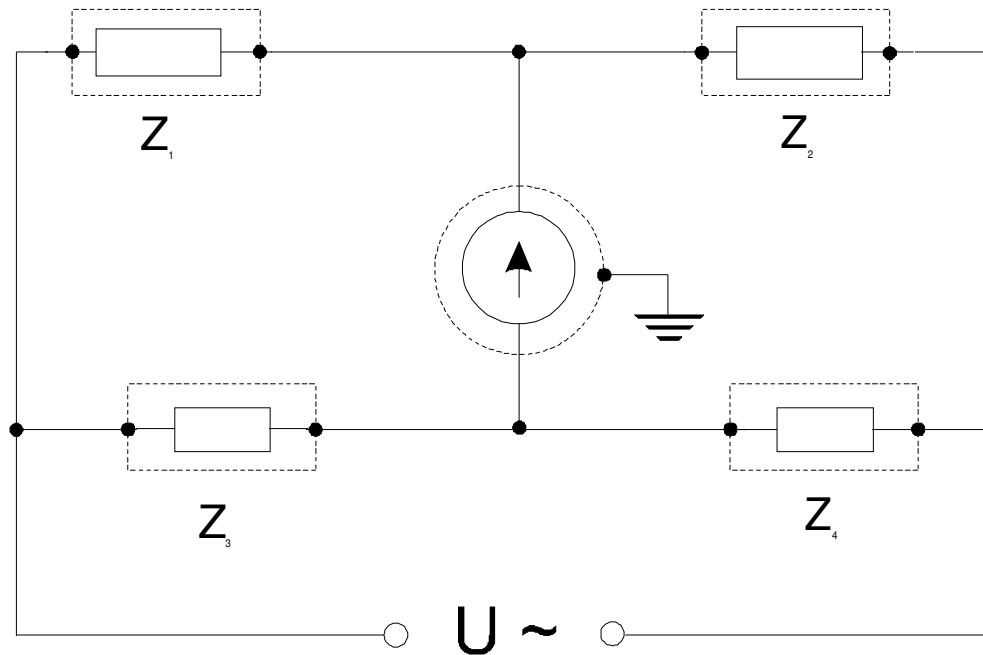
$$\delta_{Z_1} = \Delta Z_1 / Z_1 \quad (237)$$

Czułość mostka zależy od trzech czynników: parametrów źródła zasilania, parametrów wskaźnika równowagi i od doboru impedancji ramion mostka. Wzrost napięcia lub prądu zasilającego mostek powoduje wzrost czułości, natomiast duża czułość wskaźnika równowagi ma decydujący wpływ na dużą czułość mostka. Uzyskanie maksymalnej czułości wiąże się z wieloma trudnościami konstrukcyjnymi. Jednak przebieg czułości w zależności od zmian wartości impedancji poszczególnych ramion ma charakter dość płaski. W związku z tym odstępstwa w pewnych granicach od warunków optymalnych nie powodują istotnego obniżenia czułości. Osiągnięcie wymaganej czułości w mostkach prądu przemiennego nie nastrocza większych trudności.

Szkodliwe sprzężenie między elementami mostka a otoczeniem oraz między samymi elementami zniekształcają teoretyczny układ mostka i powodują wystąpienie prądów, które nie były uwzględnione przy rozpatrywaniu układu mostka. Wynikają z tego inne warunki równowagi mostka, bliżej nieokreślone, co jest powodem występowania dodatkowych błędów pomiaru. Rozróżnia się sprzężenia rezystancyjne, indukcyjne i pojemnościowe.

Sprzężenia rezystancyjne powstają wskutek upływności izolacji. Współczesne materiały izolacyjne skutecznie ograniczają wpływ tych sprzężeń. Sprzężenia indukcyjne występują

najsilniej między transformatorami, cewkami i elementami z nimi sąsiadującymi. Sprężenia indukcyjne ogranicza się przez magnetyczne ekranowanie transformatorów i cewek, umieszczanie elementów w dużych odległościach od siebie, skręcania parami przewodów łączących itp. Sprężenia pojemnościowe występują między elementami mostka a masą oraz między elementami. Powodują one istotne błędy pomiaru, zwłaszcza przy większych częstotliwościach. Wpływ tych sprężeń na wynik pomiaru ogranicza się przez elektrostatyczne ekranowanie elementów i łączenie ekranów do odpowiednich punktów mostka. Nie eliminuje się w ten sposób pojemności szkodliwych, lecz powoduje się ich ustalenie w określonych punktach układu, dzięki czemu zmiana położenia elementów przewodzących (np. ręki mierzącego) w pobliżu układu nie wpływa na stan równowagi. Przykład ekranowania mostka podano na rys.52. Dołączenie ekranów do węzłów mostka wprowadza pojemności dodatkowe; niektóre z nich zmieniają impedancje w mostku, inne zaś nie. Ustalone pojemności sprężeń mogą być uwzględnione przy wzorcowaniu układu pomiarowego.

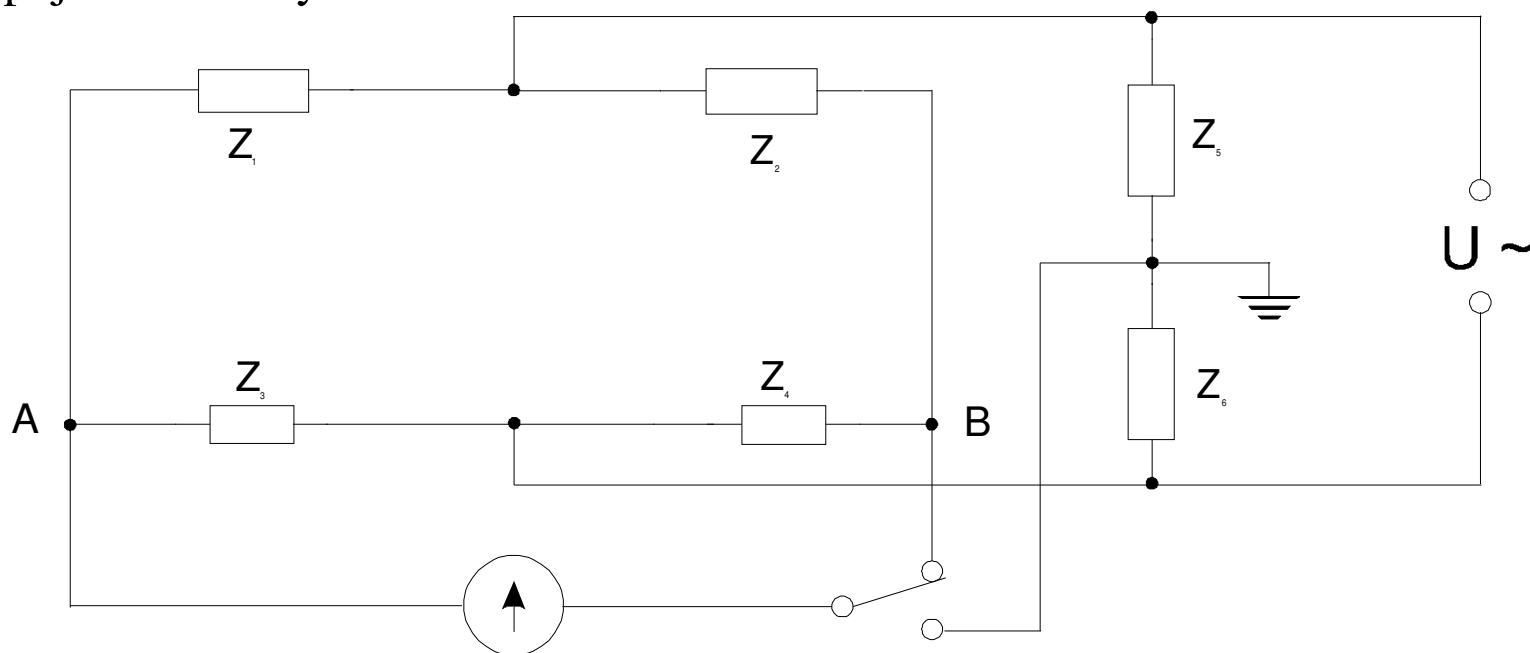


Rys.52. Przykład ekranowania mostka

Lepsze ograniczenie wpływu sprzężeń pojemnościowych osiąga się przez zastosowanie w mostku dodatkowego transformatora wejściowego i transformatora wyjściowego. Transformator wejściowy, o ekranowanych uzwojeniach, umożliwia eliminowanie sprzężeń pojemnościowych między generatorem i mostkiem. Transformator wyjściowy, o ekranowanych uzwojeniach, znacznie ogranicza wpływ sprzężeń pojemnościowych między wskaźnikiem równowagi a mostkiem.

Wpływ sprzężeń pojemnościowych ogranicza się również przez zastosowanie tzw. gałęzi Wagnera, pokazanej razem z mostkiem na rys.53. Gałąź Wagnera utworzona z impedancji Z_5 i Z_6 stanowi mostek pomocniczy z ramionami Z_1 i Z_3 mostka głównego. Równoważy się na

przemian mostek główny i pomocniczy, aż do otrzymania pełnej równowagi obu mostków. Wówczas węzły A, B i C układu mają potencjał masy, dzięki temu znikają prądy pojemnościowe doziemne z punktów dołączenia wskaźnika. Jeśli ponadto są uziemione obudowy źródła zasilania i wskaźnika równowagi, to eliminuje się praktycznie cały wpływ sprzężeń pojemnościowych.



Rys.53. Układ mostka z gałęzią Wagnera

Produkowane fabrycznie mostki prądu przemiennego są budowane najczęściej jako przyrządy zamknięte, zawierające we wspólnej obudowie elementy R, L, C wzorcowe i równoważące, transformatory, generator napięcia sinusoidalnego zasilającego mostek, elektroniczny wskaźnik równowagi i potrzebne przełączniki. Cały przyrząd jest zasilany z sieci lub z

wewnętrznej baterii. Są konstruowane jako przyrządy przeznaczone do pomiaru parametrów kondensatorów lub cewek, lub przyrządy uniwersalne do pomiaru wielu parametrów obwodów RLC. Zamknięta konstrukcja mostków pozwala skutecznie ograniczyć wpływ sprzężeń i zakłóceń zewnętrznych na błąd pomiaru.

Literatura

- [1] Chwaleba A., Poniński M., Siedlecki A.: Metrologia elektryczna. WNT, Warszawa, 1998.
- [2] Dusza J., Gortat G., Leśniewski A.: Podstawy miernictwa. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1998.
- [3] Jędrzejowski K. i inni: Laboratorium podstaw miernictwa. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1998.
- [4] Zielonko R. i inni: Laboratorium z podstaw miernictwa. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 1998.
- [5] Kołodziejski J., Spiralski L., Stolarski E.: Pomiary przyrządów półprzewodnikowych. WKiŁ, Warszawa 1990.