Potencjał grawitacyjny - MES

Adrian Suliga

12.01.2025

Treść problemu

$$\frac{d^2(\Phi)}{dx^2} = 4\pi G\rho(x)$$

$$\Phi(0) = 5$$

$$\Phi(3) = 4$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 \text{ gdy } & x \in [0, 1] \\ 1 \text{ gdy } & x \in (1, 2] \\ 0 \text{ gdy } & x \in (2, 3] \end{cases}$$

Szukaną jest funkcja $\Phi(x)$.

Sformułowanie wariacyjne problemu

$$\Phi'' = 4\pi G\rho$$

Niech $v : [0, 3] \to \mathbb{R}, v \in V$ gdzie V jest przestrzenią funkcji zerujących się na brzegach. Obustronnie mnożymy przez v powyższe równanie.

$$\Phi'' v = 4\pi G\rho v$$

Następnie całkujemy je na $[0, 3]$

$$\int_0^3 \Phi'' v \; dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v \; dx$$

Stosujemy całkowanie przez części aby uzyskać

$$[\Phi' v]_0^3 - \int_0^3 \Phi' v' \; dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v \; dx$$

$$v \in V \Rightarrow v(3) = v(0) = 0 \Rightarrow [\Phi' v]_0^3 = 0$$

Mamy więc

$$-\int_0^3 \Phi' v' \; dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v \; dx$$

Niech

$$B(\Phi, v) = -\int_0^3 \Phi' v' \; dx$$

$$L(v) = 4\pi G \int_1^2 v \; dx$$

Nasze początkowe równanie ma zatem postać

$$B(\Phi, v) = L(v)$$

Warunki brzegowe

Przez niezerowe warunki Dirichleta musimy skonstruować przesunięcie:

$$\Phi = w + \overline{\Phi} \text{ gdzie } w \in V$$

$$\overline{\Phi} = Ax + B, \overline{\Phi}(0) = 5, \overline{\Phi}(3) = 4$$

$$\begin{cases} 0 * A + B = 5 \\ 3 * A + B = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 5 \\ A = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\overline{\Phi}(x) = 5 - \frac{x}{3}$$

Tak skonstruowana funkcja $\overline{\Phi}$ spełnia warunki brzegowe, wracając do równania, możemy zapisać je w postaci:

$$B\left(w + \overline{\Phi}, v\right) = L(v)$$

B jest liniowe względem pierwszego argumentu, zatem:

$$B(w, v) + B\left(\overline{\Phi}, v\right) = L(v)$$

$$B(w, v) = L(v) - B\left(\overline{\Phi}, v\right)$$

Przyjmując nowe oznaczenie $\overline{L}(v) = L(v) - B\left(\overline{\Phi}, v\right)$:

$$B(w, v) = \overline{L}(v)$$

Konstrukcja podprzestrzeni N elementów skończonych

Konstruujemy przestrzeń $V_h \subset V$ dzieląc przedział $[0, 3]$ na N równych części, każda o długości $h = \frac{3}{N}$. Dla takiego przedziału punkty brzegowe to:

$$x_0 = 0, x_i = ih, x_N = 3$$

$$x_{i-1} = x_i - h, x_{i+1} = x_i + h$$

Wybieramy funkcje bazowe w postaci:

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h} \text{ dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h} \text{ dla } x \in \left(x_i, x_{i+1}\right] \\ 0 \text{ dla innych przypadków} \end{cases} \quad \text{gdzie } i \in \{1, 2, ..., N-1\}$$

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1 \text{ dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ i + 1 - \frac{x}{h} \text{ dla } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0 \text{ dla innych przypadków} \end{cases}$$

$$\frac{d(e_i)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{h} \text{ dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{1}{h} \text{ dla } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0 \text{ dla innych przypadków} \end{cases}$$

Możemy więc zdefiniować $V_h =< e_1, e_2, ..., e_{N-1} >$

Problem przybliżony

Z rozważanego powyżej problemu możemy przejść na problem przybliżony. Znaleźć $w_h \in V_h$, które spełnia:

$$B(w_h, v_h) = \overline{L}(v_h) \text{ dla każdego } v_h \in V_h$$

$$w \approx w_h = \Sigma_{i=1}^{N-1} w_i e_i$$

Mamy więc układ $N - 1$ równań.

$$B\left(\Sigma_{i=1}^{N-1} w_i e_i, v_j\right) = \overline{L}\left(v_j\right) \text{ dla } j \in \{0, 1..., N\}$$

Przyjmujemy $v_j = e_j$.

$$B\left(\Sigma_{i=1}^{N-1} w_i e_i, e_j\right) = \overline{L}\left(e_j\right)$$

B jest liniowe względem pierwszego argumentu, zatem:

$$\Sigma_{i=1}^{N-1} w_i B\left(e_i, e_j\right) = \overline{L}\left(e_j\right)$$

Układ równań w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) & ... & B(e_{N-1}, e_1) \\ B(e_1, e_2) & B(e_2, e_2) & ... & B(e_{N-1}, e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1, e_{N-1}) & B(e_2, e_{N-1}) & ... & B(e_{N-1}, e_{N-1}) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{L}(e_1) \\ \overline{L}(e_2) \\ \vdots \\ \overline{L}(e_{N-1}) \end{pmatrix}$$

Musimy zatem policzyć

$$B\left(e_i, e_j\right) = -\int_0^3 e_i' e_j' \, dx$$

$$\overline{L}\left(e_j\right) = L\left(e_j\right) - B\left(\overline{\Phi}, e_j\right)$$

$$L\left(e_j\right) = 4\pi G \int_1^2 e_j \, dx$$

Łatwo zauważyć, że $B\left(e_i, e_j\right) = 0$ gdy $j < i - 1$ lub $j > i + 1$. W przeciwnym wypadku:

$$B(e_i, e_{i+1}) = B(e_{i+1}, e_i) = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} e_i' e_{i+1}' \, dx$$

$$B(e_i, e_i) = -\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e_i' e_i' \ dx \text{ dla } \ i \in \{1, 2, ..., N-1\}$$

Zauważamy również, że $L(e_j) = 0$ gdy $hj < 1$ lub $hj > 2$. W przeciwnym wypadku:

$$L(e_j) = 4\pi G \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e_j \ dx \text{ dla } j \in \{1, 2, ..., N-1\}$$

Ostatecznie, pamiętając że $\Phi' = -\frac{1}{3}$

$$B(\overline{\Phi}, e_j) = \frac{1}{3} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e_j' \ dx \text{ dla } j \in \{1, 2, ..., N-1\}$$

Kwadratura Gaussa

Aby zastosować kwadraturę Gaussa-Legendre'a do przybliżenia wartości całek muszę zamienić przedziały całkowania na $[-1, 1]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt$$

Wykorzystując, że

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \Sigma_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

Dla przedziału $[a, b]$ otrzymujemy:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \Sigma_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2} t_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

Przyjmujemy $n = 2 \Rightarrow w_i = 1 \land t_i \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{b-a}{2} * \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a-b}{2} * \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) \right]$$

Rozwiązanie

Ostateczne rozwiązanie otrzymamy za pomocą dołączonego programu w języku C, który obliczy wartości $w_0, w_1, ..., w_N$. Dzięki tym wartościom uzyskamy:

$$\Phi(x) = w + \overline{\Phi} \approx \Sigma_{i=0}^N w_i e_i + 5 - \frac{x}{3}$$

Uruchomienie programu wymaga instalacji biblioteki gsl. Można ją zainstalować poprzez manager paczek.

```
sudo apt update && sudo apt install libgsl-dev // Na Linuxach bazujących na Debianie
```

```
sudo dnf install gsl-devel // dla systemów Linux Fedora/RHEL
```

```
brew install gsl // na macOS
```

Uruchomienie solvera wymaga wcześniejszej kompilacji pliku mes_solver.c, przy pomocy gcc można to zrobić tak:

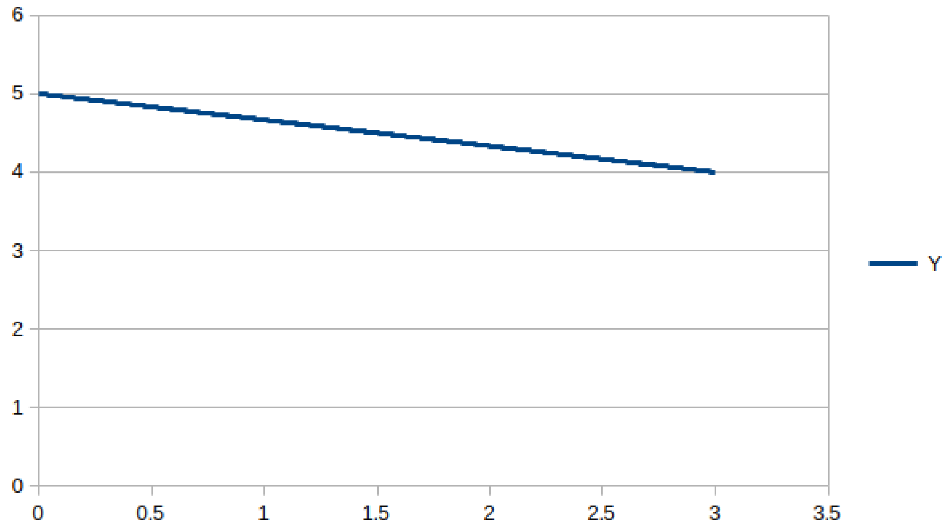
```
gcc -o mes_solver mes_solver.c -lgsl -lgslcblas -lm
```

Podczas uruchamiania solvera można przekazać mu N jako parametr, jeśli nie przekażemy żadnego to program automatycznie przyjmie $N = 20$.

Program zapisze uzyskane wartości $(x, \Phi(x))$ do pliku result.csv, który można później otworzyć, np. programem Excel.

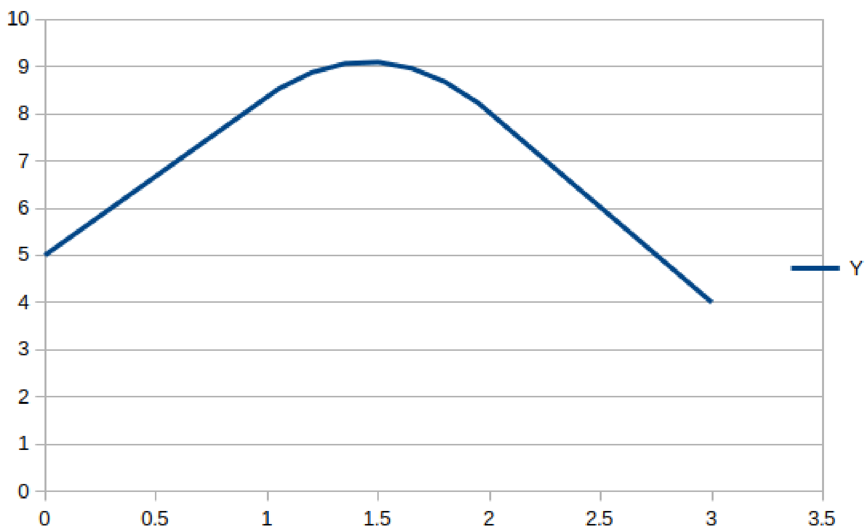
Wyniki

Uzyskujemy wykres



Rysunek 1: $\Phi(x)$ dla $N = 20$

Może się on wydawać linią prostą, wynika to z bardzo małej stałej G użytej w obliczeniach. Jeśli przyjmiemy zamiast niej stałą większą o kilka rzędów wielkości, np. $G = 6.6743 * 10^{-1}$, to uzyskamy:



Rysunek 2: $\Phi(x)$ dla $N = 20$ i stałej $G = 6.6743 * 10^{-1}$

Widać więc, że $\Phi(x)$ nie jest funkcją liniową.