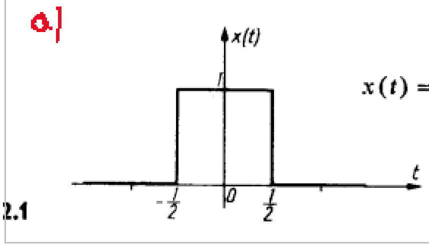
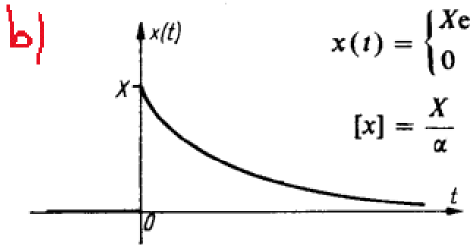
<table>
<tr><th>Nr zadania:</th><th>Opis</th><th>Ćwiczenie nr:</th></tr>
<tr><td></td><td>

Wyznaczyć energię lub moc poniższych sygnałów:



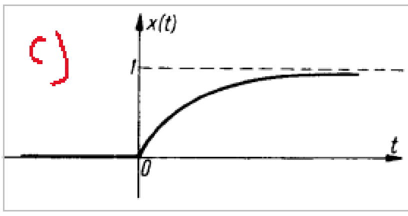
$$x(t)=\Pi(t)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad |t|>\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad |t|=\frac{1}{2}\\ 1 & \text{dla} \quad |t|<\frac{1}{2}\end{cases}$$

2.1 $[x]=1 \quad E_x=1$



$$x(t)=\begin{cases}Xe^{-\alpha t} & \text{dla} \quad t\geqslant 0\\ 0 & \text{dla} \quad t<0\end{cases} \qquad \alpha>0$$

$$[x]=\frac{X}{\alpha} \qquad E_x=\frac{X^2}{2\alpha}$$



$$x(t)=(1-e^{-\alpha t})\mathbf{1}(t), \qquad \alpha>0$$

$$\langle x\rangle=\frac{1}{2} \qquad P_x=\frac{1}{2}$$

</td><td>Ćwiczenie nr:
4: 1/3</td></tr>
</table>

Wzory:
Całka sygnału: $Ex=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$
Energia sygnału to $Ex=\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$
Moc sygnału to $Px=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|x(t)|^2dt,\ Px\_periodyczny=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}|x(t)|^2dt$

Sygnał Energetyczny – to znaczy, że pole pod krzywą się kończy, przypadek a) i b);
Sygnał Mocy – to znaczny, że pole pod krzywą się nie kończy, przypadek c).

a) To jest unormowany impuls prostokątny o jednostkowym czasie trwania i jednostkowej amplitudzie. Oznaczamy go specjalnym symbolem $\pi(t)$. Posługując się tym symbolem możemy zapisać dowolny impuls prostokątny o szerokości **a**, wysokości **b** i przesunięty względem zera o czas **c**, czyli $\frac{a\pi(t-c)}{b}$. To sygnał o ograniczonej energii i skończonym czasie trwania.

$-\frac{1}{2}\leq t\leq\frac{1}{2},\quad x(t)=1$

$$Ex=[x]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}x(t)^2dt=x(t)^2\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}dt=x(t)^2[t]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}$$

$$Ex=1\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=1$$

b) Jest to sygnał wykładniczy malejący czyli sygnał ciągły o nieskończonym czasie trwania, energia sygnału jest skończona

Dla $Xe^{-\alpha t}$ czyli mamy $x(t) = Xe^{-\alpha t}$

$$Ex = [x]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt = \int_0^{+\infty} (Xe^{-\alpha t})^2 dt = \int_0^{+\infty} X^2 e^{-2\alpha t} dt = X^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt$$

Dalej dokonujemy podstawienia

$$\int e^{-2\alpha t} dt = \left| u = -2\alpha t, du = -2\alpha, dt = -\frac{1}{2\alpha} du \right| = \int e^u \left(-\frac{1}{2\alpha}\right) du$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} \int e^u \, d \qquad u$$

Wracając do całki

$$-\frac{X^2}{2\alpha} \int_0^{+\infty} e^u du = -\frac{X^2}{2\alpha} [e^{+\infty} - e^0] = |e^{+\infty} \to 0, e^0 \to 1| = -\frac{X^2}{2\alpha} * (-1)$$

$$= \frac{X^2}{2\alpha}$$

c) Jest to sygnał wykładniczy narastający,

Całka sygnału:

$$x(t) = (1 - e^{-\alpha t})$$

$$Px = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

$$\int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+T} |(1 - e^{-\alpha t})|^2 dt$$

$$\int_0^{+T} (1 - 1 * 2 * e^{-\alpha t} + e^{-2\alpha t}) dt =$$

$$\int_0^{+T} 1 dt - 2 \int_0^{+T} e^{-\alpha t} dt + \int_0^{+T} e^{-2\alpha t} dt =$$

$$T - 2 \int_0^{+T} e^{-\alpha t} dt + \int_0^{+T} e^{-2\alpha t} dt =$$

$$T + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha t}|_0^T - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t}|_0^T = T + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha T} + \frac{1}{2\alpha}$$

$$Px = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} (T + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha T} + \frac{1}{2\alpha})$$

$$Px = \lim_{T\to\infty} (\frac{1}{2T} T + \frac{1}{2T}\frac{2}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{2T}\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{2T}\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha T} + \frac{1}{2T}\frac{1}{2\alpha})$$

$$Px = \lim_{T\to\infty} (\frac{1}{2} + \frac{e^{-\alpha T}}{T\alpha} - \frac{1}{T\alpha} - \frac{e^{-2\alpha T}}{4T\alpha} + \frac{1}{4T\alpha})$$

$$T\alpha\ and\ 4T\alpha \to\ \infty$$
$$e^{-\alpha T}\ and\ e^{-2\alpha T} \to 0$$
$$\frac{e^{-\alpha T}}{T\alpha} = \frac{0}{\infty} = 0$$
$$\frac{e^{-2\alpha T}}{4T\alpha} = \frac{0}{\infty} = 0$$
$$\frac{1}{T\alpha}\ = \frac{1}{\infty} = 0, granica$$
$$Px = < x >= \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2} + 0 - 0 - 0 + 0\right) = \frac{1}{2}$$

Dodatek 1)

$$x(t) = e^{-t}$$
$$Ex = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = Ex = \int_0^{+\infty} |e^{-t}|^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt =$$
$$-\frac{1}{2}e^{-2t}|_0^{\infty} = -\frac{1}{2}e^{-2\infty} - \left(-\frac{1}{2}e^{-2*0}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dodatek 2)

$$x(t) = \cos\,(t)$$
$$Px_p = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{+\frac{T}{2}} |\cos(t)|^2 dt =$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{+\frac{T}{2}} \cos^2(t)\,dt =$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{+\frac{T}{2}} \frac{1 + \cos\,(2t)}{2} dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ [\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}]_0^{\frac{T}{2}} =$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\frac{T}{4} + \frac{\sin(T)}{4}\right] = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{4} + \frac{\sin(T)}{4T}\right];\ \ \sin(T) \to\ \infty; 4\mathrm{T} \to\ \infty;\ \ \frac{\sin(T)}{4T}\ =\ \frac{\infty}{\infty} = 0$$
$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{4} + \frac{\sin(T)}{4T}\right] = \frac{1}{4}$$

*) dolna granica jest 0, pominąłem.

Dodatek 3)

$$x(t) = \mathrm{A}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$Px_p = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |\mathrm{A}\sin(\omega_0 t + \varphi)|^2 dt =$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \frac{1 + \cos\,(2\omega_0 t + 2\varphi)}{2} dt =$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt - \frac{A^2}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)\,dt =$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\left[\cos(\omega_0 T+2\varphi)-\cos(\omega_0(-T)+2\varphi)\right]=\infty-\infty=0$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}dt-0=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\left[\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right]=\frac{A^2}{2}$$