① Wyznacz transformatę Laplace'a sygnału $f(t) = \delta(t) + e^{-2t} u(t)$ i określ region zbieżności ROC.

__Odpowiedź:__ Transformata Laplace'a sygnału $f(t) = \delta(t) + e^{-2t} u(t)$ to:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 1 + \frac{1}{s+2}$$

z regionem zbieżności $s > -2$.

② Treść zad. jak wyżej: $f(t) = 2\delta(t-1) + 5e^{-2t} u(t-3) + 3\delta(t-4) + e^{-t} u(t-2)$

__Odpowiedź:__ Transformata Laplace'a powyższego sygnału:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2e^{-s} + \frac{5e^{-3s}}{s+2} + 3e^{-4s} + \frac{e^{-2s}}{s+1}$$

gdzie region zbieżności to $s > -\underline{1}$.

① → Transformata Laplace'a dla $\delta(t)$ jest $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

Transformata jest zdefiniowana dla wszystkich wartości s, ponieważ delta Diraca jest fun., która skupia się w punkcie $t=0$.

→ Transformata Laplace'a dla $e^{-2t}u(t)$

Z tablic mamy: $\mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} = \frac{1}{s-a}$, $s>a$

W treści zadania a wynosi: $a=-2$, podstawiając:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{s-(-2)} = \frac{1}{s+2}, \quad s>-2.$$

→ Zatem transformata wynosi:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} + \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\}.$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = 1 + \frac{1}{s+2}.}$$

→ Określenie ROC

- Dla funkcji $\delta(t)$ nie ma ograniczeń co do zbieżności
- Dla funkcji $e^{-2t}u(t)$ ROC wynosi $s>-2$
- Suma tych funkcji ohieli ten sam ROC ⇒ całkowity region zbieżności:

$$\boxed{ROC: s>-2.}$$

② → Transformata Laplace'a dla $2\delta(t-1)$

Korzystamy ze wzoru: $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$, u nas $a=1$ ⇒

$$\mathcal{L}\{2\delta(t-1)\} = 2e^{-1s} = 2e^{-s}$$

→ Transformata Laplace'a dla $5e^{-2t}u(t-3)$

Korzystamy ze wzoru: $e^{at}u(t-b)$ czyli $\mathcal{L}\{e^{at}u(t-b)\} = e^{-bs}\frac{1}{s-a}$, $s>a$

u nas: $a=-2 \wedge b=3$

$$\mathcal{L}\{5e^{-2t}u(t-3)\} = 5e^{-3s}\frac{1}{s+2} = \frac{5e^{-3s}}{s+2}, \quad s>-2$$

→ $3\delta(t-4) \Rightarrow \mathcal{L}\{3\delta(t-4)\} = 3e^{-4s}$

→ $e^{-t}u(t-2) \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{-t}u(t-2)\} = e^{-2s}\frac{1}{s+1} = \frac{e^{-2s}}{s+1}, \quad s>-1$

→ SUMARYCZNIE:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = 2e^{-s} + \frac{5e^{-3s}}{s+2} + 3e^{-4s} + \frac{e^{-2s}}{s+1}}$$

→ Określenie ROC

Region zbieżności ROC jest kluczowym aspektem analizy transf. Laplace'a ponieważ określa zakres wartości s, dla których transformata konwertuje.

✓ Dla $2\delta(t-1)$ (*)

Delta Diraca nie narzuca ograniczeń co do zbieżności więc ROC dla tego składnika to wszystkie wartości $s \rightarrow s \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$

ROC: wszystkie s (**)

✓ Dla $5e^{-2t}u(t-3)$

Używamy wzoru na transf. Lap. która wymaga, aby $s>a$, gdzie a jest wykładnikiem. W naszym zadaniu $\underline{a=-2}$, zatem:

ROC: $s>-2$

✓ Dla $3\delta(t-4)$ $\rightarrow$ podobnie do (*) $\rightarrow$ **ROC: wszystkie s**

✓ Dla $e^{-t}u(t-2)$ $\rightarrow$ podobnie do (**) $\rightarrow$ **ROC: $s>-1$**

→ Łączymy ROC mając zmodyfikowane regiony zatem łącząc je:

- $2\delta(t-1) \wedge 3\delta(t-4)$ $\rightarrow$ ROC to wszystkie s
- $5e^{-2t}u(t-3)$ $\rightarrow$ ROC to $s>-2$
- $e^{-t}u(t-2)$ $\rightarrow$ ROC to $s>-1$

Najbardziej rygorystyczne wymaganie dla ROC to $e^{-t}u(t-2)$, które wymaga aby $s>-1$

→ FINALNIE

Łącząc powyższe wymagania otrzymujemy: $\boxed{ROC: s>-1}$ $\Rightarrow$ transf. Lap. konwertuje dla wszystkich wartości $s>-1$ inne wartości $s \leq -1$ war. zbieżności nie są spełnione dla wszystkich składników sygnałów.

→ PODSUMOWUJĄC

✓ Każda fun. może mieć swoje własne wymagania dotyczące zbieżności

✓ ROC dla całego wyrażenia jest określony przez najsurowsze wymagania ze wszystkich składników

✓ To, że Delta Diraca nie ma ograniczeń, nie wpływa na wymagania innych funkcji.