Układy równań liniowych

Adrian Szwaczyk

Projekt uwzględnia dwie metody iteracyjne (Jacobiego i Gaussa-Seidla) oraz jedną metodę bezpośrednią (faktoryzacja LU) rozwiązywania układów równań liniowych. Testy przeprowadzane są dla układów równań, które mogą powstać w wyniku dyskretyzacji równań różniczkowych i są powszechnie stosowane w takich zagadnieniach jak: elektronika, elektrodynamika, mechanika, badanie wytrzymałości materiałów i konstrukcji, symulacje odkształceń, naprężeń, przemieszczeń i drgań, akustyka, fotonika, termodynamika, dynamika płynów i wiele innych.

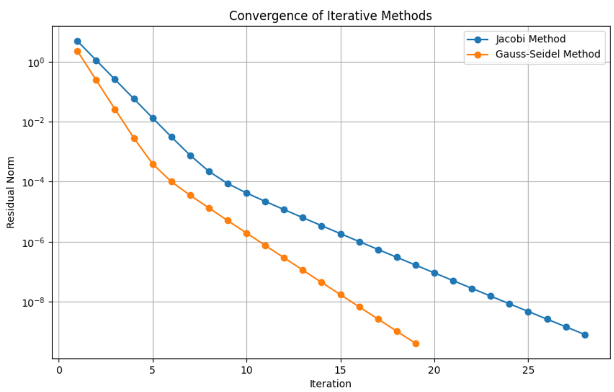
Celem projektu jest implementacja oraz przeprowadzenie analizy efektywności oraz dokładności powyższych metod rozwiązywania układów równań liniowych.

Określenie układu równań

Dla numeru 193233 – N = 933, a1 = 7, a2 = a3 = -1, f = 3. Na podstawie tych danych został utworzony układ równań, gdzie macierz A ma rozmiar 933 x 933, w której główna przekątna zawiera 7, a po dwie sąsiednie z każdej strony zawierają -1. Wektor b ma 933 elementy. Jego n-ty element jest równy sin(n * 3)).

Porównanie metod

Jak widać na wykresie, metoda Gaussa-Seidla potrzebuje 19 iteracji w celu wyznaczenia rozwiązania układu równań z zadania. Metoda Jacobiego potrzebuje 28 iteracji. Obie metody po około 5-7 iteracjach zaczynają wyraźnie wolniej zbliżać się do poprawnego rozwiązania. Czasy wykonania wynosiły:



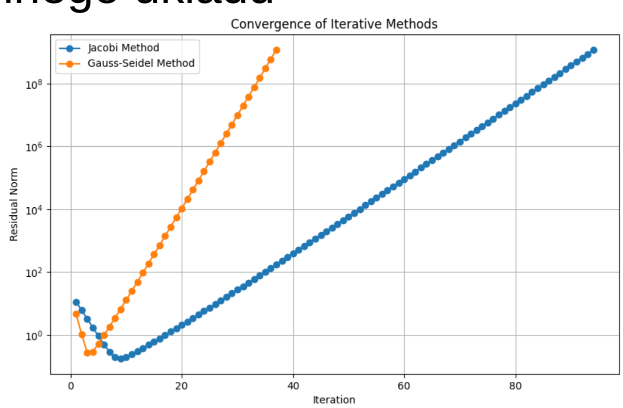
Jacobi Method Time: ~5.04s

Gauss-Seidel Method Time: ~3.45s

Metoda Gaussa-Seidla dla takiego układu równań znacznie szybciej znalazła rozwiązanie.

Porównanie dla innego układu

W tym zadaniu zmienne określające układ równań przyjmują następujące wartości: N = 933, a1 = 3, a2 = a3 = -1, f = 3. Jak widać na wykresie, obie metody po kilku iteracjach zaczynają oddalać się od poprawnego rozwiązania (norma residuum stale się zwiększa). W tym przypadku metody nie zbiegają się, nie mogą więc zostać użyte do rozwiązania tego układu równań.

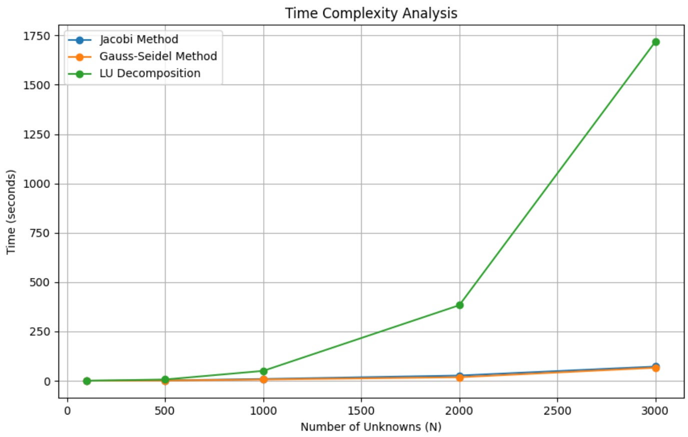


Norma residuum dla metody LU

Metoda faktoryzacji LU znalazła rozwiązanie dla układu równań z zadania C, z którym nie poradziły sobie dwie pozostałe metody. Norma residuum wynosi ~2.028e-13, błąd jest więc bardzo mały, co oznacza wysoką dokładność obliczeń.

Porównanie wydajności

Wykres przedstawia czas trwania poszczególnych algorytmów w zależności od liczby niewiadomych N = {100, 500, 1000, 2000, 3000}, gdzie pozostałe parametry mają takie same wartości jak w zadaniu A.



Dla każdego z algorytmów czas rośnie wraz ze zwiększaniem liczby niewiadomych. Metoda Gaussa-Seidla jest, przynajmniej przy czasie wykonania metody bezpośredniej, nieznacznie szybsza od metody Jacobiego, czas wykonania metod iteracyjnych rośnie w podobny sposób w zależności od liczby niewiadomych. Metoda faktoryzacji LU jest znacznie wolniejsza od metod iteracyjnych, zwłaszcza dla dużej liczby niewiadomych. Czas jej wykonania rośnie mniej więcej w tempie N^3.

Podsumowanie

Czas wykonywania obliczeń dla każdej metody zwiększa się przy większej ilości niewiadomych. Metody Gaussa-Seidla oraz Jacobiego są znacznie szybsze od metody faktoryzacji LU, zwłaszcza dla większych N, jednak nie zawsze zapewniają znalezienie rozwiązania układu równań. W zadaniu C metody iteracyjne nie były w stanie znaleźć rozwiązania, metodą bezpośrednią za to udało się to osiągnąć. Metoda Gaussa-Seidla jest znacznie szybsza od metody Jacobiego, jednak w porównaniu do prędkości faktoryzacji LU różnica między nimi wydaje się niewielka. Metoda bezpośrednia zawsze daje nam bardzo dokładny wynik. W metodach iteracyjnych jesteśmy w stanie dostosować dokładność wyniku, co może być przydatne, kiedy bardziej zależy nam na szybkości niż na dokładności. Jesteśmy również w stanie osiągnąć taką samą lub nawet większą dokładność niż przy użyciu faktoryzacji LU.