Teorema de Bohman y Korovkin

Adrián Tame Jacobo
Estudiante de Matemáticas Aplicadas del ITAM

José Carlos Zamorano Pérez
Estudiante de Matemáticas Aplicadas del ITAM

Introducción

Dada una sucesión arbitraria de operadores lineales y positivos L_n, el Teorema de Bohman y Korovkin (1953) afirma que para que L_n(f) converja uniformemente hacia f es suficiente que la convergencia se dé tan sólo para las funciones f(x)=1, x, x^2. El Teorema de Bohman y Korovkin deduce la convergencia uniforme a partir de la convergencia de las tres primeras potencias de la base canónica de los polinomios, y además simplifica notablemente las hipótesis que garantizan la convergencia.

Algo de historia

En 1912, S. Bernstein publicó la primera demostración constructiva del conocido Teorema de Aproximación de Weierstrass, demostración que hoy en día aparece en la mayor parte de los textos elementales de Análisis Numérico.

Para una función continua f definida sobre el intervalo [0,1], la demostración de Bernstein se basa en la construcción de una sucesión de polinomios B_n(f) (llamados ahora polinomios de Bernstein) que convergen uniformemente hacia f. Estos polinomios pueden verse también como una familia de operadores definidos sobre el espacio **C**[0,1] y con valores en el espacio de los polinomios con coeficientes reales. Estos operadores son lineales y monótonos en el dominio de definición de la función.

Hipótesis que debemos saber

Sea $T_n : C([a,b]) \to C([a,b])$ la sucesión de funciones lineales positivas tales que $\{T_n(1)\}$ converge a 1 uniformemente, $\{T_n(x)\}$ converge a x y $\{T_n(x^2)\}$ converge a x^2 uniformemente, entonces $\{T_n(f)\}$ converge a f uniformemente $\forall f \in \mathbf{C}([0,1])$.

Sea una función f:D $\to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}$ entonces una sucesión de funciones f converge uniformemente si $\forall \epsilon \geq 0$ existe una N $\in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x')\ | \leq \epsilon \quad \forall n \geq \mathbb{N}$ y $\forall x, x' \in D$
$\mathbf{C}([0,1]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continuas}\}$.

Ser lineal implica que f(λx) = λf(x) y además implica que hay un orden parcial f$\leq$g si f(x) $\leq$ g(x) $\forall$ x $\in$ [a,b].

Ahora $\{T_n\}$ positiva implica que $0 \leq$ f $\to 0 = \{T_n(0)\} \leq \{T_n(f)\}$ equivalentemente f $\leq$ g $\to \{T_n(f)\} \leq \{T_n(g)\}$

Demostración

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|T_n(f)(t) - f(t)| < \epsilon$, $\forall t \in [a, b]$, $\forall n \leq N$. Por lo tanto, $-\epsilon < T_n(f)(t) - f(t) < \epsilon$.

Nótese que si $h(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $T_n(h) = aT_n(x^2) + bT_n(x) + cT_n(1)$, pero $T_n(x^2)$ converge uniformemente a x^2,$T_n(x)$ converge uniformemente a x, y $T_n(1)$ converge uniformemente a 1, y por lo tanto, $T_n(h)$ converge a h uniformemente. Esto aplica también para cualquier función lineal y cualquier función constante.

Como la función es por definición continua y su dominio es un conjunto compacto ([a,b]), entonces esta función será uniformemente continua es decir que $\forall \epsilon_1 = \epsilon/3 \geq 0 \quad \exists \delta \geq 0$ tal que $|x - t'| < \delta \to |f(x) - f(t)| < \epsilon/3 \quad \forall x, \forall t \in [a, b]$ y también es acotada es decir $\exists$ L, M $\in \mathbb{R}$ tal que L ¡f ¡M

Existe, para cada x, una parábola p_x cuya vértice es $v_x = (x, f(x) + \frac{\epsilon}{3})$ que pasa por los puntos $(x - \delta, M), (x - \delta, M)$ tal que $f(t) \leq p_x(t)$, $\forall t \in [a, b]$ y $p_x(x) = f(x) + \epsilon/3$.

También existe para cada x, una parábola q_x cuya vértice es $v_x = (x, f(x) - \frac{\epsilon}{3})$ que pasa por (x - δ, -M) y (x+δ,-M) de esa forma tenemos que $q_x(t) \leq f(t)$, $\forall t \in [a, b]$ y $q_x(x) = f(x) - \epsilon/3$.

Por lo tanto, $T_n(q_x) \leq T_n(f)(t) \leq T_n(p_x)$, $\forall t \in [a, b]$.

Queremos demostrar, p_x y q_x son polinomios de grado 2 y $T_n(p_x)(t)$ converge a $p_x(t)$ uniformemente, y $T_n(q_x)(t)$ converge a $q_x(t)$ uniformemente. Ahora por un lado $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2} > 0$, entonces

$$-\epsilon_2 < T_n(p_x)(t) - p_x(t) < \epsilon_2 \tag{1}$$

También tenemos:

$$-\epsilon_2 < T_n(q_x)(t) - q_x(t) < \epsilon_2 \tag{2}$$

Esto se cumplirá $\forall t \in [a, b]$, $\forall n \geq N_{x_1}$ y N_{x_2}, con $N_{x_1} \in \mathbb{N}$ tal que N_{x_1} cumple la definición de convergencia uniforme para la función p_x y $N_{x_2} \in \mathbb{N}$ tal que N_{x_2} cumple la definición de convergencia uniforme para la función q_x.

Definiendo $h_x(t) = p_x(t) - f(t) - \frac{\epsilon}{3} : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Por lo tanto, $h_x(x) = 0$ para toda x $\epsilon_3 = \frac{\epsilon}{6} > 0$ y por continuidad de h $\exists \delta_{x_1} > 0$ tal que $|t - x| < \delta_{x_1}$ implica que $|h_x(t) - h_x(x)| < \epsilon_3$

De tal forma que obtenemos la siguiente desigualdad:

$$f(t)+\epsilon/6=\epsilon/3+f(t)-\epsilon_3<p_x(t)<\epsilon/3+f(t)+\epsilon_3=f(t)+\epsilon/2$$

Sea $k_x(t)=f(t)-q_x(t)-\frac{\epsilon}{3}:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Por lo tanto, $k_x(x)=0,\forall x$ para $\epsilon_3=\frac{\epsilon}{6}>0$ y por continuidad de k $\exists\delta_{x_2}>0$ tal que $|t-x|<\delta_{x_2}$ implica que $|k_x(t)-k_x(x)|<\epsilon_3$

$$-\epsilon/6<\mathbf{f(t)}\ \text{-}\ \epsilon/3\ \text{-}\ q_x(t)<\epsilon/6$$

$$q_x(t)\ +\ \epsilon/6<f(t)<q_x(t)\ +\ \epsilon/2$$

Sea $\delta_x=min\{\delta_{x_1},\delta_{x_2}\}$, $|t-x|<\delta_x$, entonces:

$$f(t)-\frac{\epsilon}{2}<q_x(t) \tag{3}$$

$$p_x(t)<f(t)+\frac{\epsilon}{2} \tag{4}$$

Notando que $[a,b]\subseteq\bigcup\limits_{a\leq x\leq b}(x-\delta_x,x+\delta_x)$, por compacidad, $[a,b]\subseteq(x_1-\delta_{x_1},x_1+\delta_{x_1})\cup...\cup(x_m-\delta_{x_m},x_m+\delta_{x_m})$, que tiene una cantidad m finita.

Recordando (1) y (2) podemos observar que :

$$\frac{-\epsilon}{2}<T_n(p_{x_i})(t)-p_{x_i}(t)<\frac{\epsilon}{2}\quad\forall t\in[a,b]\ \text{,}\ \forall n\geq N_{x_1}$$

$$\frac{-\epsilon}{2}<T_n(q_{x_i})(t)-q_{x_i}(t)<\frac{\epsilon}{2}\quad\forall t\in[a,b]\ \text{,}\ \forall n\geq N_{x_2}$$

Tomemos $N=max\{N_{x_{1_i}},N_{x_{2_i}}\}_{i=1}^{m}$

Ahora usaremos todas las hipótesis anteriormente mencionadas:

$$T_n(q_{x_i})(t)\leq T_n(f)(t)\leq T_n(p_{x_i}),\ \textbf{entonces por (3)}$$

$$T_n(q_{x_i})(t)+f(t)-\frac{\epsilon}{2}<T_n(f)(t)+q_{x_i}(t),\ \textbf{de aquí obtenemos}$$

$$T_n(q_{x_i})(t)-q_{x_i}(t)-\frac{\epsilon}{2}<T_n(f)(t)-f(t),\ \forall t\in[a,b],\ \forall n\geq N$$

Y así obtenemos:

$$T_n(f)(t) + p_{x_i}(t) \leq T_n(p_{x_i})(t) + f(t) + \frac{\epsilon}{2}\text{, entonces por (4)}$$

$$T_n(f)(t) - f(t) < T_n(p_{x_i})(t) - p_{x_i}(t) + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\text{, } \forall t \in [a,b]\text{, } \forall n \geq N\text{.}$$

□

Ejemplos

Polinomios de Bernstein:

$T(f) : [a, b] \to \mathbb{R}$, y definimos $T(f)(x) = \int_a^x f(x)dx$

$T_n(f)(x) = B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$

$$T_n(f+g)(x) = T_n(f)(x) + T_n(g)(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f+g)(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$$

$B_n(1) = 1$ converge uniformemente a 1
$B_n(x) = x$ converge uniformemente a x
$B_n(x^2) = (1 - \frac{1}{n})x^2 + \frac{1}{n}x$ converge uniformemente a x^2

Conclusión

Gracias al Teorema de Bohman y Korovkin la demostración dada por S. Bernstein del Teorema de Aproximación de Weierstrass se puede obtener como un caso particular, como se mostró en el ejemplo, y se abre la posibilidad de proporcionar otras demostraciones constructivas del Teorema de Weierstrass, generalizando los operadores de Bernstein a marcos más generales.

Bibliografía

[1] Bartle, Robert G. *The Elements of Real Analysis*. John Wiley and Sons, 1964.

[2] Rudin, Walter. *Principles of Mathematical Analysis (3rd Edition)*. McGraw-Hill, 1976.

[3] Kolmogorov, A. N. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Dover, 1999.