Psicología matemática: toma de decisiones

Ilan Jinich Fainsod
Estudiante de Actuaría y Matemáticas Aplicadas del ITAM

Adrián Tame Jacobo
Estudiante Matemáticas Aplicadas del ITAM

"Man is a deterministic device thrown into a probabilistic universe. In this match, surprises are expected."[6]

El objetivo de este artículo es presentar un área de las Matemáticas Aplicadas conocida como la *psicología matemática*. Esta área se dedica a modelar cómo se comportan los individuos y se han hecho grandes avances en modelos sobre cómo la gente toma decisiones, cómo se comporta ante situaciones de incertidumbre y cómo funcionan los cambios en la conducta. Este campo fue popularizado por Daniel Kahneman y Amos Tvesrksy; el siguiente artículo está basado en su trabajo. Previo a la realización del artículo, se realizó una encuesta entre estudiantes del ITAM para poder fundamentar los resultados. Se invita al lector a contestar las preguntas de la encuesta antes de leer el artículo, para de esa forma identificarse con el contenido y llegar a un mejor entendimiento de éste.

Amos Tversky y Daniel Kahneman [3].

Antes de empezar

Previo a leer el artículo le pedimos al lector contestar las siguientes preguntas, en orden. Para responderlas, uno se debe imaginar que se encuentra en la situación que plantea el problema; es necesario tomar una, y solo una, decisión.

Problema 1

Elija una de las siguientes opciones:

Opción A		Opción B	
Pago	Probabilidad	Pago	Probabilidad
$ 1,000,000	100 %	$1,000,000	89 %
		$0	1 %
		$5,000,000	10 %

Elija una de las siguientes opciones:

Opción C		Opción D	
Pago	Probabilidad	Pago	Probabilidad
\$0	89 %	\$0	90 %
\$1,000,000	11 %	\$5,000,000	10 %

Problema 2

Elija una de las siguientes opciones:

Opción E		Opción F	
Pago	Probabilidad	Pago	Probabilidad
\$0	55 %	\$0	10 %
\$6,000	45 %	\$3,000	90 %

Elija una de las siguientes opciones:

Opción G		Opción H	
Pago	Probabilidad	Pago	Probabilidad
\$0	99.9 %	\$0	99.8 %
\$6,000	0.1 %	\$3,000	0.2 %

Problema 3

Considere que adicional a su ingreso, se le otorgan \$1,000.
Elija una de las siguientes opciones:

Opción I		Opción J	
Pago	Probabilidad	Pago	Probabilidad
\$500	100 %	\$0	50 %
		\$1,000	50 %

Considere ahora que adicional a su ingreso, se le otorgan \$2,000 (considere que nunca obtuvo los \$1,000 del inciso anterior).
Elija una de las siguientes opciones:

Opción K		Opción L	
Pago	Probabilidad	Pago	Probabilidad
-\$500	100 %	0	50 %
		-\$1,000	50 %

Introducción

A lo largo de la historia han existido una variedad de preguntas con el fin de entender al ser humano. Una de ellas es: ¿cómo tomamos decisiones? Durante muchos años, cientos de filósofos ponderaron sobre este tema y, eventualmente, esta pregunta fue retomada por un grupo de economistas.

En 1947 dos economistas, John von Neumann y Oskar Morgenstern, desarrollaron lo que ellos llamaron la *teoría de la utilidad esperada*. Básicamente si se suponen 4 axiomas, uno puede construir un criterio para tomar decisiones y de igual forma describir cómo los individuos toman decisiones. Antes de enunciar los axiomas es necesario definir qué es una lotería.

Definición. *Se dice que* $g = (x_1, p_1, x_2, p_2, ..., x_n, p_n)$ *es una lotería si obtienes* x_i *con probabilidad* p_i *y además* $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Los axiomas son los siguientes:

1. Para cualesquiera dos loterías g y g' se puede decir que $g \preceq g'$ o $g \succeq g'$. Es decir, dadas dos loterías prefieres la primera, eres indiferente o prefieres la segunda. Las preferencias son completas.

2. Dadas tres loterías g, g' y g'', si $g \preceq g'$ y $g' \preceq g''$, entonces $g \preceq g''$. Es decir, si tienes tres loterías y prefieres la segunda a la primera y la tercera a la segunda entonces prefieres la tercera a la primera. Las preferencias son transitivas.

3. Dadas dos loterías g y g' con las mismas dos posibles consecuencias c y c', donde c es el mejor escenario posible y c' es el peor escenario posible, si p es la probabilidad de ganar c en g y p' es la probabilidad de ganar c en g', entonces $g \preceq g'$ si y solo si $p \leq p'$. Es decir, dadas dos loterías con las mismas consecuencias uno va a elegir la que le da una mayor probabilidad de ganar. Las preferencias son monótonas.

4. Dadas dos posibles consecuencias c y c', donde $c \preceq c'$, si c'' es otra posible consecuencia y g es una lotería en la que se obtiene c con probabilidad p y c'' con probabilidad $1 - p$ y otra lotería g' donde se obtiene c' con probabilidad p y c'' con probabilidad $1 - p$, entonces $g \preceq g'$. Es decir, si entre dos consecuencias prefieres la primera a la segunda, entonces bajo cualquier evento incierto vas a preferir la primera a la segunda. Existe independencia a eventos irrelevantes.

Para trabajar problemas de este tipo se usan funciones de utilidad. Éstas se definen como funciones que van de una colección de posibles canastas de bienes a los reales positivos. Dadas dos posibles canastas de bienes h y h', si $u(h) \leq u(h')$ entonces $h \preceq h'$.

Supongamos que tenemos una lotería $g = (x_1, p_1, x_2, p_2, ..., x_n, p_n)$. Dada una función de utilidad $u(x)$ definimos la utilidad esperada de g como

$$u(g) = u(x_1, p_1, x_2, p_2, ..., x_n, p_n) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + \cdots + p_n u(x_n).$$

Si supone que estos 4 axiomas son verdaderos, entonces se concluye a partir de esto el teorema de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern, que enunciamos a continuación.

Teorema (de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern)**.** *Dadas dos loterías g y g', si $u(g) \leq u(g')$ entonces $g \preceq g'$.* [1]

Si una persona cuenta con ingreso inicial de w_0 y se le ofrece una lotería g, la persona la va a aceptar si y solo si $u(w_0) \leq u(g)$.

Para aclarar toda la teoría, mostraremos dos ejemplos de cómo una persona toma decisiones de esta manera. Sin pérdida de generalidad supondremos que $u(0) = 0$.

Ejemplo. *Supongamos que la función de utilidad de José para el dinero es $u(x) = x^2$ y se le ofrecen dos loterías, $g = \left(1,000, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ y $g' = (500, 1)$. Entonces*

$$u(g) = \frac{1}{2}u(1,000) = \frac{1}{2}(1,000^2) = 500,000$$

y

$$u(g') = u(500) = 250,000.$$

Como claramente $250,000 < 500,000$, entonces José prefiere g a g' ($g' \prec g$).

Ejemplo. *Supongamos que la función de utilidad de Mario para el dinero es $u(x) = \sqrt{x}$ y se le ofrecen las mismas dos loterías que a José: $g = \left(1,000, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\right)$ y $g' = (500, 1)$. Entonces*

$$u(g) = \frac{1}{2}u(1,000) = \frac{1}{2}(\sqrt{1,000}) = 15.81138830$$

y

$$u(g') = u(500) = 22.36067977.$$

Como claramente $15.81138830 < 22.36067977$, entonces Mario prefiere g' a g ($g \prec g'$).

En los pasados dos ejemplos notamos que no existe una solución única para todos los problemas cuando se toma una decisión bajo incertidumbre sino que, más bien, la decisión depende por completo del tomador de decisiones y de su función de utilidad.

Esta teoría se usa como fundamento en microeconomía, administración de riesgos y cálculo actuarial para explicar cómo la gente se comporta y toma decisiones bajo eventos inciertos.

Contraejemplos a la teoría

Considere el siguiente conjunto de posibles respuestas a los problemas que se encuentra al principio del articulo:

$$\mathscr{A} = \{(A, D), (F, G), (I, L), (B, C), (E, H), (J, K)\},$$

donde cada elemento de $\mathscr{A}$ es un par de posibles respuestas a dos de la seis preguntas.
Para efectos prácticos supongamos que la función de utilidad del lector es $u(x)$ y que $u(0) = 0$

[1] Si se aceptan los axiomas, éste es el único criterio para tomar decisiones en ambiente de incertidumbre.

Contraejemplo 1. *Supongamos que el lector contestó A y D al problema 1. Como el lector contestó A eso implica que*

$$u(1000000) > 0.89u(1000000) + 0.1u(5000000).$$

Entonces

$$0.11u(1000000) > 0.1u(5000000).$$

Como el lector contestó D eso implica que

$$0.11u(1000000) < 0.1u(5000000),$$

lo cual es claramente una contradicción al teorema de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern.

Contraejemplo 2. *Supongamos que el lector contestó F y G al problema 2. Como el lector contestó F, eso implica que:*

$$0.9u(3000) > 0.45u(6000).$$

Como el lector contestó G eso implica que

$$0.002u(3000) < 0.001u(6000).$$

Entonces,

$$0.9u(3000) < 0.45u(6000),$$

lo cual es claramente una contradicción al teorema de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern.

Contraejemplo 3. *Supongamos que el lector contestó I y L al problema 3. Como el lector contestó I eso implica que*

$$u(1000 + 500) = u(1500) > 0.5u(1000 + 1000) = 0.5u(2000).$$

Como el lector contestó L eso implica que

$$0.5u(2000 - 1000) = 0.5u(1000) > u(2000 - 500) = u(1500).$$

Entonces

$$0.5u(1000) > 0.5u(2000),$$

lo cual es una contradicción al teorema de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern porque eso implicaría que el lector prefiere recibir \$1000 *ciertos a* \$2000 *lo cual es claramente incoherente.*

Es claro que los tres elementos restantes del conjunto $\mathscr{A}$ también son contradicciones al teorema, porque son los complementos de los primeros tres. Por lo tanto, existen seis posibles conjuntos de respuestas con la propiedad de ser contraejemplos al teorema de la utilidad de

Von Neumann y Morgenstern. Note que una persona al contestar las preguntas puede contestar entre 0 y 3 elementos del conjunto $\mathscr{A}$.

Previo a la realización del artículo se le preguntaron los tres problemas por medio de una encuesta a 112 estudiantes del ITAM, la mayoría de semestres altos (cuarto semestre en adelante) y de las carreras de Actuaría, Matemáticas Aplicadas y Economía. El porcentaje de estudiantes que contestó cada elemento de $\mathscr{A}$ es el siguiente:

Elemento de $\mathscr{A}$	Porcentaje de estudiantes
(A,D)	22.94 %
(B,C)	7.34 %
(E,H)	4.59 %
(F,G)	52.29 %
(I,L)	35.78 %
(J,K)	10.09 %

El porcentaje de estudiantes que contestó 0,1,2 y 3 elementos de $\mathscr{A}$ es el siguiente:

Cantidad de elementos de $\mathscr{A}$	Porcentaje de estudiantes
0	16.51 %
1	42.2 %
2	33.03 %
3	8.26 %

Como únicamente el 16.51 % de los estudiantes que contestaron la encuesta no cayó en contradicciones, y todo el resto cayó en por lo menos una, se puede concluir que la teoría de la utilidad esperada es ineficiente como teoría descriptiva sobre cómo los individuos toman decisiones bajo incertidumbre.[2]

Teoría del prospecto

Como modelo básico, hay algunas contradicciones entre cómo escoge la gente verdaderamente sus preferencias a lo que diría la teoría. Por lo tanto, se presenta ahora un modelo más general, llamado teoría del prospecto, que describe mejor el comportamiento de las personas en la vida real. En la siguiente sección, se realizará una evaluación sobre si este modelo puede reflejar mejor el comportamiento cuando se toman decisiones sobre efectos monetarios, usando la misma encuesta que está al principio del artículo, y con muestras tomadas de alumnos del ITAM.

Fase de editado

En este modelo, se distinguen dos diferentes etapas al proceso de evaluación de un problema, el editarlo y después evaluarlo. El editado del problema es para poder simplificar o generalizar

[2] La encuesta fue realizada en su totalidad por los autores del artículo. Las preguntas y las conclusiones de esta fueron sacadas del artículo “Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk ”[1].

los principales temas con los que está interesado el problema. Notamos los principales pasos del proceso de editado como siguen:

- *Coding:* Un detalle importante en la consideración de un problema de lotería es cómo medir lo que se ganó o perdió. Tradicionalmente se estudia como un estado final de bienestar, pero esto deja mucha información fuera del problema. Es mejor usar un análisis de pérdidas y ganancias relativas a un punto inicial para ver si una lotería o apuesta vale la pena. Por ejemplo: si se empieza con 100,000 y se pueden ganar o perder 10, es mucho más significativo que empezar con 100 y ganar o perder 10.
- *Combinación:* Las personas generalmente piensan en combinar opciones iguales o parecidas. Por ejemplo: la lotería $(200, 0.25; 200, 0.25)$ se puede representar como $(200, 0.50)$
- *Segregación:* A veces todas las opciones de una lotería incorporan una ganancia o pérdida fija y a las personas les parece mas fácil remover ciertas partes del problema, obteniendo entonces un problema más sencillo. Por ejemplo: $(200, 0.50; 100, 0.50)$ puede verse como una ganancia segura de 100 y un problema de la forma $(100, 0.50)$.
- *Cancelación:* Se pueden cancelar o quitar resultados que son equivalentes entre dos diferentes problemas. Por ejemplo: la decisión entre $(200, .20; 100, .50; -50, .30)$ y $(200, 0.20; 150, 0.50; -100, 0.30)$ puede interpretarse como una decisión entre $(100, 0.50; -50, 0.30)$ y $(150, 0.50; -100, 0.30)$.

Otros dos principios que cabe mencionar son los de simplificación y el concepto de opciones dominadas. Gracias al principio de simplificación, una lotería de la forma $(101, 0.49)$ probablemente se interprete o sustituya por una de la forma $(100, 0.50)$. Además de esto, las opciones dominadas son opciones que son claramente inferiores a otras opciones presentadas al tratar de tomar una decisión. Ejemplificando, $(1,000, 0.75)$ es claramente superior a $(500, 0.25)$. La lotería dominada (la más pequeña o ineficiente) es descartada.

Fase de evaluación

Ya habiendo editado el problema a uno que el usuario considere más sencillo, se pide que se haga una evaluación para determinar la opción de mayor valor para el individuo. Definimos $\mathscr{V}$ como el valor de una lotería editada, que depende de dos escalas, π y V.

La escala π le asigna un valor $\pi(p)$ a cada probabilidad p. Esta función refleja cómo la persona *aprecia* la probabilidad. Es importante notar que, por cómo se define π, ésta no será una medida de probabilidad ya que, usualmente, $\pi(p) + \pi(1-p) \neq 1$. La segunda medida, V, le asigna a un bien x un valor subjetivo $V(x)$ para el tomador de decisiones. Note también que esta función tiene un punto de referencia, que nosotros definimos como el cero, de donde podemos ver si una lotería genera pérdidas o ganancias relativas.

La función de prospecto queda definida como $\mathscr{V}(x, p_1; y, p_2) = \pi(p_1)V(x) + \pi(p_2)V(x)$ cuando $g = (x, p_1; y, p_2)$ es un prospecto de la forma regular, que se define como $p_1 + p_2 < 1$ además de $x \geq 0 \geq y$ o $x \leq 0 \leq y$.

Cuando los prospectos son estrictamente negativos o positivos (si $p_1 + p_2 = 1$ y además $x > y > 0$ o $x < y < 0$), entonces la función de prospecto queda definida como $\mathscr{V}(x, p_1; y, p_2) = V(y) + \pi(p_1)[V(x) - V(y)]$. La razón de esto es que los prospectos se pueden separar en la parte segura que se va a ganar o perder ($V(y)$) y el resto como otro problema de prospectos. Por ejemplo: $\mathscr{V}(300, 0.25; 100, 0.75) = V(100) + \pi(0.25)[V(300) - V(100)]$. Este resultado se sigue directamente de la segregación en la fase de editado.

La función de valor V

La función que se describe para poder evaluar las preferencias en una lotería es una función cóncava ($V''(x) \leq 0$, $x > 0$, asumiendo que V es diferenciable) arriba del origen o, en otras palabras, cuando se está evaluando una ganancia. Es fácil comparar la diferencia del valor agregado de una ganancia entre 100 o 200 pesos, pero más complicado evaluar una entre 10,000 y 11,000 pesos. El comportamiento es similar para valores de pérdida, lo que lleva a concluir que debajo del origen, la función es convexa ($V''(x) \geq 0$, $x < 0$).

Este comportamiento, mientras es lo regular, puede ser también afectado circunstancialmente. La función puede volverse cóncava o convexa cerca de un punto crítico, como por ejemplo, si alguien quiere comprar un coche nuevo que vale 100,000, la función tendrá un comportamiento errático cerca de ese valor.

También, sin pérdida de generalidad, $V(0) = 0$.

La función de peso de probabilidad π

La función $\pi : (0, 1) \to (0, 1)$ mide el impacto de eventos en el atractivo de los prospectos y no solamente la probabilidad de que ese evento suceda. Éstas son las propiedades principales de π:

- Es una función creciente, con $\pi(0) = 0$ y $\pi(1) = 1$. La gente en general puede interpretar la probabilidad cuando ésta es cero y cuando ésta es uno. Además, cuando se enfrenta a dos probabilidades, puede darse cuenta de cuál es la más alta.
- Generalmente, $p \in (0, 1)$, $\pi(p) + \pi(1 - p) < 1$. Esta propiedad se llama *subcerteza.*
- Las preferencias bajas generalmente están subestimadas, es decir: $\pi(p) > p$ cuando p es relativamente chica. Además de esto, π es una función subaditiva, es decir, $\pi(rp) > r\pi(p)$
- Para un cociente de probabilidades fijo, el cociente de los pesos de probabilidad asociados a ellos está más cerca de la unidad cuando las probabilidades asociadas son pequeñas en vez de grandes. Esta propiedad se denota: *subproporcionalidad.*

Cabe notar que esta función puede generalizarse para casos en donde un individuo tiene que elegir entre más de dos opciones pero, para nuestros propósitos, esto es suficiente.

Ejemplos

Los mismos ejemplos que se analizaron para la teoría de utilidad ahora serán revisitados con un análisis de teoría de prospectos.

Ejemplo. *Supongamos que el lector al problema 1 contestó A y D. Porque el lector contestó A eso implica que*

$$V(1,000,000) > V(5,000,000) + \pi(0.89)[V(1,000,000) - V(5,000,000)].$$

Entonces

$$V(1,000,000) - V(5,000,000) > \pi(0.89)[V(1,000,000) - V(5,000,000)],$$

por lo que

$$1 > \pi(0.89).$$

Porque el lector contestó D, eso implica que

$$\pi(0.11)V(1,000,000) < \pi(0.1)V(5,000,000).$$

El lector recordará que, cuando abordamos el problema con teoría de la decisión, llegábamos a una contradicción con las desigualdades. Sin embargo, aquí una de las desigualdades se redujo, por lo que la teoría de prospectos logra explicar satisfactoriamente la decisión tomada por la mayoría de los encuestados.

Ejemplo. *Supongamos que lector al problema 2 contestó F y G. Porque el lector contestó F eso implica que*

$$\pi(0.9)V(3,000) > \pi(0.45)V(6,000).$$

Porque el lector contestó G,

$$\pi(0.002)V(3,000) < \pi(0.001)V(6,000).$$

Estas respuestas están implicadas por la teoría si y solo si

$$\frac{\pi(0.001)}{\pi(0.002)} > \frac{V(3,000)}{V(6,000)} > \frac{\pi(0.45)}{\pi(0.9)}$$

La violación del axioma de substitución de la teoría de utilidad se atribuye a la subproporcionalidad de π.

Ejemplo. *Supongamos que el lector al problema 3 contestó I y L. Porque el lector contestó I eso implica que*

$$V(500) > \pi(0.5)V(1000).$$

Porque el lector contestó L,

$$V(-500) < \pi(0.5)V(-1000).$$

Esto está en acorde con la hipótesis inicial de que la función valor es cóncava para ganancias y convexa para pérdidas.

Conclusiones

La teoría de utilidad, mientras extremadamente útil e importante, tiene algunas fallas en asumir completa racionalidad de los actores económicos. Al abrir la teoría un poco más, creando una que tome la irracionalidad de los actores como axiomas, se pueden resolver algunos de los problemas básicos que se encuentran con la teoría de la utilidad.

Referencias

[1] Kahneman, Daniel y Tversky, Amos . "Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk " *Econometrica* 47(2) (marzo 1979): pp. 263-291.

[2] Lewis, Michael. *The undoing project: a friendship that changed our minds*. New York: W.W. Norton & Company, 2017.

[3] Lewis, Michael. 2016. "How Two Trailblazing Psychologists Turned The World Of Decision Science Upside Down". The Hive. `http://www.vanityfair.com/news/2016/11/decision-science-daniel-kahneman-amos-tversky`. Última consulta en marzo de 2017.

[4] Morgenstern, Oskar, y von Neumann, John. *Theory of games and economic behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1953.

[5] `http://www.econport.org/content/handbook/decisions-uncertainty/basic/von.html`. Última consulta en marzo de 2017.

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Von\_Neumann\%E2\%80\%93Morgenstern\_utility\_theorem`. Última consulta en marzo de 2017.