Modelación Bayesiana

Profesor: Alfredo Garbuno Iñigo — Primavera, 2022.

Objetivo. Repasar notación que utilizaremos a lo largo del curso. Establecer la motivación de los temas que trataremos en la materia.

1. NOTACIÓN

Usaremos la convención usual en probabilidad.

1.1. Variables aleatorias

Una variable aleatoria X está definida a través de un espacio de probabilidad $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \pi)$. La función $\pi : \mathcal{F} \to [0, 1]$ se llama la función de distribución de la variable aleatoria X. Escribimos $X \sim \pi$.

1.2. Distribución paramétrica

Decimos que una función de distribución es paramétrica si se puede identificar completamente la distribución con respecto a un vector de parámetros $\theta \in \mathbb{R}^p$. Esto lo denotamos de la siguiente manera

$$\pi_{\theta}(x) \qquad \pi(x;\theta) \,, \tag{1}$$

y si $\theta \neq \theta'$ entonces $\pi_{\theta}(x) \neq \pi_{\theta'}(x)$ para cualquier x en el soporte.

1.3. Valores esperados

El valor esperado de una variable aleatoria $X \sim \pi$ se define como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathcal{X}} x \, \pi(x) \, \mathrm{d}x \,. \tag{2}$$

1.3.1. Abuso de notación La función de densidad está definida como $\mathrm{d}\pi/\mathrm{d}x$. En la definición de valor esperado deberíamos de haber escrito $\mathrm{d}\pi(x)$ o bien $\pi(\mathrm{d}x)$ (integrales de Lebesgue). Pero para no ofuscar notación lo obviamos...

1.4. Estadísticas de interés

La definición se puede extender con $f: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ y se calcula como

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathcal{X}} f(x)\pi(x)dx.$$
 (3)

Denotaremos de la siguiente manera

$$\pi(f) := \mathbb{E}[f(X)]. \tag{4}$$

1.5. Probabilidad condicional

La probabilidad condicional de A dado el evento B se denota $\pi(A|B)$ y está definida como

$$\pi(A|B) = \frac{\pi(A \cap B)}{\pi(B)} \tag{5}$$

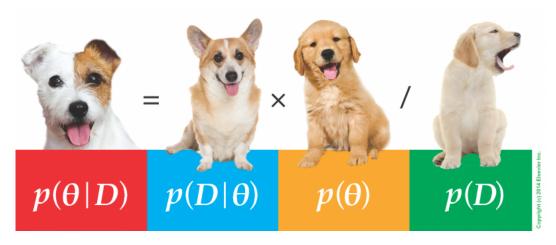


FIGURA 1. Portada de /? /.

2. REPASO

2.1. Regla de Bayes

La regla de Bayes utiliza la definición de probabilidad condicional para hacer inferencia a través de

$$\pi(A|B) = \frac{\pi(B|A)\pi(A)}{\pi(B)}.$$
(6)

2.2. Ejemplos

- Verosimilitud: $x|\theta \sim \mathsf{Binomial}(n,\theta) + \mathsf{Previa:} \theta \sim \mathsf{Beta}(\alpha,\beta) = \mathsf{Posterior:} ?$
- Verosimilitud: $x|\theta \sim \mathsf{Uniforme}(0,\theta) + \mathsf{Previa}: \theta \sim \mathsf{Pareto}(\theta_0) = \mathsf{Posterior}: ?$

3. MOTIVACIÓN

Por medio de metodología Bayesiana podemos cuantificar incertidumbre en:

- Observaciones.
- Parámetros.
- Estructura.

Es fácil especificar y ajustar modelos. Pero hay preguntas cuyas respuestas no han quedado claras:

- 1. Construcción.
- 2. Evaluación.
- 3. Uso.

Programación probabilística.

Los aspectos del flujo de trabajo Bayesiano consideran ([2]):

- 1. Construcción iterativa de modelos.
- 2. Validación de modelo (computacional).
- 3. Entendimiento de modelo.
- 4. Evaluación de modelo.



3.1. Distinción importante

Inferencia no es lo mismo que análisis de datos o que un flujo de trabajo.

Inferencia es formular y calcular con probabilidades condicionales.

3.2. ¿Por qué necesitamos un flujo de trabajo?

- El cómputo puede ser complejo.
- Expandir nuestro entendimiento en aplicaciones.
- Entender la relación entre modelos.
- Distintos modelos pueden llegar a distintas conclusiones.

3.3. Proceso iterativo

■ La gente de ML sabe que el proceso de construcción de un modelo es iterativo, ¿por qué no utilizarlo?

Una posible explicación puede encontrarse en [1]. El argumento es formal en cuanto a actualizar nuestras creencias como bayesianos. Sin embargo, con cuidado y un procedimiento científico puede resolver el asunto.

REFERENCIAS

- [1] A. Gelman and Y. Yao. Holes in Bayesian statistics. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 48(1):014002, jan 2021. ISSN 0954-3899, 1361-6471. . 3
- [2] A. Gelman, A. Vehtari, D. Simpson, C. C. Margossian, B. Carpenter, Y. Yao, L. Kennedy, J. Gabry, P.-C. Bürkner, and M. Modrák. Bayesian workflow. arXiv preprint arXiv:2011.01808, 2020. 2, 4



REFERENCIAS REFERENCIAS

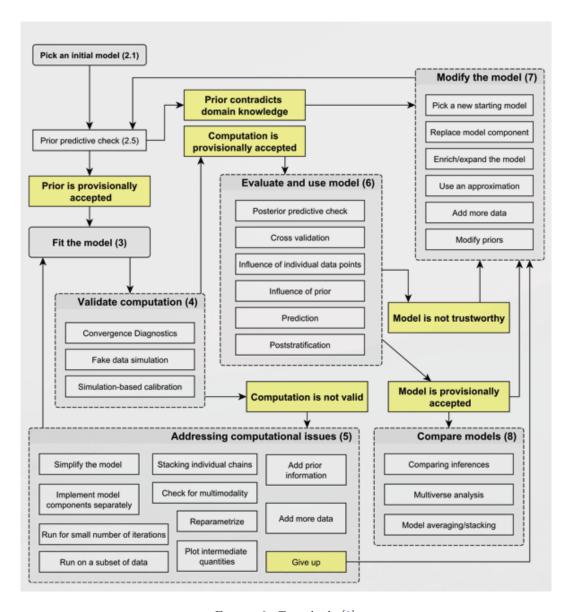


Figura 2. Tomado de [2].

