

Modelación Bayesiana

Profesor: Alfredo Garbuno Iñigo — Primavera, 2021.

Objetivo. Repasar notación que utilizaremos a lo largo del curso. Y a la vez, establecer la motivación de los temas que trataremos en la materia.

Lecturas recomendadas: Notas del [curso de fundamentos](#) (2022) y sección 1 de [2].

1. NOTACIÓN

Usaremos la convención usual en probabilidad.

1.1. Variables aleatorias

Una variable aleatoria X está definida a través de un **espacio de probabilidad** $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \pi)$. La función $\pi : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ se llama la **función de distribución** de la variable aleatoria X . Escribimos $X \sim \pi$.

1.2. Distribución paramétrica

Decimos que una función de distribución es **paramétrica** si se puede identificar completamente la distribución con respecto a un **vector de parámetros** $\theta \in \mathbb{R}^p$. Esto lo denotamos de la siguiente manera

$$\pi_{\theta}(x) \quad \text{ó} \quad \pi(x; \theta), \quad (1)$$

y si $\theta \neq \theta'$ entonces $\pi_{\theta}(x) \neq \pi_{\theta'}(x)$ para cualquier x en el **soporte**.

1.3. Valores esperados

El **valor esperado** de una variable aleatoria $X \sim \pi$ se define como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathcal{X}} x \pi(x) dx. \quad (2)$$

1.3.1. Abuso de notación La **función de densidad** está definida como $d\pi/dx$. En la definición de valor esperado deberíamos de haber escrito $d\pi(x)$ o bien $\pi(dx)$ (integrales de Lebesgue). Pero para no ofuscar notación, y dado que no veremos cosas exóticas en el curso, lo obviaremos...

1.4. Estadísticas de interés

La definición se puede extender con $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ y se calcula como

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathcal{X}} f(x) \pi(x) dx. \quad (3)$$

Denotaremos de la siguiente manera

$$\pi(f) := \mathbb{E}[f(X)]. \quad (4)$$

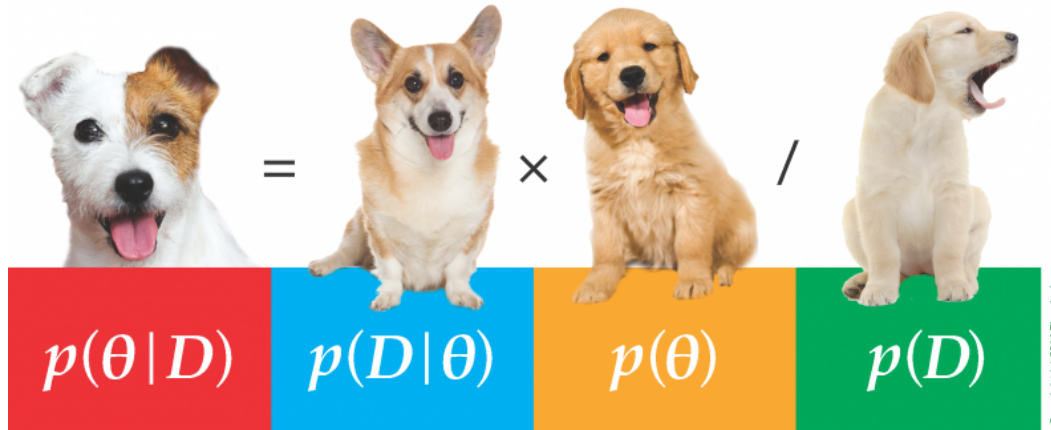


FIGURA 1. Tomado de [3] .

1.5. Probabilidad condicional

La probabilidad condicional de A dado el evento B se denota $\pi(A|B)$ y está definida como

$$\pi(A|B) = \frac{\pi(A \cap B)}{\pi(B)} \quad (5)$$

2. REPASO INFERENCIA

Repaso de inferencia bajo un enfoque frecuentista.

2.1. Regla de Bayes

La regla de Bayes utiliza la definición de probabilidad condicional para hacer inferencia a través de

$$\pi(A|B) = \frac{\pi(B|A)\pi(A)}{\pi(B)}. \quad (6)$$

2.2. Ejemplos

- Verosimilitud: $x|\theta \sim \text{Binomial}(n, \theta)$ + Previa: $\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ = Posterior: ?
- Verosimilitud: $x|\theta \sim \text{Uniforme}(0, \theta)$ + Previa: $\theta \sim \text{Pareto}(\theta_0)$ = Posterior: ?

3. REPASO INFERENCIA

Repaso de inferencia bajo un enfoque bayesiano.

4. MOTIVACIÓN

Por medio de metodología Bayesiana podemos cuantificar incertidumbre en:

- Observaciones.
- Parámetros.
- Estructura.

Es fácil especificar y ajustar modelos. Pero hay preguntas cuyas respuestas no han quedado claras:

1. Construcción.
2. Evaluación.
3. Uso.

Programación probabilística.

Los aspectos del flujo de trabajo Bayesiano consideran ([2]):

1. Construcción iterativa de modelos.
2. Validación de modelo (computacional).
3. Entendimiento de modelo.
4. Evaluación de modelo.

4.1. Distinción importante

Inferencia no es lo mismo que análisis de datos o que un flujo de trabajo.

Inferencia (en el contexto bayesiano) es formular y calcular con probabilidades condicionales.

4.2. ¿Por qué necesitamos un flujo de trabajo?

- El cómputo puede ser complejo.
- Expandir nuestro entendimiento en aplicaciones.
- Entender la relación entre modelos.
- Distintos modelos pueden llegar a distintas conclusiones.

4.3. Proceso iterativo

- La gente de ML sabe que el proceso de construcción de un modelo es iterativo, ¿por qué no utilizarlo?

Una posible explicación puede encontrarse en [1]. El argumento es formal en cuanto a actualizar nuestras creencias como bayesianos. Sin embargo, con cuidado y un procedimiento científico puede resolver el asunto.

REFERENCIAS

- [1] A. Gelman and Y. Yao. Holes in Bayesian statistics. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 48(1):014002, jan 2021. ISSN 0954-3899, 1361-6471. . 3
- [2] A. Gelman, A. Vehtari, D. Simpson, C. C. Margossian, B. Carpenter, Y. Yao, L. Kennedy, J. Gabry, P.-C. Bürkner, and M. Modrák. Bayesian workflow. *arXiv preprint arXiv:2011.01808*, 2020. 1, 3, 4
- [3] J. Kruschke. *Doing Bayesian Data Analysis: A Tutorial with R, JAGS, and Stan*. Academic Press, 2014. 2

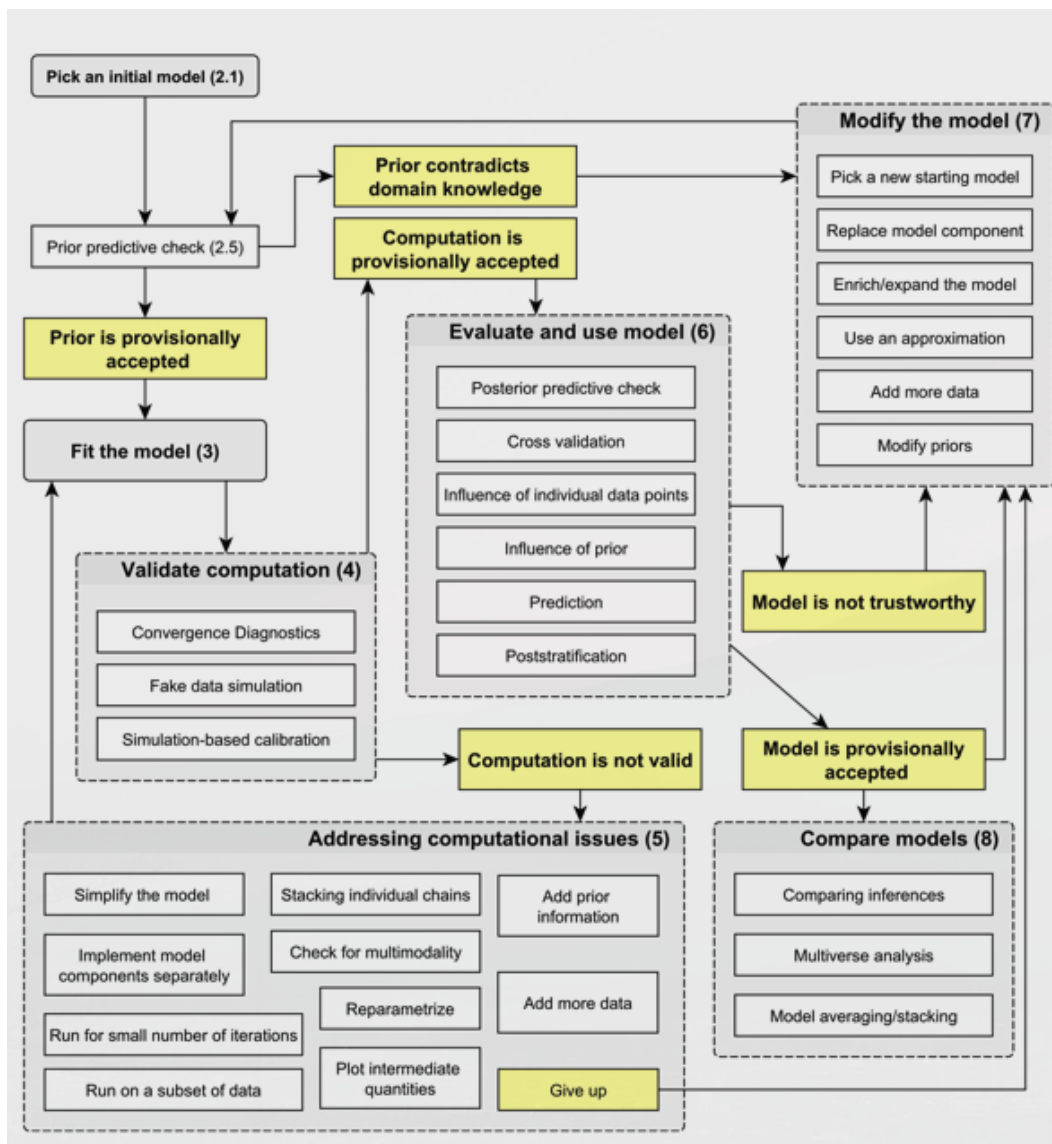


FIGURA 2. Tomado de [2].