

PIZZO - Zadanie domowe nr 1

Adrian Urbański

Podpunkt a) $3COL \leq_p Tutorzy$

Pokażę, że $3COL \leq_p 4COL$:

Zdefiniujmy funkcję $\Phi : G(V, E) \rightarrow G'(V', E')$ jako:

Jeśli $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, to $V' = \{v_1^1, v_1^2, v_2^1, v_2^2, v_3^1, v_3^2, \dots, v_n^1, v_n^2\}$. Wtedy:

$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} : (v_i^1, v_i^2) \in E' \wedge \forall (v_i, v_j) \in E : [(v_i^1, v_j^1) \in E' \wedge (v_i^2, v_j^2) \in E']$.

Wtedy " Φ " jest redukcją wielomianową:

1. Φ jest obliczalna w czasie wielomianowym - łatwo napisać program który tak przekształca graf
2. G jest 3-kolorowalny wtw. gdy $\Phi(G)$ jest 4-kolorowalny

" \Rightarrow " Weźmy 3-kolorowanie $C : V \rightarrow \{r, g, b\}$.

Zdefiniujmy 4-kolorowanie $C' : V' \rightarrow \{r, g, b, y\}$ takie, że:

$C'(v_i^1) = r \Leftrightarrow C(v_i) = r$ i analogicznie dla g i b , oraz $\forall i : C'(v_i^2) = y$.

Skoro C jest poprawnym kolorowaniem, to $\forall (v_i^1, v_j^1) \in E' : C'(v_i^1) \neq C'(v_j^1)$.

W dodatku, $\forall i, j : (v_i^2, v_j^2) \notin E'$, co wynika z konstrukcji Φ , oraz $\forall i, j : C'(v_i^2) = y \neq C'(v_j^2)$ z definicji C' .

Zatem $C'(\Phi(G))$ jest poprawnym kolorowaniem.

" \Leftarrow " Weźmy 4-kolorowanie $C' : V' \rightarrow \{r, g, b, y\}$. Wtedy:

Niech $C(v_i) = \begin{cases} r, & \text{gdy } v_i^1 = r \vee v_i^2 = r \\ g, & \text{gdy } v_i^1 = g \vee v_i^2 = g \wedge v_i^1 \neq r \wedge v_i^2 \neq r \\ b, & \text{wpp} \end{cases}$ Wtedy:

C jest 3-kolorowaniem, co wynika z konstrukcji Φ

Pokażę, że $4COL \leq_p Tutorzy$:

Zdefiniujmy funkcję $\Psi : G(V, E) \rightarrow T(S, K)$, gdzie S jest zbiorem studentów, a K - konfliktów $((s_i, s_j) \in K$ oznacza, że s_i zrzędzi na s_j), jako:

$\forall i : v_i \in V \Leftrightarrow s_i \in S \wedge \forall i, j : (v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow (s_i, s_j) \in K$.

Wtedy Ψ jest redukcją wielomianową:

1. Ψ jest obliczalna w czasie wielomianowym - łatwo napisać taki program
2. G jest 4-kolorowalny wtw. gdy $\Psi(G)$ jest poprawnym przydzieleniem tutorów.

" \Rightarrow " Weźmy 4-kolorowanie $C : V \rightarrow \{r, g, b, y\}$.

Zdefiniujmy przydział tutorów $P : S \rightarrow \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ takie, że:

$P(s_i) = t_1 \Leftrightarrow C(v_i) = r$ i analogicznie dla t_2 i g , t_3 i b oraz t_4 i y .

Skoro C jest poprawnym kolorowaniem, to $\forall (s_i, s_j) \in K : P(s_i) \neq P(s_j)$. Wtedy:

Zatem $P(\Psi(G))$ jest poprawnym przydzieleniem tutorów.

" \Leftarrow " Weźmy przydział tutorów P . Wtedy:

Niech $C(v_i) = \begin{cases} r, & \text{gdy } P(s_i) = t_1 \\ g, & \text{gdy } P(s_i) = t_2 \\ b, & \text{gdy } P(s_i) = t_3 \\ y, & \text{wpp} \end{cases}$

Wtedy C jest 4-kolorowaniem, co wynika z konstrukcji Ψ .

Skoro $3COL \leq_p 4COL \wedge 4COL \leq_p Tutorzy$, to z (przechodności relacji \leq_p) $3COL \leq_p Tutorzy$

Podpunkt b) Jeśli jest co najwyżej 15 zrząd, to problem Tutorzy jest wielomianowy

Numerujemy tutorów od 1 do 4. Generujemy wszystkie możliwości (jest ich 4^{15}) przydzielenia tutorów zrządom i dla każdej takiej możliwości dla każdego studenta (jest ich n) sprawdzamy którego tutora możemy mu przydzielić (musimy sprawdzić wszystkie osoby na które zrządzono, jest ich co najwyżej $15*n$). Złożoność takiego podejścia wynosi $O(4^{15} * n * 15 * n) = O(n^2)$.