PIZZO - Zadanie domowe nr 1

Adrian Urbański

Podpunkt a) $3COL \leq_p Tutorzy$

Pokażę, że $3COL \leq_p 4COL$:
Zdefiniujmy funkcję $\Phi : G(V, E) \to G'(V', E')$ jako:
Jeśli $V = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$, to $V' = \{v_1^1, v_1^2, v_2^1, v_2^2, v_3^1, v_3^2, \cdots, v_n^1, v_n^2\}$. Wtedy:
$\forall i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\} : (v_i^1, v_i^2) \in E' \wedge \forall (v_i, v_j) \in E : [(v_i^1, v_j^1) \in E' \wedge (v_i^1, v_j^2) \in E' \wedge (v_i^2, v_j^1) \in E']$.
Wtedy "Φ" jest redukcją wielomianową:

1. Φ jest obliczalna w czasie wielomianowym - łatwo napisać program który tak przekształca graf
2. G jest 3-kolorowalny wtw. gdy $\Phi(G)$ jest 4-kolorowalny

" $\Rightarrow$ " Weźmy 3-kolorowanie $C : V \to \{r, g, b\}$.
Zdefiniujmy 4-kolorowanie $C' : V' \to \{r, g, b, y\}$ takie, że:
$C'(v_i^1) = r \Leftrightarrow C(V_i) = r$ i analogicznie dla g i b, oraz $\forall i : C'(v_i^2) = y$.
Skoro C jest poprawnym kolorowaniem, to $\forall (v_i^1, v_j^1) \in E' : C'(V_i^1) \neq C'(V_j^1)$.
W dodatku, $\forall i, j : (v_i^2, v_j^2) \notin E'$, co wynika z konstrukcji Φ, oraz $\forall i, j : C'(v_i^2) = y \neq C'(v_j^1)$ z definicji C'.
Zatem $C'(\Phi(G))$ jest poprawnym kolorowaniem.

" $\Leftarrow$ " Weźmy 4-kolorowanie $C' : V' \to \{r, g, b, y\}$. Wtedy:
Niech $C(v_i) = \begin{cases} \text{r, gdy } v_i^1 = r \vee v_i^2 = r \\ \text{g, gdy } v_i^1 = g \vee v_i^2 = g \wedge v_i^1 \neq r \wedge v_i^2 \neq r \\ \text{b, wpp} \end{cases}$ Wtedy:
C jest 3-kolorowaniem, co wynika z konstrukcji Φ

Pokażę, że $4COL \leq_p Tutorzy$:
Zdefiniujmy funkcję $\Psi : G(V, E) \to T(S, K)$, gdzie S jest zbiorem studentów, a K - konflików ($(s_i, s_j) \in K$ oznacza, że s_i zrzędzi na s_j), jako:
$\forall i : v_i \in V \Leftrightarrow s_i \in S \wedge \forall i, j : (v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow (s_i, s_j) \in K$.
Wtedy Ψ jest redukcją wielomianową:

1. Ψ jest obliczalna w czasie wielomianowym - łatwo napisać taki program
2. G jest 4-kolorowalny wtw. gdy $\Psi(G)$ jest poprawnym przydzieleniem tutorów.

" $\Rightarrow$ " Weźmy 4-kolorowanie $C : V \to \{r, g, b, y\}$.
Zdefiniujmy przydział tutorów $P : S \to \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ takie, że:
$P(s_i) = t_1 \Leftrightarrow C(V_i) = r$ i analogicznie dla t_2 i g, t_3 i b oraz t_4 i y.
Skoro C jest poprawnym kolorowaniem, to $\forall (s_i, s_j) \in K : P(s_i) \neq P(V_j)$. Wtedy:
Zatem $P(\Psi(G))$ jest poprawnym przydzieleniem tutorów.

" $\Leftarrow$ " Weźmy przydział tutorów P. Wtedy:
Niech $C(v_i) = \begin{cases} \text{r, gdy } P(s_i) = t_1 \\ \text{g, gdy } P(s_i) = t_2 \\ \text{b, gdy } P(s_i) = t_3 \\ \text{y, wpp} \end{cases}$
Wtedy C jest 4-kolorowaniem, co wynika z konstrukcji Ψ.

Skoro $3COL \leq_p 4COL \wedge 4COL \leq_p Tutorzy$, to z (przechodniości relacji $\leq_p$) $3COL \leq_p Tutorzy$

Podpunkt b) Jeśli jest co najwyżej 15 zrzęd, to problem Tutorzy jest wielomianowy

Numerujemy tutorów od 1 do 4. Generujemy wszystkie możliwości (jest ich 4^{15}) przydzielenia tutorów zrzędom i dla każdej takiej możliwości dla każdego studenta (jest ich co najwyżej n) sprawdzamy którego tutora możemy mu przydzielić (musimy sprawdzić wszystkie osoby na które zrzędzono, jest ich co najwyżej $15 * n$). Złożoność takiego podejścia wynosi $\mathrm{O}(4^{15} * n * 15 * n) = \mathrm{O}(n^2)$.