

Reconstrução Geométrica Torácica em Tomografia de Impedância Elétrica com Filtro de Kalman

Adrian W. Roque

Universidade Federal do ABC

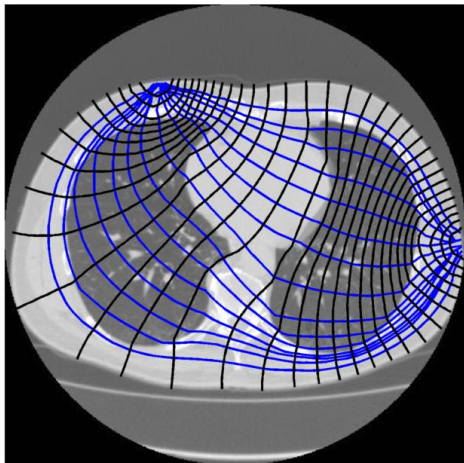
Dezembro de 2018



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Objetivos
- 3 Revisão de Literatura
- 4 Metodologia
- 5 Resultados e Discussões
- 6 Conclusões
- 7 Referências

Introdução



(ADLER, 2013)

Tomografia de Impedância Elétrica

- ▶ Vantagens:
 - ▶ Baixo Custo
 - ▶ Segurança ao Paciente
 - ▶ Alta Velocidade de Aquisição de Dados
- ▶ Desvantagens:
 - ▶ Baixa Resolução
 - ▶ Baixa Relação Sinal-Ruído
 - ▶ Medições Dependentes da Geometria

Introdução

A construção de uma cinta de eletrodos instrumentada com extensômetros (GREGÓRIO, 2017) permite obter uma estimativa muito melhor para a determinação do formato do tórax de um paciente, principalmente durante o monitoramento da função pulmonar pela EIT.

Entretanto...

Como obter um sinal fiel das medições e obter as medidas de geometria?

Introdução

A construção de uma cinta de eletrodos instrumentada com extensômetros (GREGÓRIO, 2017) permite obter uma estimativa muito melhor para a determinação do formato do tórax de um paciente, principalmente durante o monitoramento da função pulmonar pela EIT.

Entretanto...

Como obter um sinal fiel das medições e obter as medidas de geometria? **Filtro de Kalman!**

Objetivos

- 1 Construção de modelo de observação e evolução de estados, considerando os raios de curvatura em diversos pontos da cinta torácica;

Objetivos

- 1 Construção de modelo de observação e evolução de estados, considerando os raios de curvatura em diversos pontos da cinta torácica;
- 2 implementação do filtro de Kalman para o modelo proposto, tornando o problema bem-posto e adequando a geometria para aplicação em TIE;

Objetivos

- 1 Construção de modelo de observação e evolução de estados, considerando os raios de curvatura em diversos pontos da cinta torácica;
- 2 implementação do filtro de Kalman para o modelo proposto, tornando o problema bem-posto e adequando a geometria para aplicação em TIE;
- 3 e simular computacionalmente e experimentalmente o desempenho dos métodos de filtragem, analisando os comportamentos obtidos para uma discussão mais detalhada a respeito da usabilidade dos métodos de processamento.

Filtro de Kalman

Estimativas Ótimas

O filtro de Kalman é um método de *filtragem bayesiana*, sendo capaz de fornecer uma estimativa ótima para um problema inverso não-estacionário de modelo linear.

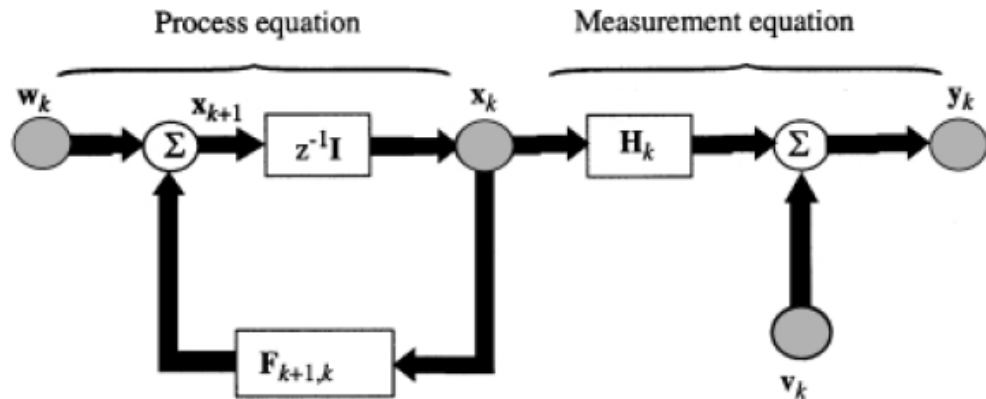
$$\text{Processo: } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F} \mathbf{x}_k$$

$$\text{Medição: } \mathbf{y}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k$$

Símbolos

- | | |
|--|--|
| ▶ $\mathbf{x} \Rightarrow$ Vetor de Estados | ▶ $\mathbf{H} \Rightarrow$ Matriz de Medição |
| ▶ $\mathbf{y} \Rightarrow$ Vetor de Observadores (Medição) | ▶ $\mathbf{P} \Rightarrow$ Covariância de Estados |
| ▶ $\mathbf{F} \Rightarrow$ Matriz de Transição de Estado | ▶ $\mathbf{G} \Rightarrow$ Ganho de Kalman |
| ▶ $\mathbf{w} \Rightarrow$ Ruído de Processo | ▶ $\mathbf{Q} \Rightarrow$ Covariância de \mathbf{w}_k |
| ▶ $\mathbf{v} \Rightarrow$ Ruído de Medição | ▶ $\mathbf{R} \Rightarrow$ Covariância de \mathbf{v}_k |

Filtro de Kalman



(HAYKIN, 2001)

Filtro de Kalman

Estimativas Ótimas

O filtro de Kalman é um método de *filtragem bayesiana*, sendo capaz de fornecer uma estimativa ótima para um problema inverso não-estacionário de modelo linear.

Fase de Propagação

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_{k,k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

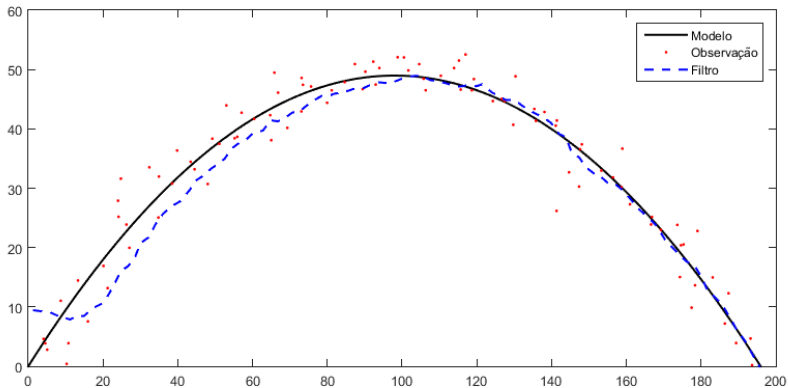
Fase de Atualização

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{G}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$$

Filtro de Kalman



Extended Kalman Filter (EKF)

Equações do EKF

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(k, \mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(k, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k^-}$$

O Filtro de Kalman, em sua forma tradicional, só pode ser aplicado a sistemas dinâmicos lineares. Para sistemas não-lineares, é possível utilizar o filtro em sua forma estendida ou *Unscented*, embora seu resultado não possa mais ser considerado como a estimativa ótima.

Metodologia

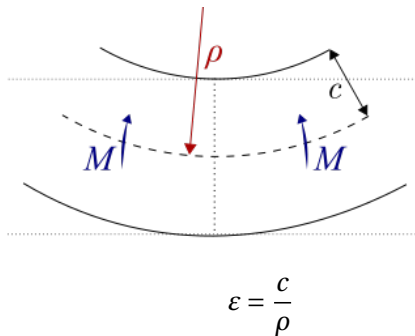
- ① Desenvolver o Modelo de Observação
- ② Desenvolver o Modelo de Evolução
- ③ Simular um Único Extensômetro
 - ① segundo uma função constante
 - ② segundo uma função linear
 - ③ segundo uma função seno
- ④ Simular uma Cinta Torácica
 - ① com extensômetros atuando isoladamente
 - ② com extensômetros reconhecendo o estado dos vizinhos

Modelo de Observação

$$\frac{R - R_0}{R_0} = \underbrace{(8 \pm 2)}_{G_f} \varepsilon \implies R = \frac{G_f R_0 c}{\rho} + R_0$$

$$h(k, x) = \frac{G_f R_0 c}{\rho_k} + R_0 + \bar{\varepsilon}$$

$$\mathbf{H}_k = - \frac{G_f R_0 c}{\rho_k^2}$$



Símbolos

- ▶ ρ : Raio de Curvatura
- ▶ R : Resistência do Extensômetro
- ▶ R_0 : Resistência Inicial
- ▶ c : Meia-altura do Extensômetro
- ▶ G_f : Fator de Extensometria
- ▶ ε_a : Erro de Aproximação

Erro de Aproximação

Erro de Aproximação

O método do erro de aproximação busca refletir o comportamento do observador y_k em situações reais, mesmo com perturbações e outras aproximações.

Valores utilizados para o cálculo do erro de aproximação.

Grandeza	Valor Verdadeiro k	Valor Medido k^a
ρ	$\mathcal{N}(190, 20^2)^*$	$\mathcal{N}(190, 20^2)^*$
R_0	9000	$\mathcal{N}(9000, 100^2)$
G_f	8	$\mathcal{N}(8, 1^2)$
c	1.7	1.7
ϵ	0	$\mathcal{U}(-0.5, 0.5)$

* Valores iguais aplicados a cada iteração.

$$\epsilon_a(t) = R_v(t) - R_m(t)$$

$$\epsilon_a = \bar{\epsilon}_a(t)$$

Modelo de Evolução

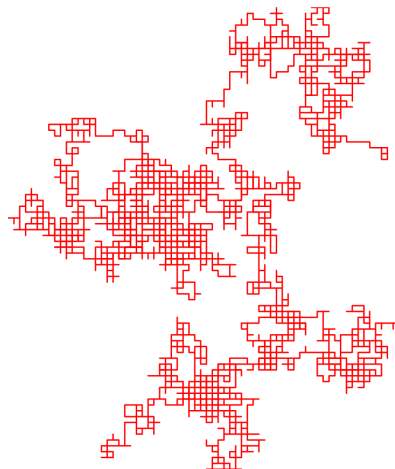
Passeio Aleatório

Modelo Unidimensional

$$\rho_{k+1} = \rho_k + w_k$$

Espaço de Estados

$$\mathbf{F}_{k,k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{m \text{ dimensões}}$$



(ALEXANDROV, 2013)

Primeiro Caso - Simulação do Extensômetro Isolado

Parâmetros utilizados na observação das variáveis e no observador do EKF.

Grandeza (unidade)	Valor Verdadeiro k	Valor Estimado k^a
ρ (mm)	$f(x)$	\mathbf{x}_k
R_0 (Ω)	9216	9000
G_f	8.1	8
c (mm)	1.532	1.7
ϵ (Ω)	0	0

Primeiro Caso - Simulação do Extensômetro Isolado

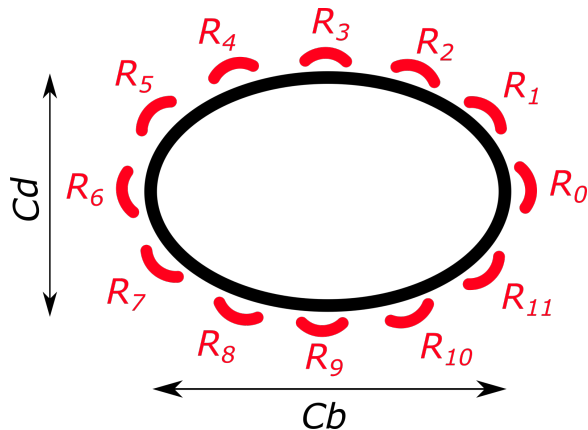
Simulações do Extensômetro Isolado.

Modelo	Função	Estado Inicial (x_0)	Covariância do Estado Inicial (P_0)	Covariância do Ruído de Processo (w_k)
Constante	$x = 10, t \in [0 : 1000]$	20	100	0.001
Linear	$x = -0.25 t + 300$	15	100	0.01
Seno	$x = 100 \sin 0.005 t + 100 + 100$	15	100	0.1

Equações do Filtro de Kalman

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_0 &= [x_0] & \mathbf{F} &= [1] \\
 \mathbf{P}_0 &= [P_0] & \mathbf{Q} &= [w_k] \\
 & & \mathbf{R} &= [\mathbf{Cov}(\epsilon_a)]
 \end{aligned}$$

Segundo Caso - Simulação da Geometria Torácica

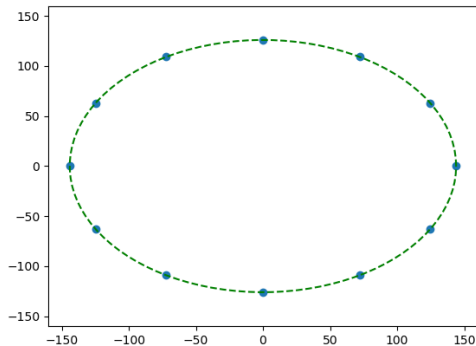


Etapas Iniciais

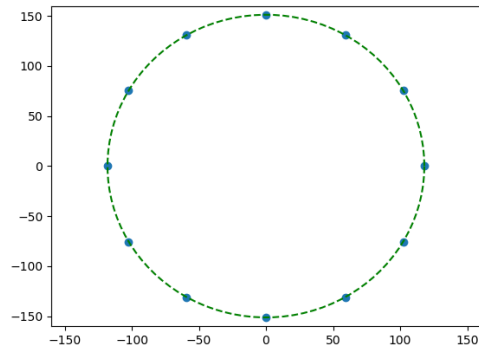
- ▶ Dados obtidos a partir do *US Army and Marine Corps Anthropometric Surveys*;
- ▶ obtenção das medidas médias de largura e profundidade do tórax com ferramentas estatísticas;
- ▶ geração de modelo dinâmico, simulando a expansão do tórax de um paciente, utilizando **12 extensômetros**.

Segundo Caso - Simulação de Geometria Torácica

Momento $k = 0$



Momento $k = 249$



Segundo Caso - Simulação da Geometria Torácica

Parâmetros utilizados na observação das variáveis para o segundo caso.

Grandeza (unidade)	Valor Verdadeiro k	Valor Estimado k^a
ρ (mm)	$\rho(x, y)$	\mathbf{x}_k
R_0 (Ω)	$\mathcal{N}(9000, 100^2)$	9000
G_f	$\mathcal{N}(8, 0.4^2)$	8
c (mm)	$\mathcal{N}(1.7, 0.1^2)$	1.7

Segundo Caso - Modelo sem Compensação

Foram consideradas duas situações de transição. Na primeira, a filtragem leva em consideração apenas os estados dos extensômetros como unidade distintas. Na segunda, os extensômetros vizinhos influenciam a evolução de estado do extensômetro central.

Equações do Filtro de Kalman

$$\mathbf{x}_0 = 100 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{12 \text{ vezes}}^T \quad \mathbf{R} = \mathbf{Cov}(\epsilon_a) \cdot \mathbf{I}_{12}$$

$$\mathbf{P}_0 = 100 \cdot \mathbf{I}_{12}$$

$$\mathbf{Q} = 0.01 \cdot \mathbf{I}_{12}$$

$$\mathbf{Q} = 0.01 \cdot \mathbf{I}_{12}$$

$$\mathbf{F} = 1 \cdot \mathbf{I}_{12}$$

Segundo Caso - Compensação por Vizinhos

$$\mathbf{Q} = 0.1 \cdot \mathbf{I}_{12}$$

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Segundo Caso - Reconstrução por ODR

A regressão por distâncias ortogonais é um método de *fitting* baseado no método dos mínimos quadrados.

$$\rho = \rho(\theta, a, b) = \frac{(a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

Variáveis ODR

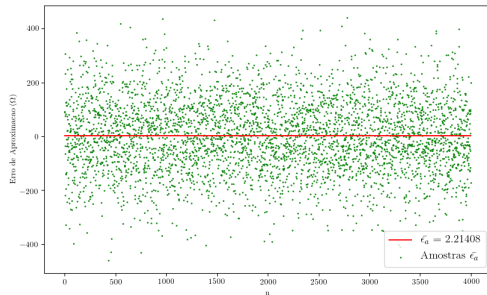
ρ = \mathbf{x} obtido pelo EKF

σ_ρ = $diag(\mathbf{P})$ obtido pelo EKF

θ = Posições dos extensômetros equidistantes

σ_θ = Metade da distância entre extensômetros

Resultados e Discussões



Erro de Aproximação

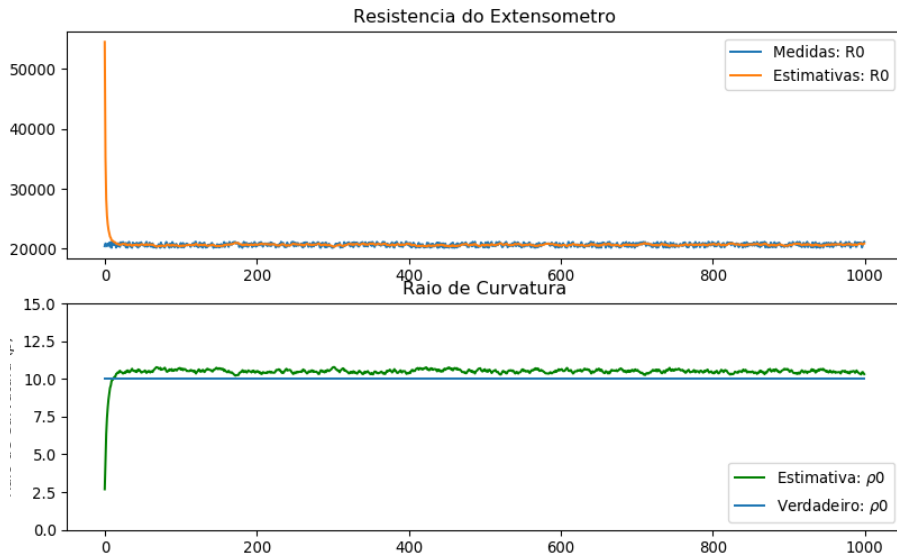
Média:

$$\bar{\epsilon} = 2.21048\Omega$$

Desvio Padrão:

$$\sigma_{\epsilon} = 134.92088\Omega$$

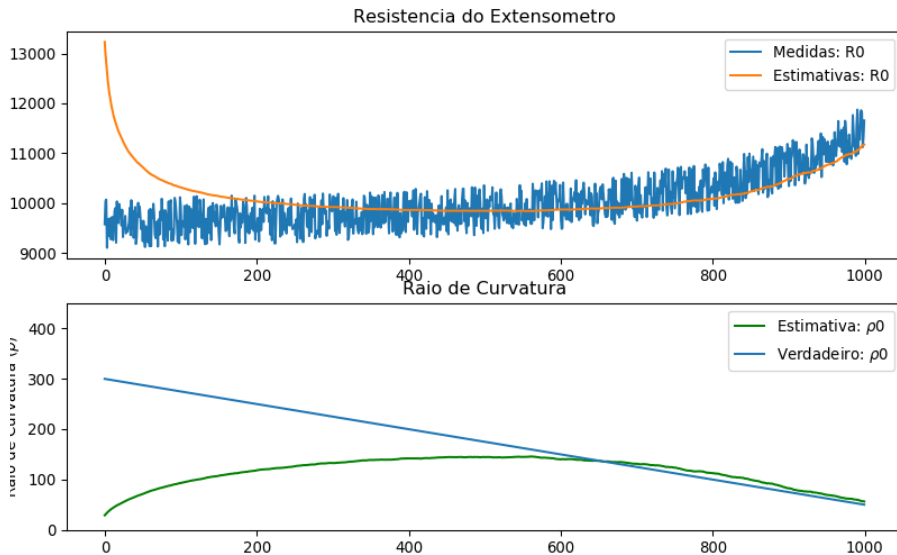
Modelo 1 - Função Constante



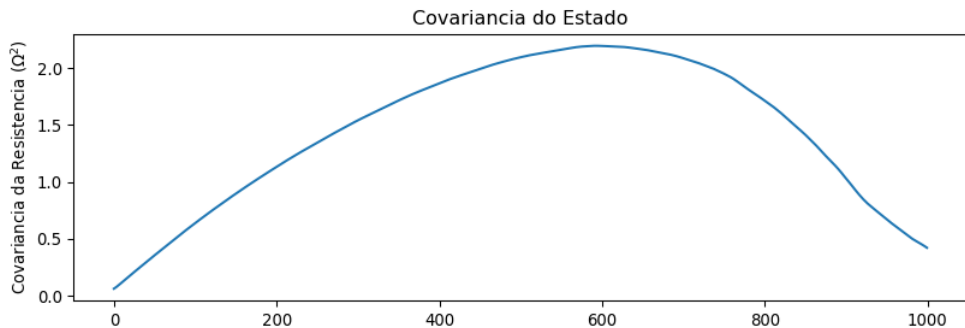
Modelo 1 - Função Constante



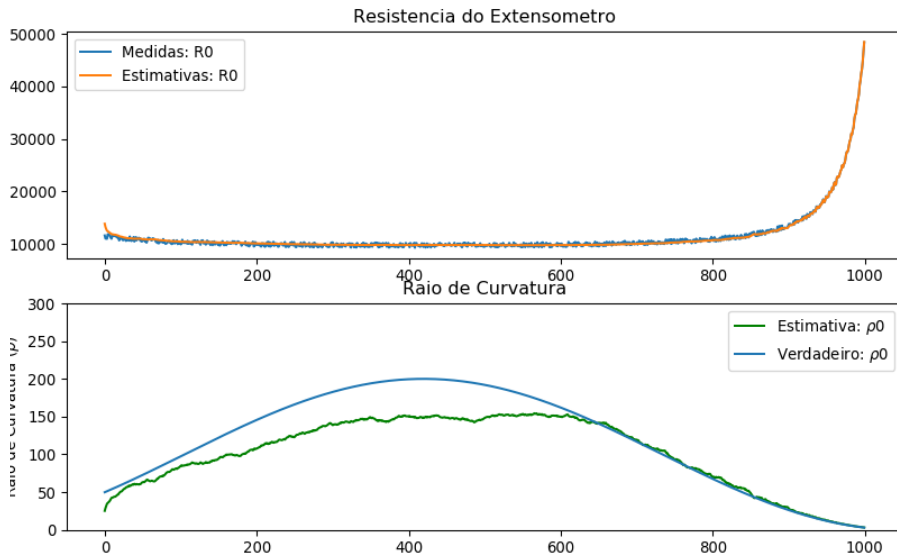
Modelo 2 - Função Linear



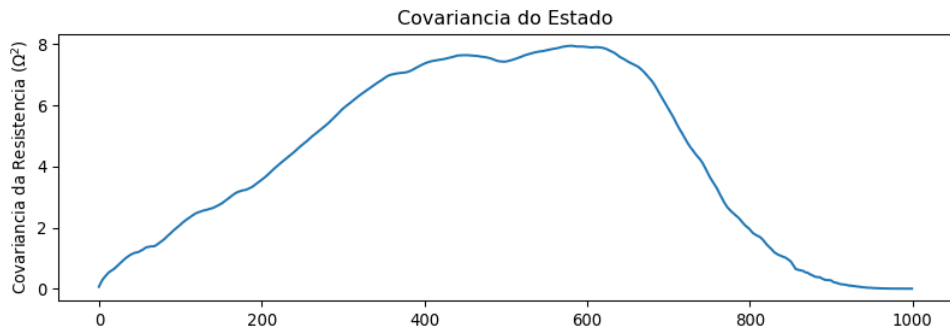
Modelo 2 - Função Linear



Modelo 3 - Função Seno



Modelo 3 - Função Seno



Resultados - Extensômetro Isolado

Valores de covariância do estado e mediana ao fim das simulações.

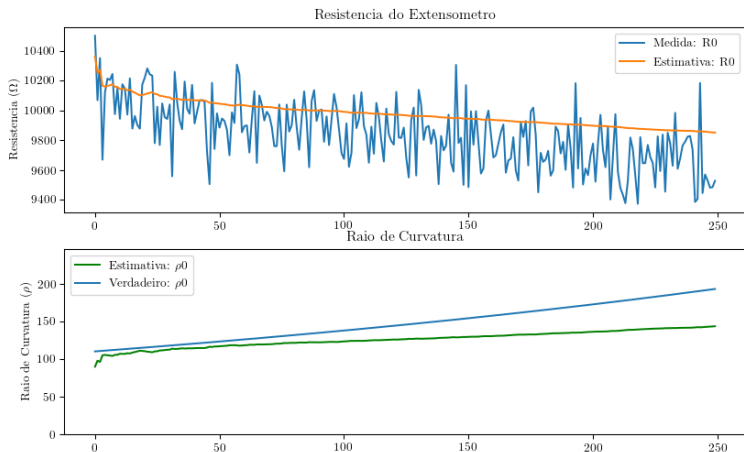
Modelo	$\mathbf{P}_{1000} (\Omega^2)$	$\mathbf{Med} (\mathbf{P}_k) (\Omega^2)$
Constante	0.00341	0.00338
Linear	0.41404	1.60205
Seno	0.00013	4.12573

Pontos Importantes

- 1 Em todos os casos, $P_{1000} < 5 \Omega^2$;
- 2 A covariância de processo \mathbf{Q} deve ser diferente para que os modelos possuam melhor desempenho em filtragem;
- 3 A covariância de medição \mathbf{R} pode ser tomada como $Cov(\epsilon_a)$.

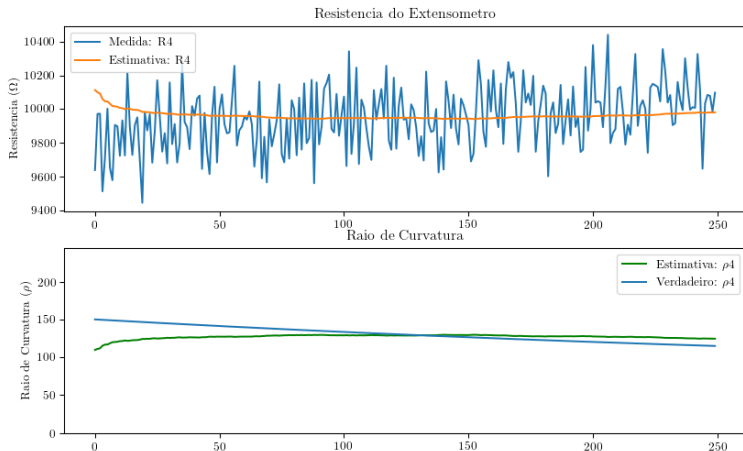
Resultados - Geometria Torácica

Filtragem - Extensômetro 0



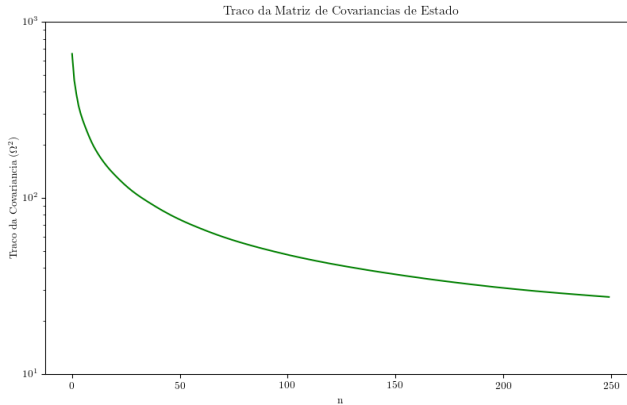
Resultados - Geometria Torácica

Filtragem - Extensômetro 4



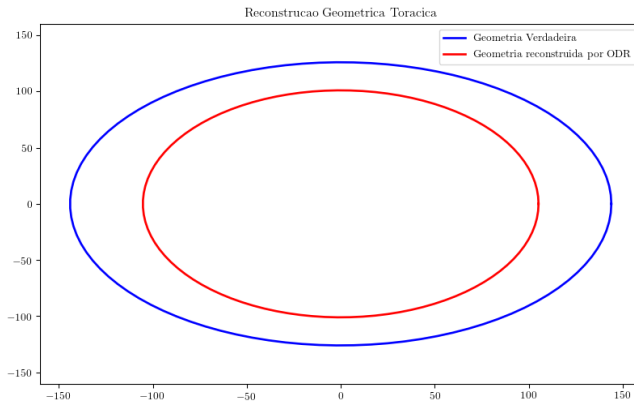
Resultados - Extensômetros Isolados

Traço de Covariância de Processo \mathbf{Q}



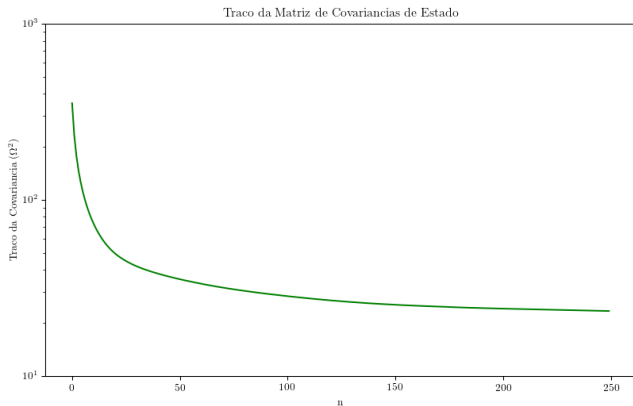
Resultados - Extensômetros Isolados

Reconstrução do Modelo



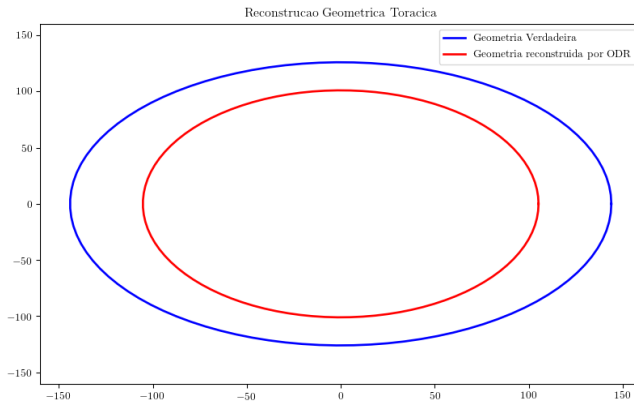
Resultados - Compensação por Extensômetros Vizinhos

Traço de Covariância de Processo \mathbf{Q}



Resultados - Compensação por Extensômetros Vizinhos

Reconstrução do Modelo



Resultados - Geometria Torácica

Traços de covariância do estado e mediana ao fim das simulações.

Modelo	$tr(\mathbf{P}_{249})(\Omega^2)$	Med ($tr(\mathbf{P}_k)(\Omega^2)$)
Extensômetros Isolados	27.30728	41.23845
Compensação por Vizinhos	23.32405	26.51812

Pontos Importantes

- 1 O modelo com compensação por vizinhos apresenta mediana do traço de covariâncias inferior ao outro modelo;
- 2 Os extensômetros de número 0 a 6 obtiveram desempenho de filtragem menor.

Conclusões

- ▶ Mesmo com divergências em relação à geometria real, a utilização do EKF é uma ferramenta importante de auxílio na determinação da geometria verdadeira pela reconstrução por extensômetros.
- ▶ Apesar do desempenho, outros de métodos de filtragem podem levar a melhores resultados. O *Unscented Kalman Filter* é um destes exemplos.

Conclusões

- ▶ O jacobiano da matriz de medição pode tornar inviável o uso do EKF para problemas mais complexos, com não-linearidades mais abruptas.
- ▶ Mesmo com a utilização da regressão por distâncias ortogonais, modelar o tórax como elipse não é de muita utilidade. Uma outra abordagem viável seria a reconstrução geométrica com métodos de geometria diferencial, determinando-se a função de curvatura da geometria em certos pontos.

Referências

- ADLER, A. *CT of human thorax showing current paths for EIT and equipotentials*. 2013. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CT_of_human_thorax_showing_current_paths_for_EIT_corrected.jpg>.
- ALEXANDROV, O. *Random Walk in 2D Closeup*. 2013. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Random_walk_in2D_closeup.png>.
- GREGÓRIO, É. D. C. *Instrumentação de Cinta de Eletrodos de Equipamento de Tomografia de Impedância Elétrica para Monitoração em Tempo Real do Formato e Excursão Torácica em Pacientes em Leito de UTI*. 29 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do ABC, 2017.
- HAYKIN, S. Kalman Filters. In: *Kalman Filtering and Neural Networks*. John Wiley & Sons, Inc., 2001. p. 1–21. ISBN 9780471221548. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/0471221546.ch1>>.