Ejercicios propuestos modelización

Esta es una selección de problemas de Programación Lineal bastante sencillos en general, clasificados según su naturaleza.

Los marcados con [**MF**] son problemas "muy fáciles", y se incluyen simplemente a modo de "calentamiento".

En algunos casos, se hace referencia a los siguientes libros, que tenéis disponibles en el Servicio de Publicaciones y/o en las diferentes bibliotecas de la UPV:

DIA Díaz Hernández, A. (2000): "Optimización: casos prácticos". UNED, Madrid.

HIL Hillier, F.S. y Lieberman, G.J. (2002): "Investigación de operaciones". McGraw-Hill/Interamericana, México.

MAR Maroto Álvarez, C.; Alcaraz Soria, J. (2008): "Investigación operativa: modelos y técnicas de optimización". Editorial UPV, Valencia. Ref.: 216.

Maroto Álvarez, C.; Alcaraz Soria, J. y Ruiz García, R. (2003): "Investigació operativa: models i tècniques d'optimització". Editorial UPV, València. Ref.: 3543.

Maroto Álvarez, C.; Alcaraz Soria, J. y Ruiz García, R. (2003): "Operations research: modeling and optimization techniques". Editorial UPV, Valencia. Ref.: 993.

MAT Mathur, K. y Solow, D. (1996): "Investigación de operaciones: el arte de tomar decisiones". Prentice-Hall Hispanoamericana, México.

ROD Rodríguez Huertas, R. y Gámez Mellado, A. (2002): "Investigación operativa: teoría, ejercicios y prácticas con ordenador". Universidad de Cádiz, Cádiz.

SAR Sarabia Viejo, Á. (1996): "La investigación operativa: Una herramienta para la adopción de decisiones". Universidad Pontificia Comillas, Madrid.

VAL Vallada Regalado, E. y Giner i Bosch, V. (2004): "Problemas de investigación operativa para ingenieros". Editorial UPV, Valencia. Ref.: 4302.

Vallada Regalado, E. y Giner i Bosch, V. (2004): "Problemes d'investigació operativa per a enginyers". Editorial UPV, València. Ref.: 3017.

WIN Winston, W.L. (2005): "Investigación de operaciones". Thomson, Madrid.

Programación de la producción

En este tipo de problemas, se plantea la necesidad de planificar la producción de diferentes bienes o servicios, o la realización de diversas actividades, de manera que se maximice el beneficio o se minimice el coste (económico o de otro tipo), atendiendo a unas limitaciones derivadas de la disponibilidad de recursos, así como, en su caso, de las demandas máximas o mínimas.

2.1 [MF] **Exportación de naranjas.** Una cooperativa citrícola exporta naranjas únicamente a EEUU y Japón, obteniendo por ello unos beneficios de 2 y 1 u.m. (unidades monetarias) por tonelada, respectivamente. La cooperativa se encuentra con dos limitaciones, derivadas de los acuerdos políticos de comercio exterior. Por una parte, su venta al extranjero no puede exceder de 200 toneladas y la diferencia entre las ventas a EEUU y a Japón no puede superar las 100 toneladas.

Plantea un modelo que permita saber cuál debe ser la cantidad exportada a cada país para maximizar los beneficios. Resuélvelo gráficamente (Tema 2) y aplicando el algoritmo del Simplex (Tema 3).

2.2 [MF] **Edición de revistas de Ingeniería.** Una editorial especializada en revistas de divulgación edita dos publicaciones dirigidas al ámbito de la Ingeniería: Pistón y Biela. Durante el proceso de impresión, cada ejemplar de Pistón ocupa 10 segundos de trabajo en la máquina 1 y 6 segundos de la máquina 2, y cada ejemplar de Biela necesita 6 segundos de la máquina 1 y 10 segundos de la 2. La máquina 1 puede trabajar 60 horas por cada tirada y 84 horas la máquina 2, y los beneficios netos son de 3 u.m. (unidades monetarias) y 5 u.m. por cada ejemplar vendido de Pistón y Biela, respectivamente.

Plantea el problema de maximizar los beneficios por ventas de la sección de Ingeniería de la editorial. Resuélvelo gráficamente (Tema 2) y mediante el algoritmo del Simplex (Tema 3).

2.3 **Una fábrica de piensos.** [DIA pág 154 (adaptación)] Una fábrica de piensos tiene productos de cuatro tipos diferentes, A, B, C y D, que proporcionan beneficios de 50, 40, 30 y 10 u.m., respectivamente. Los obtiene añadiendo proteínas, grasas e hidratos de carbono en distintas proporciones, a un sustrato básico. Los gramos de proteínas, grasas e hidratos añadidos por cada unidad de producto vienen dados en la siguiente tabla.

	A	B	C	D
Proteínas	3	2	3	1
Grasas	2	1	1	4
Hidratos	1	1	1	1

La fábrica va a hacer balance y quiere utilizar antes los 5 kg de proteínas, 7 de grasas y 12 de hidratos de carbono que quedan en el almacén.

Plantea un modelo lineal que permita a la fábrica saber la mejor manera en que puede emplear la materia prima de que dispone. De las restricciones que hayas escrito, intenta deducir si alguna de ellas es redundante (es decir, que se verifica si se cumplen todas las demás), explicando por qué. Resuelve el modelo mediante el método Simplex o con Solver de Excel.

2.4 **Optimización de la audiencia.** [DIA pág 151 (adaptación)] Cierto programa de media hora de televisión consta de la actuación de un equilibrista, un mago y una cantante. Los anuncios duran al menos tres minutos. El equilibrista pretende estar en el aire al menos el doble de tiempo que la cantante. El productor quiere que el tiempo utilizado por el equilibrista y la cantante juntos sea al menos el mismo que ha utilizado el mago. Un análisis de audiencia revela que, por cada minuto de actuación del equilibrista, el mago y la cantante, verán el programa 40, 50 y 60 personas, respectivamente.

Formula un modelo de Programación Lineal que permita saber el tiempo que debe estar en pantalla cada actor para que la audiencia sea máxima. Resuélvelo mediante el método Simplex.

2.5 **Fabricación de válvulas de corazón.** [WIN pág 71 (adaptación)] Laboratorios Ba-Tec fabrica válvulas mecánicas para el corazón a partir de válvulas del corazón de cerdos. Se requieren válvulas de distintas dimensiones en diferentes operaciones del corazón. Laboratorios Ba-Tec compra válvulas de cerdo a tres proveedores distintos. El coste y la proporción de válvulas de cada tamaño compradas a cada proveedor se muestran en la tabla siguiente.

Proveedor	Coste por válvula (euros)	Válvulas grandes (%)	Válvulas medianas (%)	Válvulas pequeñas (%)
1	5	40	40	20
2	4	30	35	35
3	3	20	20	60

Cada mes, Laboratorios Ba-Tec hace un pedido a cada proveedor. Se deben comprar todos los meses por lo menos 500 válvulas grandes, 300 medianas y 300 pequeñas. Debido a la disponibilidad limitada de válvulas de cerdo, se compran como mucho 700 válvulas a cada proveedor. Formula y resuelve un modelo de Programación Lineal con el que se pueda minimizar los costes de adquisición de las válvulas necesarias.

2.6 **Almacenamiento y venta de electrodomésticos.** [$\boxed{\text{WIN}}$ pág 93 (adaptación)] Los responsables de un establecimiento de la Cadena Mazter deben decidir cuántos televisores y aparatos de radio conservar en almacén. Un televisor requiere 3 metros cuadrados de espacio en el suelo, mientras que una radio necesita 1,2 metros cuadrados. Se dispone de 60 metros cuadrados de espacio en el suelo. El beneficio obtenido por cada televisor es 60 euros, y 20 por cada radio. El establecimiento almacena sólo televisores y radios. Los requisitos del mercado señalan que al menos el 60% de todos los aparatos deben ser radios. Por último, un televisor inmoviliza 200 euros de capital, y una radio, 50 euros. Cadena Mazter quiere tener en todo momento como mucho un capital inmovilizado de 3.000 euros. Plantea y resuelve un modelo de Programación Lineal con el que se pueda maximizar el beneficio del establecimiento. Resuelve mediante el método del Simplex.

2.7 **Procesamiento de cítricos.** Una cooperativa de cítricos trabaja con limones (especialidad Mesero) y con naranjas (especialidad Navel). Actualmente tiene dos principales mercados: EEUU y la UE. Dependiendo del mercado a que vayan destinados los productos, éstos tienen un precio u otro. La cooperativa tiene dos líneas de proceso, una para naranjas y otra para limones, cada línea con una capacidad máxima de proceso. De igual manera, la cooperativa puede almacenar un máximo de kilogramos de producto. Los mercados a los que van destinados los productos tienen unas demandas mínimas de cada producto. Todos los datos se muestran en la tabla siguiente.

Producto	Mercados				Capacidad máxima proceso cooperativa (kg)
	EEUU		UE		
	Precio (€/kg)	Demanda Mín (kg)	Precio (€/kg)	Demanda Mín (kg)	
Naranja	1,02	10.000	0,96	8.000	35.000
Limón	0,5	5.000	0,48	—	20.000
	Capacidad máxima almacenamiento cooperativa (kg):				50.000

Actualmente, la cooperativa distribuye un total de 20.000 y 15.000 kg de naranjas a EEUU y a la UE respectivamente y 5.000 kg de limones tanto a EEUU como a la UE.

Desarrolla y resuelve el modelo lineal que permita encontrar la solución que maximiza el beneficio de la cooperativa.

2.8 **Fabricación de ordenadores.** Los responsables de una empresa local dedicada al montaje y venta de ordenadores, se plantean organizar la producción mensual de sus tres artículos estrella: el potente ordenador de sobremesa Alfa, el ligero portátil Beta, y otro dispositivo llamado Gamma, que integra en un mismo aparato una agenda electrónica, una cámara digital y un teléfono móvil.

En la tabla siguiente se recogen los beneficios unitarios para cada producto, el tiempo que requiere cada unidad en los diferentes departamentos de la empresa, la disponibilidad de recursos y la demanda máxima mensual estimada para cada dispositivo.

	Departamento de recepción de piezas	**Departamento de montaje**	**Demanda máxima mensual**	**Beneficio neto**
Alfa	15 min / ud	45 min / ud	100 uds	100 u.m.
Beta	18 min / ud	1 h 30 min / ud	200 uds	150 u.m.
Gamma	30 min / ud	1 h 45 min / ud	300 uds	300 u.m.
Límite mensual	320 horas	800 horas		

Plantea un modelo que permita a los responsables del negocio saber cuántos ordenadores de cada tipo deben fabricar al mes para conseguir el máximo beneficio.

2.9 Fabricación de pupitres. [ROD pág 111 (adaptación)] Una fábrica hace muebles: pupitres, mesas y sillas. Cada pupitre supone una ganancia de 60 euros, cada mesa 30, y cada silla 20. El material y horas de sueldo necesarios para realizar cada uno de estos muebles viene expresado en la siguiente tabla, donde también se indica la cantidad de recursos disponibles actualmente.

	Pupitres	**Mesas**	**Sillas**	**Disponible**
Material (madera)	8	6	1	48
Carpintería (horas)	4	2	1,5	20
Acabado y transporte (horas)	2	1,5	0,5	8

Plantea un modelo que permita saber cuántos muebles debe hacer de cada clase para maximizar la ganancia.

2.10 Mezclas de harinas. [DIA pág 163 (adaptación)] Se ha suministrado a un almacén 2.000 kg de harina del tipo 1 y 1.000 kg de harina del tipo 2. Con ellos se hacen tres clases de mezclas: una mezcla A con triple cantidad del primer tipo de harina que del segundo; una mezcla B, en la que se emplea el triple del segundo tipo que del primero; y una tercera mezcla C, en la que se emplea la cuarta parte del segundo tipo que del primero. Por cada kilogramo que se vende de la clase A se ganan 20 u.m., por cada uno de la clase B se ganan 24 u.m., y 30 u.m. por cada kilogramo de la clase C.

Plantea un modelo lineal que nos diga cuántos kilogramos de cada mezcla se deben hacer con la harina suministrada al almacén, para que el volumen de las ventas sea máximo. Resuélvelo mediante software de optimización.

2.11 **Una empresa alimenticia.** Los responsables de la empresa de productos alimenticios Turronet, SL han analizado los resultados de la pasada campaña navideña, y ya están planificando la producción del próximo año.

En Turronet se producen tres tipos de turrón: duro, blando y de yema. Para la fabricación de cada pastilla (100 gramos), se emplean los ingredientes que se indican en la **Tabla 1**, en la que también se recoge la proporción en que debe aparecer cada ingrediente, así como su disponibilidad.

Tipo de turrón	**Ingredientes (por cada 1.000 pastillas)**			
	Almendras (Kg)	**Miel (Kg)**	**Huevos (uds)**	**Azúcar (Kg)**
Duro	60	30	60	10
Blando	50	33	67	17
Yema	50	25	70	25
Existencias	13.000	9.000	17.800	4.600

Tabla 1: Composición de cada tipo de turrón, y cantidad disponible de cada ingrediente.

Por la venta de cada pastilla de turrón duro, blando y de yema se obtiene un beneficio neto de 1, 0,50 y 0,20 euros, respectivamente.

Asimismo, a partir de datos históricos, se estima que, en el próximo año, la demanda máxima de cada tipo de turrón será: 80.000 pastillas de turrón duro, 100.000 del blando y 90.000 de yema.

A partir de estos datos, formula un modelo lineal que permita a los responsables de la empresa decidir qué cantidad de pastillas de cada tipo deben producir el próximo año, de manera que el beneficio sea máximo.

Programación agropecuaria

Un ejemplo característico de problemas de programación de la producción en ingeniería agrícola lo constituyen los problemas de asignación o planificación de cultivos, y los de producción agropecuaria en general.

2.12 [MF] **Cultivo de cebada y trigo.** Un campesino dispone de 100 hectáreas para el cultivo de cebada y trigo. El coste de la semilla de cebada es de 4 €/ha y la semilla de trigo tiene un coste de 6 €/ha. El coste total de la mano de obra es de 20 € y 10 € por hectárea, respectivamente. El beneficio esperado es de 110 € por cada hectárea de cebada y 150 € por cada hectárea de trigo. Si no se desea gastar más de 480 € en semillas ni más de 1.500 € en mano de obra, ¿cuántas hectáreas de cada uno de los cultivos deben plantarse para obtener la máxima ganancia?

Plantea un modelo lineal para resolver el problema y obtén la solución mediante el método Simplex.

2.13 [MF] **Un problema de producción de un cultivo agrícola.** Se desea organizar la producción agrícola (en este caso, qué cultivos llevar a cabo) para maximizar los beneficios netos, teniendo en cuenta las condiciones que se describen a continuación.

- Terreno disponible 5 hectáreas
- Mano de obra 72 horas
- Capital 360 euros

Las actividades a realizar y los recursos que consume cada una son los siguientes:

	Mano de obra	Capital
▪ Cultivo de maíz	12 h/ha	90 €/ha
▪ Cultivo de soja	12 h/ha	60 €/ha

Los precios o beneficios netos (valor de la venta bruta menos los costes variables de producción) de los cultivos son los siguientes:

- Maíz: 96 €/ha
- Soja: 72 €/ha

Plantea un modelo de programación lineal para resolver el problema de producción expuesto, indicando claramente la definición de las variables (con sus unidades), la función objetivo y las restricciones. Resuelve mediante el método del Simplex.

2.14 Árboles frutales. [$\boxed{\text{ROD}}$ pág 21-22 (adaptación)] Un agricultor tiene una parcela de 640 m^2 para dedicarla al cultivo de árboles frutales: naranjos, perales y manzanos. Se pregunta de qué forma repartirá la superficie de la parcela entre las tres variedades para conseguir el máximo beneficio, sabiendo que:

- Cada naranjo necesita un mínimo de 16 m^2, cada peral 4 m^2 y cada manzano 8 m^2.
- Dispone de 900 horas de trabajo al año, necesitando cada naranjo 30 horas al año, cada peral 5, y cada manzano 10.

Los beneficios unitarios son de 50, 25 y 20 unidades monetarias, por cada naranjo, peral y manzano, respectivamente.

Plantea un modelo que sirva para resolver el problema del agricultor.

Programación de inversiones

2.15 [MF] **Distribución de una herencia.** Un anciano señor, rico de profesión, desea distribuir una herencia de 100 millones de euros entre un hijo y un sobrino. El anciano desearía que la parte del hijo no fuese más del doble que la del sobrino. Además, el impuesto de sucesiones grava en un 10% las herencias transmitidas a los hijos y en un 15% las transmitidas a otros parientes.

Formula un modelo de Programación Lineal que permita minimizar el coste fiscal de la herencia, respetando la voluntad del anciano, y resuélvelo mediante el algoritmo del Simplex.

2.16 **Distribución de una inversión bursátil.** Un rentista desea invertir en bolsa 200 u.m. (unidades monetarias) en los sectores (1) Eléctrico, que tiene una rentabilidad del 4%, (2) Banca, con una rentabilidad del 5% y (3) Servicios, con una rentabilidad del 9%. Un experto le aconseja que no invierta en Eléctricas más de la mitad de la inversión total, en Banca al menos 70 u.m., y que la inversión en Servicios no supere las 40 u.m.

Plantea el modelo de Programación Lineal para distribuir la inversión en bolsa cumpliendo con las recomendaciones del experto y obtener el máximo beneficio. Resuélvelo mediante el método Simplex.

2.17 Distribución de ahorros. Un estudiante de Ingeniería decide invertir todos sus ahorros, que ascienden a 3.000 euros, en dos negocios junto con unos amigos suyos: cultivo y venta de bonsáis, y recogida y reciclaje de papel y cartón.

Cada ejemplar de bonsái supone una inversión de capital de 3 euros, y los ingresos por su venta son de 60 euros. A pesar de todos los cuidados, se sabe que existe una probabilidad del 10% de que un bonsái sufra alguna enfermedad y tenga que ser descartado para la venta.

Los ingresos en el negocio de la recogida de papel y cartón están completamente estimados por un plan de viabilidad previo, y son de 4 euros por cada euro invertido (es decir, 3 euros de beneficio por cada euro invertido).

El estudiante se ha comprometido a invertir al menos 500 euros en cada uno de los dos negocios. Asimismo, por conciencia social, decide que no invertirá más dinero en el negocio de los bonsáis que en el de reciclaje de papel y cartón.

Para poder evitar el pago de impuestos, al menos la tercera parte del BENEFICIO (ingresos – costes) obtenido debe provenir del negocio del papel y cartón.

Con todos estos datos, ayuda al estudiante a plantear un modelo que le permita invertir su dinero de manera que maximice su beneficio. Resuelve mediante el Simplex o el Solver de Excel.

Dietas y mezclas óptimas

Los problemas de preparación de mezclas son un ejemplo clásico de Programación Lineal. En un problema de mezclas, dos o más materias primas deben combinarse para obtener uno o más productos elaborados, satisfaciendo ciertas condiciones de calidad en el producto final. La elaboración de sustancias compuestas para uso industrial, la confección de alimentos o dietas para personas o piensos para animales de producción y la preparación de abonos o sustratos son algunos ejemplos de problemas de mezclas relacionados con la Ingeniería.

2.17 [MF] **Una dieta adelgazante.** [ROD pág 18] A una persona que quiere adelgazar se le ofrecen dos productos A y B para que tome una mezcla de ambos, con las siguientes recomendaciones:

- No debe tomar más de 150 g de la mezcla ni menos de 50 g.
- La cantidad de producto A debe ser igual o superior a la de B.
- No debe incluir más de 100 g de A.

Si 100 g de A contienen 30 mg de vitaminas y 450 calorías, y 100 g de B contienen 20 mg de vitaminas y 150 calorías:

a) Formula un modelo que permita saber cuántos gramos de cada producto debe mezclar para obtener el preparado que sea más rico en vitaminas.

b) Formula un modelo que permita saber cuántos gramos de cada producto debe mezclar para obtener el preparado que sea más pobre en calorías.

2.18 [MF] **Dieta básica de una persona.** [$\boxed{\text{WIN}}$ pág 69 (adaptación)] La dieta de cierta persona requiere que todos los alimentos que ingiera pertenezcan a uno de los cuatro "grupos básicos de alimentos" (pastel de chocolate, helado de crema, bebidas gaseosas y tarta de queso). En este momento, dispone de los siguientes cuatro alimentos: barritas de chocolate, helado de crema de chocolate, bebida de cola y pastel de queso con piña. Cada barrita de chocolate cuesta 0,50 euros, cada bola de helado de crema de chocolate cuesta 0,20 euros, cada botella de bebida de cola cuesta 0,30 euros y cada porción de tarta de queso con piña cuesta 0,80 euros. Todos los días la persona debe ingerir al menos 500 calorías, 172 g de chocolate, 287 g de azúcar y 230 g de grasa. El contenido nutricional por unidad de cada alimento se proporciona en la tabla siguiente.

Alimento	**Calorías**	**Chocolate (gramos)**	**Azúcar (gramos)**	**Grasa (gramos)**
1 Barrita de chocolate	400	86	57	57
1 bola de helado de choco.	200	57	57	115
1 botella de bebida de cola	150	0	115	29
1 porc. tarta queso y piña	500	0	115	144

Plantea un modelo lineal que ayude a esta persona a cumplir con sus necesidades nutricionales al mínimo coste.

2.19 [MF] **Producción de cacao soluble.** Una empresa alimenticia está elaborando un nuevo preparado de cacao soluble. Para ello, cuenta con 3 proveedores, cada uno de los cuales facilita un compuesto base diferente; la empresa simplemente ha de mezclar entre sí los tres compuestos para obtener el producto final.

Las características alimenticias de los tres compuestos, así como su precio, se resumen en la tabla siguiente:

Compuesto	**Proteínas (%)**	**Grasas (%)**	**Precio (€/Kg)**
A	6,7	2,8	0,78
B	6,7	3,4	0,71
C	8,9	3,4	0,37

Se desea que el producto final tenga un porcentaje de proteínas entre 7 y 8%, y que el porcentaje de grasas no supere el 3,1%.

Plantea un modelo lineal que ayude a los responsables de la empresa a decidir qué cantidad de compuesto debe comprar a cada proveedor, por cada kilogramo de producto a elaborar, de manera que el coste para la empresa sea el mínimo posible.