Universidade do Minho

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

# Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

A82582
Adriana Meireles

A68547
Lucas Pereira

A78156
Nuno Silva

A73577
Ricardo Pereira

A82617
Shahzod Yusupov

10 de Dezembro de 2018

# Dados

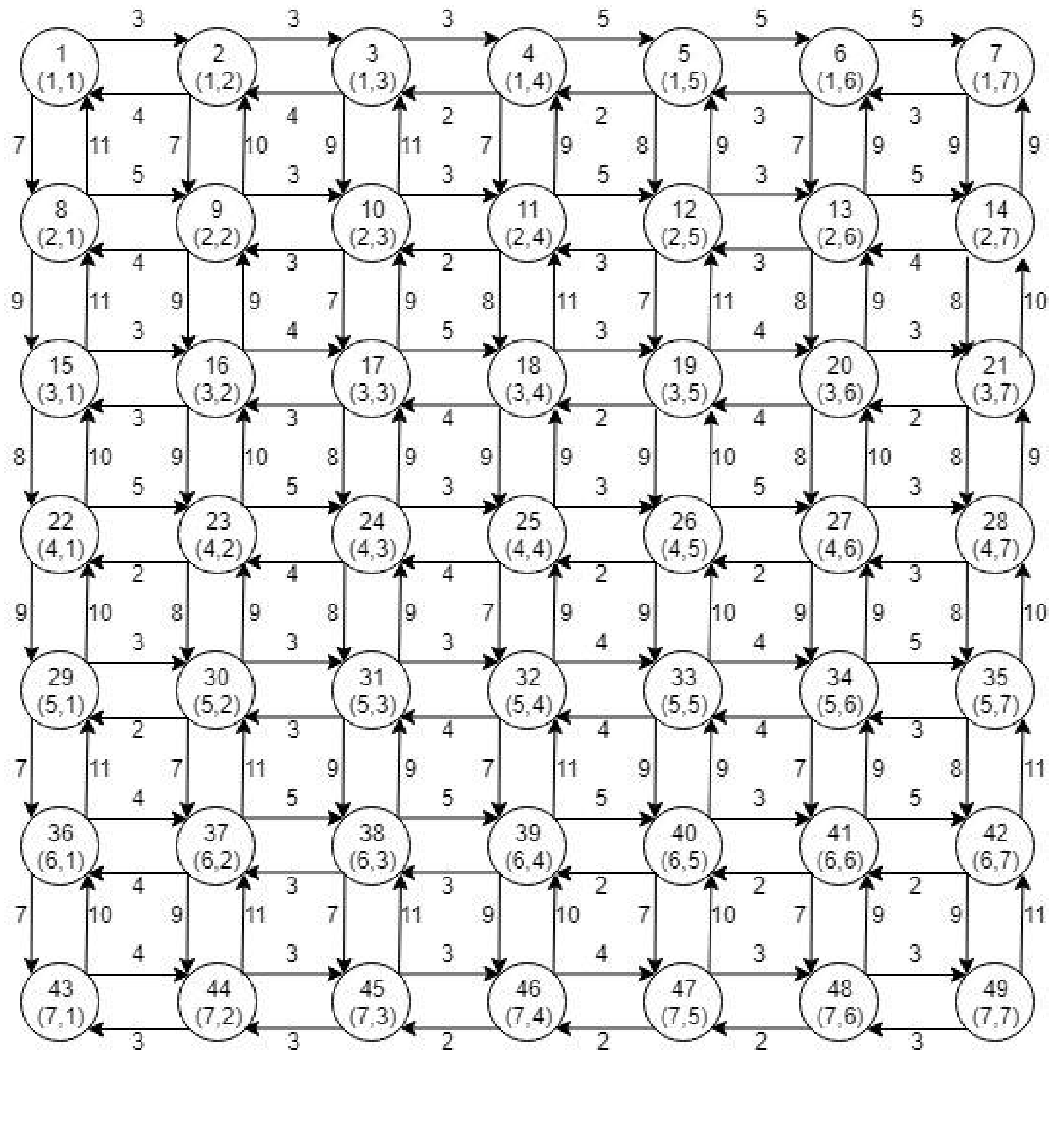
Considere uma rede numa grelha 7 por 7 (49 nodos) com arcos na vertical e na horizontal (em ambos os sentidos).

Considere os tempos de propagação obtidos da forma que se passa a explicar:

- Pegando no maior número de aluno do grupo, dividam-no em *abcde*;
- O algarismo 0 é substituído por 1;
- Os tempos de propagação do fogo a partir de uma célula são:
  - $a$ para norte;
  - $b$ para leste;
  - $c$ para sul;
  - $d$ para oeste;
- A cada um dos últimos valores é adicionado um número aleatório entre 1 e 3;
- O tempo de retardamento ($\Delta$) e o número de recursos ($b$) têm o mesmo valor que é o do maior algarismo;
- A constante de protecção ($g$) tem o valor 12 + *menor algarismo*.

# Grafo

O grafo que se segue, foi construido segundo as intruções dadas. Após termos aplicado os valores aos arcos que saem de cada célula, somamos a cada um deles um algarismo entre 1 e 3 gerado aleatoriamente com a ajuda de um site (random.org) que conheciamos na rede.



# Questão 1

**a) Considere uma rede com $n$ nodos, o conjunto de arcos $A$, e tempos de propagação no arco $ij$ de $c_{ij}$, $\forall ij \in A$. Apresente um modelo de programação linear que permita determinar o instante de chegada do fogo a cada nodo assumindo que o nodo de ignição é o nodo 1. Exemplifique com instância descrita em anexo.**

O modelo de programação linear é o modelo que nós formulamos para extrair a solução do nosso problema, seja através de cálculos ou até programas, como no caso em questão.

Os dados que podemos assumir como parâmetros do problema são o conjunto de todos os arcos, com 168 elementos e os tempos de propagação de cada arco. Será absolutamente necessário que o programa tenha acesso a estes últimos pois serão decisivos na obtenção da solução final. Decidimos então organizá-los numa matriz de 49 linhas, que representam as origens e 49 colunas, que representam os destinos, em que cada elemento corresponde ao tempo de propagação do incêndio da origem i para o destino j. Como tínhamos que preencher muitas células, decidimos procurar um "programa"que nos facilitasse esta tarefa; após alguma pesquisa encontramos uma folha excel que nos colocava os tempos nos locais certos da matriz, preenchendo os restantes (aqueles cujo arco era inexistente) com o número 999999 (inicialmente, erradamente, colocamos 0, que era o mesmo que dizer que entre esses nodos, o fogo propagava-se instantâneamente!).

<u>**Parâmetros**</u>:

- A - conjunto de arcos formados por uma rede de $N$ nodos;
- $c_{ij}$ - tempo de propagação do arco com origem i e destino j.

Nas variáveis de decisão, vamos ter, em cada uma, o número de caminhos que passam no arco ij.

<u>**Variáveis de decisão**</u>:

- $x_{ij}$ - número de caminhos do incêndio que atravessam o arco i j, $\forall_{1 \leq i,j \leq 49}$.

A função objetivo vai definir aquilo que nós queremos fazer, isto é, queremos saber o tempo que o incêndio demora até chegar a cada nodo; mas será o menor ou o maior tempo? Obviamente, quando estamos a estudar a progressão de um incêndio num terreno, queremos estimar o quão rápido este vai chegar a um determinado local, pelo que nos interessa a estimativa do menor tempo, ou seja, interessa-nos minimizar o tempo total, soma dos tempos de cada caminho.

**Função objetivo**:

- min $z = \sum_{i,j \in A} c_{i,j} x_{i,j}$

Agora, passamos a explicar as três restrições que mostramos em baixo, todas elas generalizadas:

1. a primeira restrição, na verdade, engloba dois casos, respetivamente:
   (a) caso em que é tratado o nodo de ignição, onde entra o número de arcos que o incêndio poderá percorrer, que se traduz por:
      - $x_{1,2} + x_{1,8} - x_{2,1} - x_{8,1} = 48$ (nodo 1);

   (b) caso em que são tratados os restantes nodos de ignição, pois sempre que o incêndio chega a um destes, deve ser retirado 1 arco ao número de arcos que ainda tem para percorrer; alguns exemplos das restrições implícitas nesta restrição geral:
      - $x_{4,3} + x_{4,5} + x_{4,11} - x_{3,4} - x_{5,4} - x_{11,4} = -1$ (nodo 4);
      - $x_{7,6} + x_{7,14} - x_{6,7} - x_{14,7} = -1$ (nodo 7);
      - $x_{25,18} + x_{25,24} + x_{25,26} + x_{25,32} - x_{18,25} - x_{24,25} - x_{26,25} - x_{32,25} = -1$ (nodo 25);
      - $x_{49,42} + x_{49,48} - x_{42,49} - x_{48,49} = -1$ (nodo 49);
2. a segunda restrição impede a existência de caminhos que incluam arcos recursivos, uma vez que uma área que hipoteticamente já ardeu, não irá voltar a arder;
3. a terceira, última, e talvez a mais básica, assegura a inexistência de tempos negativos;

**Sujeito a**:

- $\sum\limits_{ij \in A} \text{x}_{ij}$ - $\sum\limits_{ji \in A} \text{x}_{ji} = \begin{cases} \text{N-1, se i= 1} \\ \text{-1, se i=2...N} \end{cases}$

- $x_{ii} = 0, \forall_{ii} \in A$

- $x_{ij} \geq 0, \forall_{ij} \in A$

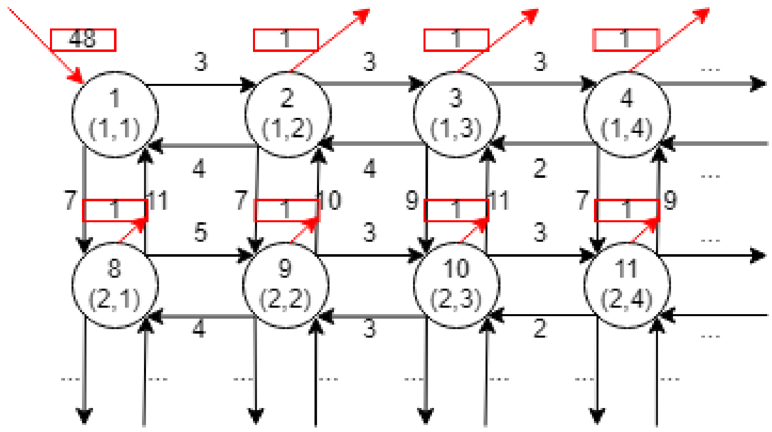



Figura 2: Animação que mostra o que é que vai entrando e o que vai saindo do grafo à medida que o incêndio progride.

**b) Apresente o modelo dual do modelo da alínea anterior. Exemplifique com a mesma instância.**

Extraída a informação importante e concluido o modelo primal, foi-nos também solicitado que apresentássemos o modelo dual, que, apesar de ter os dados iguais, evidencia significados diferentes para as soluções obtidas.

**Parâmetros**:

- (os mesmos explicitados anteriormente)

No modelo dual, as variáveis de decisão, representam, cada uma, a soma dos tempos de propagação do incêndio (desde o nodo de ignição) até ao nodo i, onde este se extinguiu.

**Variáveis de decisão**:

- $y_i$ - tempo decorrido até o incêndido parar em i, $\forall_{1 \leq i \leq 49}$.

A função objetivo, se tanto o modelo primal como o modelo dual estiverem bem feitos, deverá dar o mesmo resultado para ambos!

**Função objetivo**:

- max $w = (N-1) * y_1 + \sum_{i=2}^{N} y_i$

Passemos então à explicação das restrições do modelo dual:

- a primeira restrição, salvaguarda que a diferença entre o tempo que o incêndio demora a chegar a um nodo e o tempo que demora a chegar ao outro, sendo que entre estes existe um arco, não é maior que o tempo de propagação daquele arco;
  - $y_{26} - y_{25} \leq c_{25,26}$ (arco 26-25);
  - $y_{47} - y_{46} \leq c_{25,26}$ (arco 46-47).
- a segunda, força o tempo total de propagações a ser zero, pois é ali que o fogo começa, não tendo oportunidade para se ter propagado anteriormente;
- a terceira restrição, como no modelo primal, garante a não negatividade dos tempos das variáveis de decisão.

**Sujeito a**:

- $y_j - y_i \leq c_{i,j}, \forall_{1 \leq i \leq N} \wedge \forall_{2 \leq j \leq N}$;
- $y_1 = 0$;
- $y_i \geq 0, \forall_{1 \leq i \leq N}$.

**c) Para a mesma instância, obtenha as soluções óptimas primal e dual através da resolução do modelo primal.**

A seguir, mostram-se as soluções do modelo primal.

```
// solution (optimal) with objective 1591
// Quality Incumbent solution:
// MILP objective                                1.5910000000e+03
// MILP solution norm |x| (Total, Max)           2.94000e+02  4.10000e+01
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)       0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x bound error (Total, Max)               0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x integrality error (Total, Max)         0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP slack bound error (Total, Max)           0.00000e+00  0.00000e+00
//

x = [[0
             41 0 0 0 0 0 7 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
             0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
             [0 0 17 0 0 0 0 0 23 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
             0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
             [0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
             0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

Figura 3: Solução ótima primal do modelo primal

```
// pool solution #0 with objective 1591
// Quality Solution pool solution 'p3' (of 2):
// MILP objective                                1.5910000000e+03
// MILP solution norm |x| (Total, Max)           2.94000e+02  4.10000e+01
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)       0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x bound error (Total, Max)               0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x integrality error (Total, Max)         0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP slack bound error (Total, Max)           0.00000e+00  0.00000e+00
//

x = [[0
             41 0 0 0 0 0 7 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
             0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
             [0 0 17 0 0 0 0 0 23 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
             0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
             [0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

Figura 4: Solução ótima dual do modelo primal

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | # | 21 | # | # | # | 25 | # | 27 | # | # | # | 31 | # | # | # | 35 | # | 37 | # | # | # | 41 | # | # | # | 45 | # | 47 | # | # |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 41 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 31 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 35 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 37 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 41 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 45 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 47 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Figura 5: Matriz com a solução ótima do modelo primal

**d) Para a mesma instância, obtenha as soluções óptimas primal e dual através da resolução do modelo dual. Confirme que as soluções são as mesmas que as obtidas na alínea anterior, ou, caso não sejam, apresente uma justificação.**

A seguir, mostram-se as soluções do modelo dual.

```
// solution (optimal) with objective 1591
// Quality Incumbent solution:
// MILP objective                                1.5910000000e+03
// MILP solution norm |x| (Total, Max)           1.59100e+03  6.30000e+01
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)       0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x bound error (Total, Max)               0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x integrality error (Total, Max)         0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP slack bound error (Total, Max)           0.00000e+00  0.00000e+00
//

y = [0
         3 6 9 14 19 24 7 10 13 16 21 24 29 16 19 20 24 27 31 34 24 28 28 31
         34 39 42 33 36 36 38 42 46 50 40 43 45 45 50 53 58 47 51 52 54 57
         60 63];
```

Figura 6: Solução ótima primal do modelo dual

```
// pool solution #0 with objective 1591
// Quality Solution pool solution 'p4' (of 3):
// MILP objective                                1.5910000000e+03
// MILP solution norm |x| (Total, Max)           1.59100e+03  6.30000e+01
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)       0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x bound error (Total, Max)               0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x integrality error (Total, Max)         0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP slack bound error (Total, Max)           0.00000e+00  0.00000e+00
//

y = [0
         3 6 9 14 19 24 7 10 13 16 21 24 29 16 19 20 24 27 31 34 24 28 28 31
         34 39 42 33 36 36 38 42 46 50 40 43 45 45 50 53 58 47 51 52 54 57
         60 63];
```

Figura 7: Solução ótima dual do modelo dual

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 6 | 9 | 14 | 19 | 24 | 7 | 10 | 13 | 16 | 21 | 24 | 29 | 16 | 19 | 20 | 24 | 27 | 31 | 34 | 24 | 28 | 28 | 31 | 34 | 39 | 42 | 33 | 36 | 36 | 38 | 42 | 46 | 50 | 40 | 43 | 45 | 45 | 50 | 53 | 58 | 47 | 51 | 52 | 54 | 57 | 60 | 63 |

Figura 8: Linha com a solução ótima do modelo dual

Como podemos constatar, tanto a solução do modelo primal como a do modelo dual correspondem a 1591, tempo total de propagação.

# Questão 2

Considere agora que existe um conjunto de recursos para o combate ao incêndio (e.g. equipas de bombeiros) cuja localização pode ser escolhida (no máximo, um recurso por célula).

Pretende-se que o instante de chegada do fogo a uma determinada célula seja o mais tarde possível, sabendo que se tem disponíveis $b$ recursos.

A presença de um recurso numa célula implica que o tempo de propagação para as células adjacentes é retardado numa constante dada, representada por $\Delta$.

Desta vez, o objetivo tem a haver com a proteção de uma determinada região da floresta. É suposto maximizar o tempo que o incêndio demora desde do momento que flagra até ao momento que atinge o nodo do grafo, correspondente à região da floresta. Para tornar o problema mais real, foram acrescentadas algumas variantes que dinamizam o problema e o tornam mais próximo da realidade.

**a) Apresente um modelo de programação inteira mista (PIM). Para além de definir a notação, defina claramente as variáveis de decisão e justifique a função objectivo e cada restrição.**

As alterações passam pela existência de um tempo de retardamento, de recursos de combate a incêndios e de um nodo que temos que proteger. As restantes mantêm-se. É importante frisar que todos estes valores são fixos!

<u>**Parâmetros**</u>:

- $c_{j,k}$ - tempo de propagação do arco com origem j e destino k;
- r - retardamento do tempo de propagação do fogo para células adjacentes;
- nr - número de recursos existentes para o combate ao incêndio;
- i - nodo de ignição i;

- p - nodo que se pretende proteger.

**<u>Variáveis de decisão</u>**:

- $b_j$- variável binária que permite saber se um recurso é usado no nodo j;
- $t_j$ - é a soma de todos os tempos de propagação até ao nodo j.

A função objetivo deste problema não podia ser mais simples. O propósito desta questão baseia-se na necessidade de ganhar tempo aplicando os recursos em vários nodos para que o incêndio demore mais tempo a chegar à região que devemos proteger. Isto, dito por outras palavras, é maximizar o tempo de propagação até ao nodo $p$.

**<u>Função objetivo</u>**:

- max $z = t_p$

Passemos então à explicação das restrições:

1. tempo q demora a chegar ao nodo de chegad(tk)tem de ser menor ou igual ao tempo desde o nodo de origem(tj) mais a soma de todos os custos dos caminhos que foram necessários percorrer para chegar ao nodo k e ainda a soma da multiplicação do retardamento por 0 caso o recurso no nodo j não exista ou por 1 caso o recurso exista.
2. a segunda restrição limita o número de recursos utilizados a $nr$;
3. a seguinte, define qual o nodo inicial, pois, por ser o inicial, o tempo de propagação do incêndio até esse nodo, é sempre 0;
4. esta restrição garante que nenhum recurso é usado no último nodo, pois se o objetivo é maximizar o tempo de propagação até ao nodo 49, por lá um recurso, não traria qualquer benefício a esse mesmo nodo;
5. esta restrição e a seguinte servem para manter qualquer valor atribuido a $b[j], \forall_{1 \leq j \leq N}$ entre 0 e 1, ou seja, garante que esse valor é um valor lógico verdadeiro ou falso; aliás, poderíamos ter definido como um array de *booleans*;
6. (explicado no ponto anterior);
7. garantia de que a soma dos tempos de propagação até ao nodo j são sempre não negativos.

**Sujeito a**:

- $t_k \leq t_j + c_{j,k} + (b_j * r), \forall_{1 \leq j \leq N} \wedge \forall_{2 \leq k \leq N}$;
- $\sum_{j=1}^{N} b_j \leq nr$
- $t_i = 0$
- $b_p = 0$
- $b_j \leq 1, \forall_{1 \leq j \leq N}$
- $b_j \geq 0, \forall_{1 \leq j \leq N}$
- $t_j \geq 0, \forall_{1 \leq j \leq N}$.

**b) Para a instância de sete por sete células e os tempos de propagação em anexo, obtenha uma solução através do IBM ILOG CPLEX Optimization Studio com uma ignição na célula 1 e pretendendo-se proteger a célula 49. Represente a solução de forma adequada e interprete-a.**

Tendo o modelo pronto com os dados necessários, basta-nos compilar e executar todo o código que escrevemos para obtermos uma solução ótima, de modo a encontrarmos tanto o valor do tempo para a célula 49 como os locais em que se utilizam os recursos.

```
// solution (optimal) with objective 95
// Quality Incumbent solution:
// MILP objective                                9.5000000000e+01
// MILP solution norm |x| (Total, Max)           2.31800e+03  9.50000e+01
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)       0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x bound error (Total, Max)               0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP x integrality error (Total, Max)         0.00000e+00  0.00000e+00
// MILP slack bound error (Total, Max)           0.00000e+00  0.00000e+00
//

t = [0
        11 22 25 28 32 33 15 26 29 32 36 39 42 29 32 36 40 43 47 50 36 40
        44 47 50 55 58 45 48 51 54 58 62 66 52 54 59 61 66 69 79 59 63 66
        69 73 84 95];
b = [1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
        0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0];
```

Figura 9: Solução ótima

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| t | 0 | 11 | 22 | 25 | 28 | 32 | 33 | 15 | 26 | 29 | 32 | 36 | 39 | 42 | 29 | 32 | 36 | 40 | 43 | 47 | 50 | 36 | 40 | 44 | 47 |

| | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| t | 50 | 55 | 58 | 45 | 48 | 51 | 54 | 58 | 62 | 66 | 52 | 54 | 59 | 61 | 66 | 69 | 79 | 59 | 63 | 66 | 69 | 73 | 84 | 95 |

Figura 10: Recursos utilizados e tempo total de propagação até ao nodo i, $\forall 1 \leq i \leq N$

**c) Represente graficamente o tempo de chegada do fogo à célula de protecção em função do número de recursos usados. Interprete e comente.**

Para conseguirmos respresentar graficamente o tempo de chegada do fogo à célula em função do número de recursos utilizados, decidimos executar o nosso modelo assumindo o caso que estamos a estudar, com nr = 8, e ainda executá-lo com valores diferentes para esse parâmetro, de modo a obtermos uma curva que se aproxime da realidade. A seguir encontramos os valores utilizados para formular o gráfico:

- $nr = 0$, $t = 63$;
- $nr = 1$, $t = 71$;
- $nr = 2$, $t = 75$;
- $nr = 3$, $t = 79$;
- $nr = 4$, $t = 83$;
- $nr = 5$, $t = 87$;
- $nr = 6$, $t = 89$;
- $nr = 7$, $t = 91$;
- $\underline{nr = 8,\ t = 95}$;

O gráfico apresenta algumas variações na taxa de crescimento, no entanto, aproxima-se de uma reta linear que se pode traduzir na expressão $t(nr) = 3.73nr + 66.51$. Assim, podemos dizer que por cada recurso que é utilizado para combater o incêndio, o tempo total de propagação chegado ao nodo 49, cresce cerca de 3,73 unidades de tempo.

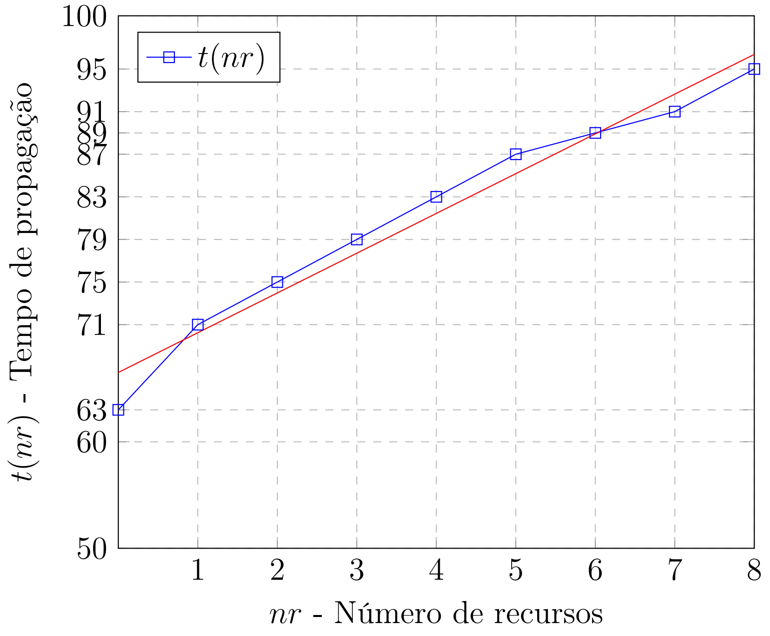



Figura 11: Tempo de propagação do incêndio até ao nodo 49, dependendo do número de recursos.

# Questão 3

Considere agora que se pretende decidir onde localizar $b$ recursos com objectivo de minimizar o valor esperado da área ardida ao fim de um intervalo de tempo.

Considere que são conhecidas as probabilidades de ignição em cada célula.

**a) Apresente um modelo de programação inteira mista (PIM). Para além de definir a notação, defina as variáveis de decisão claramente e justifique a função objectivo e cada restrição.**

Parâmetros:

- $c_{k,j}$ - tempo de propagação do arco com origem k e destino j;
- r - retardamento do tempo de propagação do fogo para células adjacentes;
- nr - número de recursos existentes para o combate ao incêndio;
- $p_k$ - probabilidade de ignição no nodo k;
- d - horizonte temporal.

Variáveis de decisão:

- $t_i^k$ - tempo que demora o fogo a chegar ao nodo i, sabendo que o nodo de ignição é k.
- $$z_i^k = \begin{cases} \text{1, se o nodo i ardeu antes do horizonte temporal na ignição k,} \\ \text{0, caso contrário} \end{cases}$$
- $$b_i = \begin{cases} \text{1, se o recurso b é colocado no i ,} \\ \text{0, caso contrário} \end{cases}$$

Função objetivo:

- $\text{MinZ} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} z_i^k * p_k$

**<u>Sujeito a</u>**:

- $t_{i,j} \leq t_{i,k} + c_{k,j} + (b_i * r), \forall_{1 \leq i \leq N} \wedge \forall_{1 \leq j \leq N} \wedge \forall_{1 \leq k \leq N};$
- $\sum_{i=1}^{N} b_i \leq 8$
- $z_{i,j} \geq (d - \mathrm{t}_{i,j})/\mathrm{d}$
- $t_{i,i} == 0$

**b) Para a instância em anexo, obtenha uma solução através do IBM ILOG CPLEX Optimization Studio com probabilidade de ignição na célula $(i,j)$ dada por $(14 - i - j)/500$ e intervalo de 12 unidades de tempo. Represente a solução de forma adequada e interprete-a.**

Visto que desde o início trabalhamos com as células identificando-as pelo seu número e não com as suas coordenadas, foi necessário recorrer a um método especial para obtermos os valores das probabilidades para cada célula, evitando o cálculo manual desses 49 valores. Fizemos um simples programa na linguagem opl que calcula o valor da célula para depois o inserir na respetiva posição do array das probabilidades.

```
execute{
    var h = 1;
    for(var e = 1; e<=7; e++){
        for(var f = 1; f<=7; f++){
            p[h] = (14-e-f)/500;
            h++;
        }
    }
}
```

Figura 12: Código *opl* para gerar probabilidades

```
(1,1)-->0.024  (1,2)-->0.022  (1,3)-->0.02   (1,4)-->0.018  (1,5)-->0.016  (1,6)-->0.014  (1,7)-->0.012
(2,1)-->0.022  (2,2)-->0.02   (2,3)-->0.018  (2,4)-->0.016  (2,5)-->0.014  (2,6)-->0.012  (2,7)-->0.01
(3,1)-->0.02   (3,2)-->0.018  (3,3)-->0.016  (3,4)-->0.014  (3,5)-->0.012  (3,6)-->0.01   (3,7)-->0.008
(4,1)-->0.018  (4,2)-->0.016  (4,3)-->0.014  (4,4)-->0.012  (4,5)-->0.01   (4,6)-->0.008  (4,7)-->0.006
(5,1)-->0.016  (5,2)-->0.014  (5,3)-->0.012  (5,4)-->0.01   (5,5)-->0.008  (5,6)-->0.006  (5,7)-->0.004
(6,1)-->0.014  (6,2)-->0.012  (6,3)-->0.01   (6,4)-->0.008  (6,5)-->0.006  (6,6)-->0.004  (6,7)-->0.002
(7,1)-->0.012  (7,2)-->0.01   (7,3)-->0.008  (7,4)-->0.006  (7,5)-->0.004  (7,6)-->0.002  (7,7)-->0.0
```

Figura 13: Valores das probabilidades gerados

Agora, para o nodo com as coordenadas (1,1), correspondente ao nodo 1, a probabilidade é de 0.024 (numa escala de 0 a 1), para o nodo 2 (de coordenadas (1,2)), é 0.022, e assim sucessivamente.

```
// solution (optimal) with objective 4.438
// Quality Incumbent solution:
// MILP objective                                 4.4380000000e+00
// MILP solution norm |x| (Total, Max)            2.92640e+04  2.60000e+01
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)        3.70759e-13  1.77636e-15
// MILP x bound error (Total, Max)                1.33227e-15  8.88178e-16
// MILP x integrality error (Total, Max)          1.93179e-14  1.77636e-15
// MILP slack bound error (Total, Max)            8.88178e-16  8.88178e-16
//

z = [[1
           1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
           0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

Figura 14: Solução da função objetivo

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | # | 21 | # | # | # | 25 | # | 27 | # | # | # | 31 | # | # | # | 35 | # | 37 | # | # | # | 41 | # | # | # | 45 | # | 47 | # | # |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 31 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 35 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 37 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 41 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 45 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 47 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| # | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| # | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Figura 15: Solução da variável de decisão z

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | # | 21 | # | # | # | 25 | # | 27 | # | # | # | 31 | # | # | # | 35 | # | 37 | # | # | # | 41 | # | # | # | 45 | # | 47 | # | # |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 5 | 8 | 13 | 13 | 16 | 7 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 2 | 4 | 0 | 3 | 6 | 8 | 13 | 16 | 7 | 7 | 10 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 3 | 8 | 4 | 0 | 3 | 8 | 13 | 16 | 13 | 9 | 9 | 8 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 4 | 13 | 13 | 10 | 0 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 5 | 13 | 13 | 13 | 10 | 0 | 13 | # | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 6 | 13 | 9 | 5 | 5 | 3 | 0 | 5 | 13 | 13 | 13 | 11 | 8 | 7 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 7 | 13 | 13 | 9 | 8 | 6 | 3 | 0 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 10 | 9 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 0 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 17 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 9 | 13 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 4 | 0 | 3 | 6 | 10 | 13 | 15 | 6 | 9 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 11 | 0 | 11 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 11 | 13 | 13 | 13 | 17 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 10 | 0 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 17 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 11 | 0 | 11 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 9 | 13 | 13 | 9 | 6 | 6 | 3 | 0 | 5 | 13 | 13 | 13 | 9 | 7 | 8 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 14 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 9 | 13 | 13 | 10 | 8 | 7 | 4 | 0 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 10 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 7 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 0 | 3 | 6 | 10 | 13 | 13 | 13 | 8 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 9 | 10 | 13 | 13 | 13 | 15 | 3 | 0 | 4 | 6 | 9 | 13 | 13 | 6 | 9 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 17 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 17 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 11 | 0 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 18 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 11 | 13 | 13 | 15 | 6 | 7 | 4 | 0 | 3 | 7 | 10 | 13 | 13 | 9 | 9 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 19 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 13 | 15 | 6 | 7 | 6 | 2 | 0 | 4 | 7 | 13 | 13 | 13 | 9 | 9 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 10 | 9 | 13 | 13 | 13 | 10 | 6 | 4 | 0 | 3 | 13 | 13 | 13 | 9 | 10 | 8 | 11 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 21 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 10 | 10 | 13 | 13 | 10 | 8 | 6 | 2 | 0 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 9 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 0 | 5 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 9 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 18 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 10 | 0 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 10 | 9 | 10 | 13 | 13 | 13 | 6 | 4 | 0 | 3 | 5 | 10 | 13 | 13 | 11 | 8 | 9 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 25 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 9 | 9 | 13 | 13 | 6 | 8 | 4 | 0 | 3 | 8 | 11 | 13 | 13 | 10 | 7 | 9 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 9 | 10 | 13 | 13 | 6 | 8 | 6 | 2 | 0 | 5 | 8 | 13 | 13 | 13 | 9 | 9 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 27 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 10 | 10 | 13 | 11 | 8 | 4 | 2 | 0 | 3 | 13 | 13 | 13 | 9 | 7 | 9 | 11 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 9 | 13 | 13 | 9 | 7 | 5 | 3 | 0 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 10 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 0 | 3 | 6 | 9 | 13 | 13 | 16 | 7 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 6 | 9 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 2 | 0 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 | 7 | 7 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 31 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 9 | 10 | 13 | 13 | 13 | 5 | 3 | 0 | 3 | 7 | 11 | 16 | 7 | 6 | 9 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 9 | 8 | 13 | 13 | 6 | 7 | 4 | 0 | 4 | 8 | 13 | 13 | 13 | 10 | 7 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 9 | 10 | 13 | 13 | 13 | 11 | 8 | 4 | 0 | 4 | 9 | 13 | 13 | 13 | 10 | 9 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 9 | 12 | 13 | 13 | 10 | 8 | 4 | 0 | 5 | 13 | 13 | 13 | 13 | 9 | 7 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 35 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 10 | 13 | 13 | 13 | 11 | 7 | 3 | 0 | 13 | 13 | 13 | 13 | 12 | 10 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 0 | 4 | 8 | 13 | 13 | 13 | 13 | 6 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 37 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 4 | 0 | 5 | 8 | 13 | 13 | 13 | 11 | 8 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 9 | 9 | 13 | 13 | 16 | 7 | 3 | 0 | 5 | 10 | 13 | 13 | 13 | 10 | 7 | 9 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 10 | 11 | 13 | 13 | 16 | 7 | 6 | 3 | 0 | 5 | 8 | 13 | 13 | 13 | 10 | 9 | 10 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 9 | 11 | 16 | 13 | 11 | 8 | 5 | 0 | 3 | 8 | 13 | 13 | 10 | 8 | 7 | 10 | 13 |
| 41 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 9 | 9 | 14 | 13 | 13 | 10 | 7 | 2 | 0 | 5 | 13 | 13 | 13 | 11 | 9 | 7 | 6 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 11 | 13 | 13 | 12 | 9 | 4 | 2 | 0 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 9 | 9 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 10 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 0 | 4 | 6 | 9 | 13 | 13 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 11 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 3 | 0 | 3 | 6 | 10 | 13 | 13 |
| 45 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 11 | 13 | 13 | 13 | 13 | 6 | 3 | 0 | 3 | 7 | 10 | 13 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 10 | 13 | 13 | 13 | 8 | 5 | 2 | 0 | 4 | 7 | 10 |
| 47 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 10 | 10 | 8 | 13 | 10 | 7 | 4 | 2 | 0 | 3 | 6 |
| # | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 15 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 9 | 13 | 12 | 9 | 6 | 4 | 2 | 0 | 3 |
| # | 8 | 6 | 4 | 5 | 6 | 11 | 16 | 7 | 5 | 5 | 6 | 7 | 10 | 15 | 6 | 7 | 6 | 6 | 6 | 7 | 10 | 6 | 8 | 6 | 4 | 5 | 9 | 12 | 5 | 7 | 8 | 8 | 7 | 11 | 16 | 7 | 6 | 8 | 7 | 4 | 7 | 11 | 6 | 5 | 4 | 4 | 5 | 3 | 0 |

Figura 16: Solução da variável de decisão t

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Figura 17: Solução da variável de decisão b

**c) Represente graficamente o valor esperado da área ardida em função do intervalo de tempo considerado. Interprete e comente.**

Vamos incluir as seguintes coordenadas no gráfico abaixo: (1,0.588), (3,0.614), (5,1.14), (7,1.522), (9,2.12), (11,3.142), (13,4.438), (15,5.37).

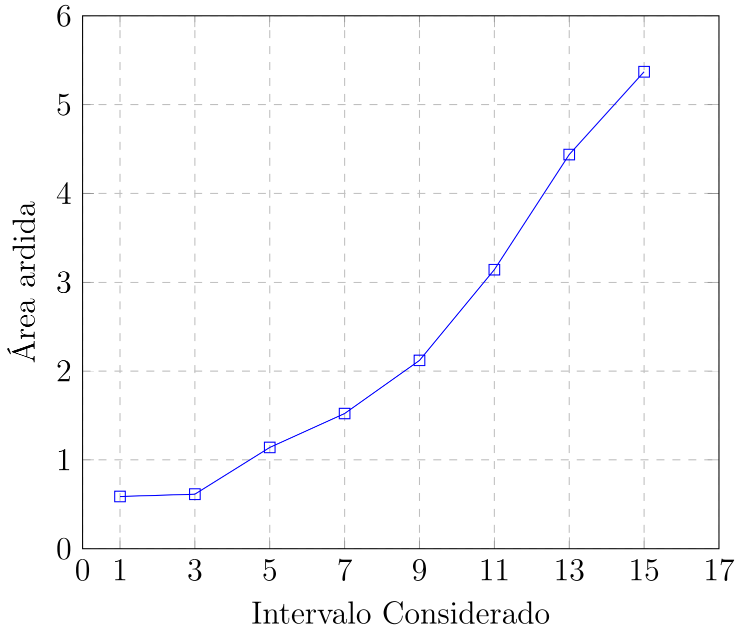



Figura 18: Relação entre a área ardida e intervalo de tempo considerado.

# Conclusão

Os incêndios são, desde sempre, um problema que assola o globo. Alguns são provocados por causas naturais, outros por causas humanas e em ambos os casos é, por vezes, necessário recorrer a métodos que estudem e prevejam os locais que um fogo irá percorrer, seja para a proteção de bens materiais, ou até mesmo das própias pessoas que muitas vezes são apanhadas desprevenidas.

Esses métodos, implicam um estudo prévio do terreno e dos meios disponíveis, para que depois de aplicados, possam ajudar na extinção de fogos que surjam. Com este trabalho prático, foi-nos possível perceber que isso realmente acontece! Será necessário deslocar um helicóptero para um determinado incêndio quando existe uma companhia de bombeiros com o acesso mais facilitado? Em que locais devemos aplicar os produtos retardantes? Para estas perguntas a investigação operacional dá respostas. Saber alocar os recursos para o sítio certo de acordo com as probabilidades e tempos de propagação de um incêndio, é uma mais valia para quem está na frente de ataque a este problema e certamente teria um impacto direto na área mundial ardida que tem vindo a aumentar a um ritmo alarmante.

A realização deste trabalho prático foi bastante gratificante e enriquecedora e fez-nos perceber a importância da investigação operacional neste contexto de problemas que têm sido muito mal abordados pelos governos. Estes continuam a aplicar os métodos tradicionais, descurando os métodos científicos que iriam permitir solucionar o problema com muita mais eficácia, tanto em termos financeiros como na preservação do meio natural.