Instituto Tecnológico Autónomo de México

Título

Tesis

que para obtener el título

Licenciado en Actuaría

presenta

Autor

Asesor: ...

México, D.F. 2016

Çon fundamento en los artículos 21 y 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor y como titular de los derechos moral y patrimonial de la obra titulada "**TÍTULO DE LA TESIS**", otorgo de manera gratuita y permanente al Instituto Tecnológico Autónomo de México y a la Biblioteca Raúl Bailléres Jr., la autorización para que fijen la obra en cualquier medio, incluido el electrónico, y la divulguen entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras personas, sin que pueda percibir por tal divulgación una contraprestación".

AUTOR

Fecha

Firma

Agradecimientos

Muchas gracias a todos!

Capítulo 1

Modelos de Duración y Duración Marcada

1.1. Introducción

En este capítulo se hablará sobre los modelos de duración y de duración marcada y su aplicación en el objeto de este trabajo. Además de algunas propiedades, tales como la independencia, intercambiabilidad y, por supuesto, estacionareidad que son vitales para realizar inferencia y predicción de los datos.

Es importante remarcar que la historia de los procesos puntuales siempre ha estado unida a aquella de la estadística actuarial y de seguros, como nos mencionan Daley and Vere-Jones (2003) al referirse a las tablas de mortalidad como el primer estudio de procesos de intervalos. Por lo que el empleo de estos procesos como un método de tarificación es solamente otra colaboración en la larga lista de estas dos disciplinas.

1.2. Definición del proceso de Duración y Duración Marcada

Para el objeto de este estudio tenemos una muestra de microcostos de enfermedades crónicas de un cierto número de individuos a los que se les ha observado durante un período de tiempo. A su vez, cada uno de los individuos tiene asociadas covariables sociodemográficas, socioeconómicas y médicas. De este modo, podríamos decir que tenemos n individuos $(n_i)_{i=1}^{n}$ observados por un período de tiempo con costos asociados a su padecimiento. El objetivo es modelar y predecir la duración y el costo de las etapas de estos padecimientos por individuo.

Supongamos que empezamos el estudio de un individuo n_i en el tiempo $t_{i0} = 0$, es decir, este es el tiempo en el que el individuo entra al panel de estudio. La duración del estudio para el individuo es T_i, esto no quiere decir que no puedan ocurrir observaciones posteriores a T_i, a esto se le conoce como censuramiento de datos por la derecha.

Según Paik Schoenberg (2000), un proceso puntual es una medida aleatoria en un espacio métrico separado S tomando valores en los enteros no negativos Z^+ (o infinito) donde $N(t)$, en un caso particular, es un proceso de conteo del número de puntos que ocurren antes del tiempo t.

Sea $t_{ij} \in (t_{i0}, T_i]$ el momento en el que ocurre un cambio de tratamiento, por lo que definimos la variable aleatoria $N(t)$ que cuenta el número de cortes o cambios en el intervalo.

Dado que la muestra consiste en microcostos a través del tiempo, decimos que a cada t_j se le asocia la variable costo de tratamiento; es decir, a cada momento en que ocurre un cambio de tratamiento le corresponde un

nuevo costo p_j. De este modo, para cualquier individuo n_i tenemos una sucesión de variables asociadas $\{t_{i1}, p_{i1}\}, \{t_{i2}, p_{i2}\}, ..., \{t_{ik}, p_{ik}\}$. De este modo la sucesión de variables es una colección aleatoria de puntos en un espacio con una marca asociada a cada punto, así ya se pueden modelar los datos como en un proceso puntual marcado.

Daley and Vere-Jones (2003) definen el proceso puntual marcado como un proceso localizado en un espacio métrico completamente separado χ y las marcas en otro espacio métrico completamente separado κ, entonces $\{(\chi_i, \kappa_i)\}$ en $\chi \times \kappa$ es un proceso puntual marcado con la propiedad adicional de que el proceso primario $N(t)$ es a su vez un proceso puntual.

Lo que deseamos conocer es,

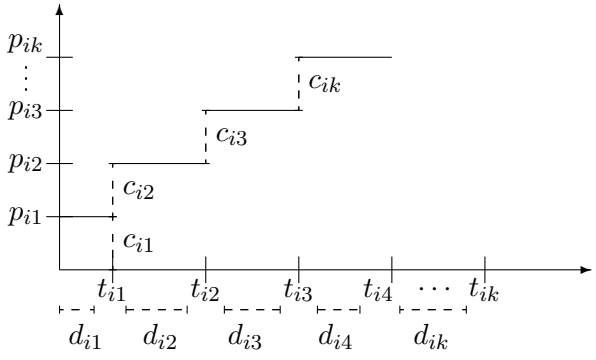
$$P(t_{i1}, ..., t_{ik}, p_{i1}, ..., p_{ik}) = P(t_{i1}, ..., t_{ik}, p_{i1}, ..., p_{ik}|N(t)) \qquad (1.1)$$

Es decir, la función de distribución conjunta del tiempo de ocurrencia de los eventos y los precios asociados a estos es igual a la función de distribución de estas variables condicionados por la variable aleatoria del número de eventos en el intervalo $(t_{i0}, T_i]$. Sin embargo, dado que al usar las variables en sus valores absolutos estas pueden dar saltos muy altos entre si, por lo que debemos usar variables alternas.

Definimos las siguientes variables para un individuo n_i:

- $d_{ij} = t_{ij} - t_{ij-1}$, donde d_{ij} es la duración entre los tiempos de ocurrencia de cada individuo.

- $c_{ij} = c_{ij} - c_{ij-1}$, donde c_{ij} representa el costo, es decir, la diferencia entre los precios en cada tiempo de ocurrencia de cada individuo.



.

De este modo,

$$P(t_{i1}, ..., t_{ik}, p_{i1}, ..., p_{ik}|N(t)) \cong P(d_{i1}, ..., d_{ik}, c_{i1}, ..., c_{ik}|N(t)) \qquad (1.2)$$

Esto quiere decir que calcular la función de distribución conjunta de los tiempos de ocurrencia y los precios asociados a éstos es análogo a a calcular la función de distribución conjunta de las duraciones y los costos asociados condicionados a la variable aleatoria del número de eventos en el intervalo de tiempo. Así pasamos de un proceso puntual marcado a uno de duración marcada.

1.3. Propiedades del Proceso de Duración Marcada

Una vez que hemos definido qué es el proceso de duración y de duración marcada y cómo es que los datos que tenemos para este estudio se adaptan a este modelo, necesitamos especificar las propiedades que van a hacer posible la inferencia y la predicción. Estas propiedades son la independencia, la intercambiabilidad y, principalmente, la estacionareidad.

Independencia

En una concepción tradicional, Resnick (1999) define la independencia de un número finito de eventos como:

Definicion 1. *Los eventos* A_1, ... , A_n *(n≥ 2) son independientes si*

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i), \qquad I \subset \{1, ..., n\}$$

Los eventos son independientes si la probabilidad de la intersección de estos eventos o la probabilidad conjunta de los eventos es igual a la multiplicación de la probabilidad de los mismos.

Análogamente, podemos hacer la definición de independencia para el proceso de duración marcada. Recordemos que tenemos la función de probabilidad conjunta de las duraciones y los costos, por lo que la independencia en el proceso es:

$$P(d_1, c_1, ..., d_k, c_k | N(t) = k) = \prod_{j=1}^{N(t)} P(d_j, c_j) \tag{1.3}$$

En este caso, la única diferencia reside en el hecho de que el número de funciones de probabilidad a multiplicar es a su vez una variable aleatoria, la cual se encarga de contar los cambios en el costo de tratamiento en el tiempo. El supuesto de independencia es útil para la inferencia de futuras observaciones.

Intercambiabilidad

Otra propiedad muy importante para la inferencia y predicción de variables en un proceso de duración marcada es la intercambiabilidad que, de

acuerdo a Hahn and Zhang (2012), se define como:

Definicion 2. *Una sucesión de variables* $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *es intercambiable si para cada* n

$$(X_1, X_2, ..., X_n) = (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, ..., X_{\sigma(n)})$$

para cualquier permutación σ *de* $1, 2, ..., n$.

Si la sucesión de variables es independiente e idénticamente distribuida entonces es intercambiable. El concepto de intercambiabilidad está muy relacionado con la independencia, pues la independencia es un caso particular de la intercambiabilidad.

Para poder entender mejor la propiedad podemos citar el Teorema de Fenetti(1937) que nos dice,

Teorema 3. *Una sucesión infinita de variables aleatorias intercambiables* $\bar{X} = (X_1, X_2, ...)$ *es una mezcla de varibles independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d). Esto es, que existe un espacio de probabilidad* (U, Θ) *tal que*

$$P(\bar{X} \in B) = \int_U P(\bar{X}(u) \in B)\Theta(du)$$

donde $\bar{X}(u) = (X_1(u), X_2(u), ...)$ *es una secuencia de variables aleatorias i.i.d. y* $\Theta(\cdot)$ *es una medida de probabilidad.*

Esto se puede adaptar al proceso de duración marcada correspondiente a este análisis de la siguiente manera, tomando el Teorema de Fenetti

$$P(d_1, c_1, ..., d_k, c_k | N(t) = k) = \int_\Theta \prod_{j=1}^{N(t)} P(d_j, c_j|\theta)\pi(\theta)d(\theta) \tag{1.4}$$

donde θ es una variable aleatoria no observable y $\pi(\theta)$ es una medida de probabilidad común a todas las variables aleatorias. Es decir, que a lo postulado en el apartado de independencia le agregamos la variable no observable con su respectiva medida de probabilidad, sobre cuyo espacio de probabilidad está definida la integral. La variable no observable común a todas las variables aleatorias es un tema que se desarrollará a profundidad en el siguiente capítulo.

Estacionareidad

Una vez que han sido definidas la independencia y la intercambiabilidad faltaría definir la estacionareidad para poder hacer predicciones sobre futuras observaciones.

De manera intuitiva, podemos definir la estacionareidad en un proceso de duración cuando la función de probabilidad conjunta del proceso no cambia cuando es ésta es desplazada en el tiempo, lo cual indicaría que lo importante es la longitud de los intervalos, no la localización de los mismos. Sin embargo, de una manera más técnica, Daley and Vere-Jones (2003) definen la estacionareidad en un proceso como:

Definicion 4. *Un proceso puntual es estacionario por intervalos cuando para cada* $r = 1, 2, ...$ *y todos los enteros* $i_i, ..., i_r$ *, la distribución conjunta de* $\{\tau_{i_{1+k}}, ..., \tau_{i_{r+k}}\}$ *no depende de* k *(*$k = 0, \pm 1, ...$*).*

Esto implicaría que el orden de las observaciones importa y que las observaciones pasadas ayudan a construir la variable aleatoria. Es decir que con una sucesión de variables $\bar{X} = (X_1, ..., X_n)$ tendríamos que,

$$P(X_n, ..., X_1) = P(X_n|X_{n-1}, ..., X_1) * P(X_{n-1}|X_{n-2}, ..., X_1) * \cdots * P(X_2|X_1) * P(X_1)$$

Así si la variable aleatoria depende de su historia, podríamos entonces pre-

decir observaciones futuras. Es decir, que para toda $s \geq 0$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}, X_n, ..., X_1) &= P(X_{n+1})|X_n, ..., X_1) \\ &= P(X_{n+s+1}|X_{n+s}, ..., X_{1+s}) \end{aligned}$$

De este modo, para el proceso de duración marcada la estacionareidad se podría plantear como,

$$P(d_1, c_1, ..., d_k, c_k|N(t) = k) = \prod_{j=2}^{N(t)} P(d_j, c_j|d_{j-1}, c_{j-1}) * P(d_1, c_1)$$

Lo que quiere decir que la función conjunta de probabilidad se puede definir con base a observaciones pasadas.

Una vez que nuestro modelo de duración marcada cumple las propiedades descritas en este capítulo podemos empezar a hacer inferencia sobre las variables y predecir las observaciones futuras. En el siguiente capítulo, desarrollaremos un modelo complementario de variables latentes que terminaría de conectar la idea de la variable no observable presentada en el concepto de intercambiabilidad con el resto de la sucesión.

Capítulo 2

Revisión de Literatura

2.1. Full backward non-homogeneous semi-Markov processes for disability insurance models: A Catalunya real data application

Los procesos semi-Markov han sido utilizados en contextos financieros, actuariales y de demografía. Éstos procesos se refieren a aquellos procesos aleatorios que evolucionan con el tiempo y cuyas realizaciones en cualquier momento dado del tiempo tiene un estado definido. Por lo que, la generalización de las probabilidades de trancisión de los procesos semi-markovianos no homogéneos se obtiene introduciendo la reversibilidad, pues en este caso las probabilidades de trancisión dependen del tiempo en el que el proceso entró en un cierto estado, no como en un proceso semi-markoviano homogéneo donde se entra al sistema en el estado inicial al tiempo inicial. La recurrencia en el tiempo en los procesos reversibles se pueden considerar al inicio o al final del horizonte de tiempo considerado.

Suponemos las siguientes variables aleatorias (J_n, T_n) como un proceso de

renovación de Markov no homogéneo, J_n representa el estado a la n-ésima trancisión y T_n el tiempo a la n-ésima trancisión, de este modo se define $X_n = T_{n+1} - T_n$ como el proceso de tiempo de llegada. Con esta información, se puede definir lo siguiente:

- $Q_{ij}(s,t) = P(J_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t | J_n = i, T_n = s)$.
  La probabilidad de que en la $n+1$-ésima realización el proceso esté en el j-ésimo estado en un tiempo menor o igual a t si en la realización anterior estaba en el i-ésimo estado en el tiempo s. ij son los estados en los que está el proceso y (s,t) los tiempos del mismo.

- $H_i(s,t) = P(T_{n+1} \leq t | J_n = i, T_n = s) \Rightarrow H_i(s,t) = \sum_{j=1}^{m} Q_{ij}(s,t)$.
  Probabilidad que el proceso salga del estado i en el intervalo del tiempo s a t en una sola realización.

- $F_{ij}(s,t) = P(T_{n+1} \leq t | J_n = i, J_{n+1} = j, T_n = s)$.
  La función de distribución del tiempo de espera en cada estado i dado que el estado en la realización siguiente es conocido.

La mayor diferencia entre los procesos de Markov no-homogéneos discretos y los procesos semi-Markov reside en las funciones $F_{ij}(s,t)$. En los primeros ésta tendría que comportarse como una función de distribución geométrica, mientras que con el proceso semi-Markov no-homogéneos discretos ésta puede ser de cualquier tipo.

Ahora definimos el proceso de conteo de realizaciones como,

$$N(t) = sup\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\}$$

Ya que tenemos establecido el concepto de proceso de conteo se puede definir el proceso semi-Markov no-homogéneo discreto, $Z(t) = J_{N(t)}$ como el

estado ocupado por el proceso a cada momento del mismo. Por lo que las probabilidades de trancisión serían,

$$\phi_{ij}(s,t) = d_{ij}(s,t) + \sum_{\beta=1}^{m} \sum_{\vartheta=s+1}^{t} b_{i\beta}(s,\vartheta)\varphi_{\beta,j}(\vartheta,t)$$

La primera parte de la fórmula $d_{ij}(s,t)$ se refiere a la probabilidad de que el proceso no transicione al tiempo t dado que entró en el estado i al tiempo s, esto ocurre solo cuando $i = j$, es decir, es referente al tiempo de transición no al estado. La segunda parte $(b_{i\beta}(s,\vartheta))$, representa la probabilidad de que el sistema entre al estado β justo en el tiempo ϑ dado que entró al estado i en el tiempo s. Después de la trancisión, el sistema llegará al estado j en el tiempo t siguiendo cualquiera de las posibles trayectorias que van del estado β al tiempo ϑ.

Â¿Se podría interpretar las variables β, ϑ como variables latentes que nos podrían dar información sobre las variables que sí observamos? Eso podría dar a entender que en la segunda sumatoria donde la variable ϑ empieza el conteo al tiempo $s+1$ y termina al tiempo t, es decir recorre la trayectoria entre los tiempos que conocemos.

Ahora bien, definimos $B(t) = t - T_{N(t)}$ como el proceso reversible que se denota como,

$${}^{b}\phi_{ij}(l,s;t) = P(Z(t) = j | Z(s) = i, B(s) = s - l)$$

$$\phi_{ij}^{b}(s;l',t) = P(Z(t) = j, B(t) = t - l' | Z(s) = i)$$

Estos son las probabilidades de transición del proceso semi-Markoviano con el tiempo de recurrencia reversible al inicio y al final, respectivamente.

En la primera ecuación sabemos que el sistema está en el estado i al tiempo s, sabemos también que entró a ese estado en el tiempo l por lo que $s-l$ representa el tiempo reversible inicial; así que lo que se busca la probabilidad de estar en el estado j al tiempo t. En la segunda ecuación sabemos que el sistema entró al estado i al tiempo s, en este caso el objeto de interés es saber la probabilidad de estar en el estado j al tiempo t entrando a este estado en el tiempo l'; el tiempo reversible final es $t-l'$.

Si definimos un proceso reversible en el tiempo inicial y final se tiene que,

$$ {}^{b}\phi_{ij}^{b}(l,s;l',t) = P(Z(t)=j, B(t)=t-l' | Z(s)=i, B(s)=s-l) $$

De igual modo que con el proceso sin la reversibilidad, se definen las siguientes probabilidades de transición:

$$ {}^{b}\phi_{ij}(l,s;t) = d_{ij}(l,s;t) + \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\vartheta=s+1}^{t} b_{i\beta}(l,s;\vartheta)\varphi_{\beta j}(\vartheta,t) $$

$$ \phi_{ij}^{b}(s;l',t) = d_{ij}(s,t)\mathbf{1}_{\{l'=s\}} + \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\vartheta=s+1}^{l'} b_{i\beta}(s,\vartheta)\varphi_{\beta j}^{b}(\vartheta;l',t) $$

$$ {}^{b}\phi_{ij}^{b}(l,s;l',t) = d_{ij}(l,s;t)\mathbf{1}_{\{l'=s\}} + \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\vartheta=s+1}^{l'} b_{i\beta}(l,s;\vartheta)\varphi_{\beta j}^{b}(\vartheta;l',t) $$

En las últimas dos ecuaciones donde se tiene el término $\mathbf{1}_{\{l'=s\}}$, se refiere a que la expresión es igual a 1 si y solo si $\{l'=s\}$, sino es igual a 0.

La primera ecuación se refiere a la probabilidad de que el sistema esté en el estado j en el tiempo t dado que estaba en el estado i en el tiempo s entrando a ese estado al tiempo l, si $l=s$ entonces tenemos el proceso sin reversibilidad.

La segunda ecuación da como resultado la probabilidad de que el sistema llegue al estado j al tiempo l' y permanecerá allí hasta el tiempo t, dado que entró al estado i al tiempo s . La primera parte $d_{ij}(s,t)\mathbf{1}_{\{l'=s\}}$ significa la probabilidad de que no exista trancisión de estados entre el tiempo s,t por lo que el tiempo reversible final $t-l'$ debe ser exactamente igual que $t-s$ y solo tiene sentido cuando $i=j$. La segunda parte se refiere significa que el sistema no se mueve del tiempo s al tiempo ϑ y que, justo en este tiempo, salta al estado β; después siguiendo cualquiera de las trayectorias posibles, el sistema llega al estado j en el tiempo l' y se queda allí hasta el tiempo t.

Es importante mencionar que teniendo todos los valores del proceso reversible final tenemos las posibles probabilidades de transición del proceso sin reversibilidad, es decir,

$$\phi_{ij}(s,t)=\sum_{l'=s}^{t}\phi_{ij}^{b}(s;l',t)$$

Por último, la tercera ecuación expresa la probabilidad de que el sistema entre al estado j al tiempo al tiempo l' y se queda sin transicionar hasta el tiempo t, dado que entró al estado i al tiempo l y se quedó allí hasta el tiempo s. El primer término $d_{ij}(l,s;t)\mathbf{1}_{\{l'=s\}}$ es, de manera análoga, la probabilidad de no tener trancisiones de estados entre los tiempos l a t, es decir, quedarse en el estado i dado que no ocurrieron transiciones entre los tiempos l a s. Esta probabilidad es distinta a 0 si y solo si $i=j$ y $l'=s$. La segunda parte de la ecuación representa la probabilidad de hacer la siguiente transición al tiempo l del estado i a cualquier estado β al cualquier tiempo ϑ, para después seguir cualquier trayectoria para llegar al estado j al tiempo l' sin volver a moverse hasta el tiempo t.

Este modelo es el que se utiliza en algunos cálculos referentes a modelos de incapacidad que consideran tiempos reversibles iniciales y finales. Estos modelos tienen los siguientes estados, con sus respectivas transiciones:

- Activo
    - Activo
    - Pensionado
    - Incapacitado
    - Muerte
- Pensionado:
    - Pensionado
    - Incapacitado
    - Muerte
- Incapacitado:
    - Incapacitado
    - Muerte
- Muerte

Es decir, que la muerte es un estado absorbente.

El experimento a desarrollar en el artículo es sobre una población de 150,000 asegurados de la cobertura de invalidez en la región de Cataluña,España durante 30 años. La condición de invalidez es verificada por un perito médico y corresponde a los padecimientos establecidos en la póliza.

Se aplica el modelo de procesos semi-Markov discretos no-homogéneos con

reversibilidad incial y final a la muestra. Dado que el número de transiciones no era suficiente para intervalos de un año de edad, se construyeron grupos de cinco años de edad con los cuatro estados descritos. Los resultados mostraron diferencias según el tiempo de reversibilidad aplicado, inicial o final. Este modelo sirve exclusivamente para ver las transiciones entre estados, por lo que el siguiente paso sería incluir la modelación de costos asociados a cada estado.

2.2. Parametric Modelling of cost data, some simulation evidence

Los estudios concernientes al análisis de costos medios de algún padeciemiento se complican cuando se llevan a cabo con datos observados pues éstos se pueden ver muy sesgados con datos de unos pocos pacientes con costos muy altos.Para lidiar con estas complicaciones se han propuestos varias soluciones como usar métodos no paramétricos, transformar los datos, tomar la media muestral, etc. Cada una de estas soluciones conlleva sus respectivas críticas, por lo que no hay consenso sobre el mejor camino a seguir.

Es por esto que el propósito de este artículo es explorar dos particulares opciones para calcular estimadores de la población de la media de los costos de tratamientos hospitalarios. La primera opción consiste en observar el comportamiento de los datos cuando se someten a restricciones de parámetros supuestos. Para la segunda opción, se repite la comparación utilizando tres muestras con datos de costos hospitalarios y sacando los estimadores empíricos. El objetivo es evidenciar el beneficio en eficiencia que se obtiene utilizando los estimadores adecuados y también lo costoso que

sería lo contrario.

Para el primer acercamiento al problema, usaremos dos distribuciones: Gamma y log-normal, pues ambas se utilizan para modelar datos sesgados positivamente. Al utilizar estimadores de máxima verosimilitud (EMV) tenemos, para la distribución Gamma que su EMV es la media muestral y para la distribución log-normal es $exp(lm + lv/2)$ donde lm y lv son la media y varianza en escala logarítmica, respectivamente.

En el experimento, para ambas distribuciones, la media de la población fue designada de 1000 con cinco opciones de coeficientes de variación (CoV= 0.20,0.50,1.0,1.5,2.0) para definir los parámetros de la distribución. A su vez, se hicieron experimentos con cinco distintos tamaños de muestra (n= 20,50,200,500,2000) para cada CoV, lo cual resulta en 50 experimentos y para cada uno de ellos se realizaron 10,000 realizaciones.

Para observar el sesgo y la precisión de los estimadores se calcula la Raíz del Error Mínimo Cuadrado (REMC), como esperado este coeficiente decrece entre es más bajo es el coeficiente de variación y mayor es la muestra sin importar el EMV que se utilice.

Cuando los datos son log-normales el mejor estimador es su propio EMV y exhiben menor REMC que con el estimador de la media muestral; en cambio, cuando el estimador log-normal es aplicado a datos que se distribuyen Gamma los resultados son terribles, sobre todo cuando el CoV es más grande. Esto se debe a que el estimador log-normal está mucho más sesgado a cambios en el coeficiente de variación, mientras que la media muestral no. Estos resultados se repiten cuando medimos el intervalo de confianza, entre menos coeficiente de variación y mayor número de muestra, mayor es el intervalo de confianza.

El segundo enfoque es usar tres bases de datos observados de costos hospitalarios y sacar estimadores empíricos, pues dificilmente se obtienen datos que se comporten como una distribución. Estas bases de datos a nivel costo-paciente son,

- Datos CPOU: Datos obtenidos de la Unidad de Observación para Dolores de Pecho en un hospital escuela. Se reclutaron 972 pacientes con costos a precios de 2001-2002 de las primeras 6 horas de hospitalización, duración de la misma, medicinas, estudios, procedimientos, etc.

- Datos de Fluidos IV: Estos datos fueron obtenidos mediante dos protocolos de atención con fluidos intravenosos aplicado por paramédicos en pacientes con traumas severos antes de llegar al hospital. Se obtuvieron datos de costos hasta 6 meses después del trauma, costos de ambulancia, de fluidos, cuidado ambulatorio para 1191 pacientes a costos de 1997-1998.

- Datos de Paramédicos: Estos datos se consiguieron a traveés de un estudio controlado de paramédicos y técnicos de ambulancia para pacientes con traumas. La muestra de pacientes es de 1852 con datos de 1996-1997 con costos hasta de 6 meses después del trauma inicial incluyendo costos de ambulancia y tratamientos, hospitalización y cuidados ambulatorios.

En un primer análisis exploratorio de los datos vemos que la curtosis y el sesgo de los datos es muy grande comparado con los valores de la normal, es también interesante que la desviación estándar es lo doble a la media para las tres bases de datos. Dado estos resultados se transforman los datos mediante el logaritmo natural, lo que hace que los resultados de media,

varianza, sesgo y curtosis se vean más normales.

Tomando otra vez el experimento de simulación, de nuevo con 10,000 realizaciones, que consiste en la extracción de datos de manera aleatoria sin reemplazo de las bases de datos, modificando el tamaño de la muestra, es decir, (n=20,50,300,500) se vuelven a usar los estimadores anteriores: media muestral y $exp(lm + lv/2)$ con sus recpectivos intervalos de confianza. Una vez realizado este experimento se analizan los resultados con muchas similitudes a los resultados anteriores.

La REMC, como esperado, disminuye entre mayor en el tamaño de la muestra. Es importante mencionar que cuando el tamaño de la muestra es más chico para los dos estimadores en cada una de las bases las REMC's son bastante cercanas; sin embargo, cuando el tamaño aumenta el Teorema del Límite Central empieza a ser relevante y la media muestral se vuelve más certera. Sin embargo, lo contrario le ocurre al estimador log-normal, pues sus intervalos de confianza se deterioran rápidamente mientras más grande es la muestra. Esto es porque el Teorema del Límite Central es crucial en la validación de estimadores como la media muestra, el incremento en el tamañono es garantía para otros estimadores paramétricos cuyos supuestos no aguanten este incremento.

Normalmente se diría que el Teorema del Límite Central aplica para cualquier muestra mayor a 30 observaciones, independientemente de su distribución original; sin embargo, esta regla de la práctica no aplica con distribuciones asimétricas como podría ser este el caso.

Como se puede ver cuando se tienen datos de costos hospitalarios es poco probable que estos se comporten como una distribución paramétrica. La simple construcción de estos datos nos da la pista, pues la mayoría de ellos

son la suma de costos más pequeños (costos de ambulancia, tratamientos, medicinas, etc.) lo cual significa que es una suma de distintas distribuciones. Es por esto que no podemos confiar que los datos solos nos den mucha información sobre la forma de la distribución.

Con los experimentos realizados a partir de los datos observados confirman que cuando se conoce la forma de la distribución de los datos de costos, el uso del estimador correcto es una gran ganancia en eficiencia; al igual que el uso del estimador incorrecto supone resultados totalmente engañoso. La literatura sobre riesgos recomiendan una cuidadosa modelación paramétrica de los datos para escoger el mejor estimador, aunque se recomienda un número mayor de muestra (entre 10,000-50,000 observaciones), este número es difćil de obtener en cualquier protocolo de estudios.

Por la dificultad de conseguir una muestra de datos de costos hospitalarios suficientemente grande para una modelación paramétrica adecuada, la manera de una correcta estimación con datos basados en la experiencia siguie siendo un reto.

2.3. Development and applications of a three-parameter Weibull distribution with load-dependent location and scale parameters

La distribución más utilizada en el campo de la confiabilidad es la distribución Weibull, dado que es la más apropiada para modelar datos de falla. El propósito de este artículo es evidenciar el incremento en confiabilidad al utilizar la distribución Weibull con los parámetros de escala y locacón esti-

mados por el nivel de la carga, en contraste al análisis tradicional cuando se analizan datos dependientes de cantidades de carga.
Este experimento consiste en datos sobre cinco conjuntos de cadenas industriales, que son probadas con cinco niveles de carga distintos hasta que todos sus componentes fallen. El tiempo de vida será definido como el número de ciclos completados por la cadena antes de que la falla de todos sus componentes. Los factores de interés serían el tiempo de vida, las curvas del Número Confiable de Carga (Reliability-load-number; R-L-N) y la distribución de la fuerza.

Para ambos análisis, definimos N como la variable aleatoria del tiempo de vida, por lo que la distribución de $F(N)$ es

$$F(N) = 1 - R(N) = 1 - \exp(-(\frac{N-\gamma}{\eta})^{\beta})$$

donde $R(N)$ es la función de confiabilidad, por lo que se concluye que $F(N)$ es la probabilidad de falla de los componentes. η, β y γ son los parámetros de escala, forma y localización, respectivamente.

Con el análisis tradicional de los datos, se puede concluir que para cada nivel de carga la distribución de vida se asume como una distribución de Weibull tradicional donde se ajusta la distribución teórica a la empírica. De este modo, se fija un "nivel de confiabilidad"R y se calcula una "vida confiable"N_i tal que corresponda a la distribución de vida al nivel de carga L_i (i=1,...,5), la relación entre estas variables se puede modelar con la siguiente fórmula, donde m y C son parámetros que se determinaran según los valores del experimento:

$$L^m N = C$$

Cuando cambia esta relación también cambia R, generando una serie de ecuaciones R-L-N. A su vez, estas ecuaciones se utilizaran para calcular la probabilidad de falla correspondiente a cada N_i a nivel de carga L_i; dado que es igual a la probabilidad de falla del nivel de carga S_i en el componente de vida N_i, es decir,

$$F_{Li}(N_i) = F_{Ni}(L_i)$$

donde F_{Li} es la distribución de vida a nivel de carga L_i y F_{Ni} es la distribución de fuerza al componente de vida N_i.

Sin embargo, con el análisis tradicional se encuentras varios problemas por ejemplo, la dificultad de analizar todos los datos de manera simultánea, los estimadores son menos realistas y se pueden comportar de maneras contraintuitivas, debido a que el tamaño de las muestras es pequeño y las distribuciones de vida son fijas; y las ecuaciones R-L-N y las distribuciones de fuerza no se pueden derivar directamente de las distribuciones de vida.

Dado estos problemas se busca desarrollar un modelo dentro del marco de la distribución de Weibull de tres parámetros que permita el análisis de todos los datos de falla de los componentes. Para este propósito se propone el siguiente modelo,

$$F(L, N) = 1 - \exp(-(\frac{N - \gamma(L)}{\eta(L)})^{\beta})$$

Retomando la ecuación que relaciona el componente de vida y el nivel de carga, podemos asumir que,

$$\gamma(L) = aL^{-b} \quad a > 0, b > 0$$
$$\eta(L) = cL^{-d} \quad c > 0, d > 0$$

El parámetro de forma (β) se asume que es el mismo para todos los niveles de carga.

Para estimar los parámetros de la distribución Weibull suponemos n_i componentes que se ponen a prueba con un nivel de carga L_i y para cada nivel de carga L_i tenemos componentes de vida N_{ij}. Si se eligen m niveles de carga, el número total de componentes probados es,

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

Sea $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (a, b, c, d, \beta)$ el conjunto de parámetros desconocidos, podemos estimar X minimizando la desviación máxima absoluta entre las distribuciones teóricas y empíricas.

$$f(X) = min_x(max_i, D_{n_i})$$

donde

$$D_{n_i} = max_j |F(L_i, N_{ij}) - F_n(L_i, N_{ij})|$$
$$F_n(L_i, N_{ij}) = \frac{j - 0{,}3}{n_i + 0{,}4} \quad i = i, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n_i$$

y $F(L_i, N_{ij})$ se calcula conforme a la distribución Weibull definida. Una vez que X ha sido estimada, las distribuciones de vida a cualquier nivel de carga, las ecuaciones R-L-N y las distribuciones de fuerza pueden ser calculadas de manera directa. Es importante notar que esta estimación fue hecha así por el tamaño de la muestra, pues si esta fuera más grande, la estimación se pudiera hacer mediante máxima verosimilitud, mínimos cuadrados, etc.

Como mencionado, las ecuaciones R-L-N se derivan de manera inmediata.

Así, tomando la distribución Weibull con tres parámetros, y las relaciones entre vida y nivel de carga tenemos,

$$(\frac{NL^d - aL^{d-b}}{c}) = -\ln R$$

Que es equivalente a

$$L^d(N - aL^{-b}) = C$$

donde

$$C = c(-\ln R)^{1/\beta}$$

esta ecuación R-N-L es distinta de la convencional pues presenta una modificación realista a la última.

Cuando N es igual al número de ciclos básicos N_b, tenemos la siguiente función de distribución

$$F(L, N_b) = 1 - R(L, N_b) = 1 - \exp(-(\frac{N_b - aL^{-b}}{cL^d})^{\beta})$$

La función de densidad de la fuerza es la primer derivada parcial de esta función de distribución con respecto a L. El resultado es igualmente distinto al tradicional, como pasó con las ecuaciones R-L-N, pues cuando el componente de vida a cada nivel de carga conforma una distribución Weibull de tres paraámetros, su distriución de fuerza no es una distribución normal, ni Gamma o cualquier otra distribución conocida.

El paraámetro de locación de la distribución de fuerza es dependiente del componente de vida. Este parámetro en la distribución de fuerza significa la mínima fuerza en la que la distribución es igual a cero,

$$F(L_0, N_b) = 0$$

En este caso, el parámetro L_0 se determina como,

$$L_0 = (\frac{a}{N_b})^{1/b}$$

Esta fórmula indica como el parámetro de locación y la distribución de fuerza están relacionadas a N_b, a y b de $\gamma(L)$. Con a y b conocidas, si N_b es más grande entonces L_0 se hace más pequeño; lo cual es un resultado intuitivo.

Una vez definido el modelo Weibull con tres parámetros, éste se utiliza para analizar los datos que se tienen. A diferencia del análisis convencional en el que se obtuvieron algunos resultados contraintuitivos, ahora el parámetro de locación decrece en tanto el nivel de carga se hace mayor, sin resultados anormales. También las curvas R-L-N se comportan mejor, garantizando que entre mayor sea el componente de confiabilidad del componente menor será el componente de fuerza correspondiente.

Después del análisis con el modelo Weibull se puede concluir que el análisis de todos los datos a diferentes niveles de carga se puede realizar de manera simultánea, las ecuaciones R-L-N y las distrubiciones de fuerza se pueden derivar directamente de la función de distribución además de resultar diferentes a aquellas obtenidas mediante métodos empíricos, lo cual sugiere que determinar las escuaciones R-L-N y las distribuciones de fuerza pueden llevar a resultados que no corresponden a la realidad.

Igualmente, dado que los parámetros de locación y escala son dependientes del nivel de carga, esto asegura que el modelo no produzca ningún resultado poco realista y más útil en la práctica dada su simplicidad.

2.4. Explaining the Gibb Sampler

Entre los métodos computacionales que han ayudado al desarrollo de la estadística tenemos al Muestreador de Gibb, que es una técnica que genera variables aleatorias indirectamente de distribuciones marginales sin tener que calcular la densidad. Este algoritmo se basa en las propiedades principales de las Cadenas de Markov. Aunque normalmente realcionado con la estadística Bayesiana, el Muestreador de Gibb también es útil en la visión clásica de la estadística.

Supongamos que tenemos una distribución conjunta $f(x, y_1, y_2, ..., y_p)$

$$f(x) = \int \cdots \int f(x, y_1, y_2, ..., y_p) dy_1, dy_2, ..., dy_p$$

Y nos interesan las características de la densidad marginal como la media o la varianza de x, con el Muestreador de Gibb podemos generar una muestra $X_1, ..., X_m \sim f(x)$ sin requerir calcular $f(x)$ directamente y obteniendo la media o la varianza con suficiente precisión.

Para explorar con detalle como funciona el Muestreador de Gibb, se toman dos variables aleatorias (X, Y) y el Muestreador de Gibb genera una muestra de $f(x)$ muestreando las distribuciones condicionales $f(x|y)$ y $f(y|x)$ que normalmente son conocidas en los modelos estadísticos. Esto se logra generando una "secuencia de Gibb"de variables aleatorias donde los valores iniciales son especificados y el resto se obtiene de manera iterativa generando así valores para

$$X'_j \sim f(x|Y'_j = y'_j)$$
$$Y'_{j+1} \sim f(y|X'_j = x'_j)$$

Esto es lo que se llama muestreo de Gibb, si $k \to \infty$ la distribución de X'_k convergerá con la verdadera distribución marginal de X ($f(x)$).

El Muestreador de Gibb se puede pensar como una implementación práctica del conocimiento de que el conocimiento de las distribuciones marginales es suficiente para conocer la distribición conjunta y aunque esto parezca claro para casos bivariados no es tan directo para los casos multivariados.

Suponemos dos variables aleatorias X, Y, de las cuales sabemos sus distribuciones condicionales $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$. A partir de estas podríamos calcular la función marginal de X y la distribución conjunta de ambas variables, mediante el siguiente argumento:

$$f_X(x) = \int f_{XY}(x, y) \quad dy$$

donde $f_{XY}(x, y)$ aún es desconocida. Si usamos el hecho que $f_{XY}(x, y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)$ tendríamos que,

$$f_X(x) = \int f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) \quad dy$$

asimismo, si sustituimos $f_Y(y)$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f_{X|Y}(x|y) f_{Y|X}(y|t) f_X(t) \quad dtdy \\ &= \int [\int f_{X|Y}(x|y) f_{Y|X}(y|t) dy] f_X(t) dt \\ &= \int h(x, t) f_X(t) dt \end{aligned}$$

Esto se llama una ecuación integral con un punto fijo que tiene como solución $f_X(x)$. Esta ecuación es una forma limitada de la iteración de Gibbs, ilustrando como las distribuciones condicionales producen una distribución

marginal. Aunque la distribución conjunta de X, Y determinan las condicionales y las marginales, no siempre las condicionales determinen de manera tan directa la distribución marginal.

En cuantas más variables existan, el problema se vuelve más complejo pues la relación entre las condicionales, marginales y conjuntas se vuelve más intrincada. Por ejemplo, la relación $condicional \times marginal = conjunta$ no se sontiene para todas las condicionales y marginales. Pero se pueden hacer varios conjuntos de variables para construir las ecuaciones integrales con un punto fijo para calcular la distribución marginal de interés.

Supongamos que tenemos las variables aleatorias X, Y, Z y queremos la distribución $f_X(x)$, la ecuación integral de punto fijo si tomamos (Y, Z) como una sola variable, lo que resultaría en,

$$f_X(x) = \int [\int \int f_{X|YX}(x|y,z) f_{YZ|X}(y,z|t) dydz] f_X(t) dt$$

De esta manera, muestreando iterativamente de $f_{X|YZ}$ y $f_{YZ|X}$ resultarían en una serie de variables aleatorias que convergen en $f_X(x)$. Por otro lado, el Muestreador de Gibb muestrearía iterativamente las distribuciones $f_{X|YZ}, f_{Y|XZ}, f_{Z|X}$ y en la j-ésima iteración tendríamos que,

$$\begin{aligned} X'_j &\sim f(x|Y'_j = y'_j, Z'_j = z'_j) \\ Y'_{j+1} &\sim f(y|X'_j = x'_j, Z'_j = z'_j) \\ Z'_{j+1} &\sim f(z|X'_j = x'_j, Y'_{j+1} = y'_{j+1}) \end{aligned}$$

Este esquema de iteraciones nos produce una secuencia de Gibbs,

$$Y'_0, Z'_0, X'_0, Y'_1, Z'_1, X'_1, ...$$

con la propiedad de que ente más grande es la k, $X'_k = x'_k$ es un punto de la distribución marginal $f(x)$ y resolverá la ecuación integral con punto fijo.

En la estadística bayesiana, el Muestreador de Gibbs se utiliza para calcular la distribución posterior mientras que en la estadística clásica se utiliza para calcular la función de verosimilitud. Es importante mencionar que tanto el Muestreador de Gibbsy el algoritmo EM tienen en común el uso de una estructura subyacente, o variables no observables.

La utilidad del Muestreador de Gibbs es más evidente con problemas de mayor complejidad pues ahorra muchos cálculos engorrosos de una manera más elegante y con igual de precisión; además de su potencial práctico.

Bibliografía

Daley, D. and Vere-Jones, D. (2003). *An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume I: Elementary Theory and Methods*. 2nd edition edition.

Hahn, M. G. and Zhang, G. (2012). Exchangeable random variables. *High Dimensional Probability*, 43:111.

Paik Schoenberg, F. (2000). *Introduction to Point Processes*.

Resnick, S. I. (1999). *A Probability Path*. Birkhauser.