

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ “ЛЬВІВСЬКА
ПОЛІТЕХНІКА”**

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота №2

з дисципліни

«Дискретна математика»

Виконав:

студент групи КН-113

Зварич Адріана

Викладач: Мельникова Н.І.

Львів – 2019 р.

Тема роботи:

Моделювання основних операцій для числових множин

Мета роботи:

Ознайомитись на практиці із основними поняттями теорії множин, навчитись будувати діаграми Ейлера-Венна операцій над множинами, використовувати закони алгебри множин, освоїти принцип включень-виключень для двох і трьох множин та комп'ютерне подання множин.

Теоретичні відомості:

2.1. Основні поняття теорії множин. Операції над множинами

Множина – це сукупність об'єктів, які називають елементами. Кажуть, що множина A є **підмножиною** множини Σ (цей факт позначають $A \subseteq \Sigma$, де \subseteq – знак нестрогого включення), якщо кожен її елемент автоматично є елементом множини Σ . Досить часто при цьому кажуть, що множина A міститься в множині Σ .

Якщо $A \subseteq \Sigma \subseteq A$, то A називають **власною (строгою, істинною) підмножиною** Σ (позначають $A \subset \Sigma$, де \subset – знак строгого включення).

Дві множини A та Σ називаються **рівними**, якщо вони складаються з однакових елементів. У цьому випадку пишуть $A = \Sigma$.

Якщо розглядувані множини є підмножинами деякої множини, то її називають **універсумом або універсальною множиною** і позначають літерою U (зауважимо, що універсальна множина існує не у всіх випадках). Множини як об'єкти можуть бути елементами інших множин, Множину, елементами якої є множини, інколи називають **сімейством**.

Множину, елементами якої є всі підмножини множини A і тільки вони (включно з порожньою множиною та самою множиною A), називають **булеаном або множиною-степенем** множини A і позначають $P(A)$.

Потужністю скінченної множини A називають число її елементів, позначають $|A|$. Множина, яка не має жодного елемента, називається **порожньою** і позначається \emptyset . Вважається, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини, а також $A \subset A$.

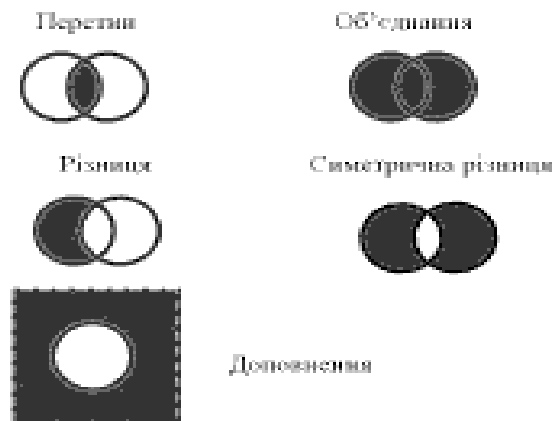
Дві множини A і B **рівні** між собою, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Над множинами можна виконувати дії: **об'єднання, переріз, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток**.

Об'єднанням двох множин A і B (рис. 2.1, а) називають множину

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Кола Ейлера



Перетином (перерізом) двох множин A і B (рис. 2.1, б) називають множину $A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.

Різницею множин A та B (рис. 2.2, а) називають множину

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Зазначимо, що $A \setminus B = A \cap \neg B$.

Симетричною різницею множин A та B (рис. 2.2, а) називають множину

$$A \Delta B = \{x : ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))\}.$$

В означенні різниці не розглядають випадок $B \subset A$. Якщо $B \subset A$, то різницю $A \setminus B$ називають **доповненням множини B до множини A** . Для підмножини A універсальної множини U можна розглядати **доповнення A до U** , тобто $U \setminus A$, її позначають $\bar{A} = \{x : \neg(x \in A)\} \Leftrightarrow \bar{A} = \{x : x \notin A\}$ і називають **доповненням множини A** .

Пріоритет виконання операцій у спадному порядку –

доповнення, переріз, об'єднання, різниця, симетрична різниця.

Варіант 9

Завдання1. Для даних скінчених множин $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{5,6,7,8,9,10\}$, $C=\{1,2,3,4,8,9,10\}$ та універсуму $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(\neg B \setminus C) \cup B$; б) $(B \cap \neg A) \Delta C$. Розв'язати, використовуючи комп'ютерне подання множин.

Розв'язання:

а) $(\neg B \setminus C) \cup B$

$$A = \{1,1,1,1,1,1,1,0,0,0\}, B = \{0,0,0,0,1,1,1,1,1,1\}, C = \{1,1,1,1,0,0,0,1,1,1\},$$

$$\neg B = \{1,1,1,1,0,0,0,0,0,0\}$$

$$(\neg B \setminus C) = \{\emptyset\}$$

$$((\neg B \setminus C) \cup B) = \{B\}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } & (B \cap \neg A) \Delta C \\ & \neg A = \{0,0,0,0,0,0,0,1,1,1\} \\ & (B \cap \neg A) = \{0,0,0,0,0,0,0,1,1,1\} \\ & ((B \cap \neg A) \Delta C) = \{1,1,1,1,0,0,0,0,0,0\} \end{aligned}$$

Завдання 2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $B \setminus ((A \setminus B) \Delta C)$. Знайти його потужність.

$$\begin{aligned} (B \setminus ((A \setminus B) \Delta C)) &= B \setminus (\{1,2,3,4\} \Delta C) = B \setminus \{8,9,10\} = \{5,6,7\} \\ P(B \setminus ((A \setminus B) \Delta C)) &= 3; \quad \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5,6\}, \{6,7\}, \{5,7\}, \{5,6,7\}\}. \end{aligned}$$

Завдання 3. Нехай маємо множини: N – множина натуральних чисел, Z – множина цілих чисел, Q – множина раціональних чисел, R – множина дійсних чисел; A, B, C – будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірному твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне – навести доведення):

- а) $\{4\} \subset \{1,2,3,\{4,5\}\}$ - твердження є вірне
- б) $Q \cap R \subset R$ - твердження є вірне
- в) $R \setminus Z \subset Q$ - твердження є хибне
- г) $N \cap R \subset Z \cap Q$ - твердження є вірне
- д) якщо $C \subset B \cap \neg A$, то $A \cap C = \emptyset$ - твердження є вірне

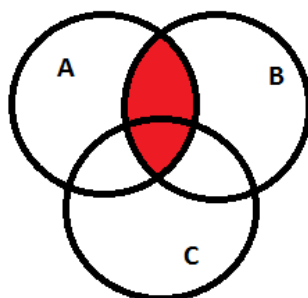
Завдання 4. Логічним методом довести тотожність: $A \Delta (A \Delta B) = B$

$$\begin{aligned} A \Delta (A \Delta B) &= \{x | (x \in A \wedge x \notin A \Delta B) \vee (x \notin A \wedge x \in A \Delta B)\} = \{x | (x \in A \wedge x \in A \cap B) \vee (x \notin A \wedge \\ & \wedge ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)))\} = \{x | (x \in A \cap B) \vee (x \notin A \wedge x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B))\} \\ &= \{x | (x \in A \cap B) \vee \emptyset \vee x \in \neg A \cap B\} = \{x | (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\} = \{x | (x \in B \wedge \\ & \wedge (x \in A \vee x \in \neg A))\} = \{x | (x \in B \wedge x \in U)\} = \{x | (x \in B \cap U)\} = \{x | x \in B\} = B \end{aligned}$$

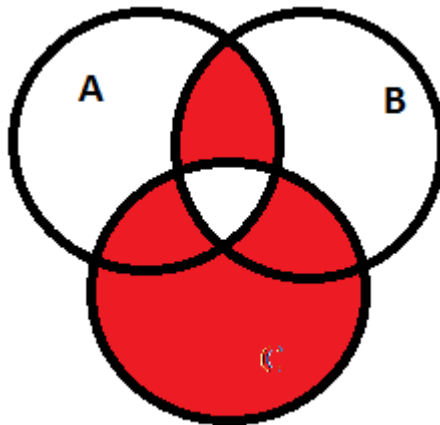
Завдання 5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину: $((A \cap B) \Delta C) \setminus A \Delta B$.

Розв'язання:

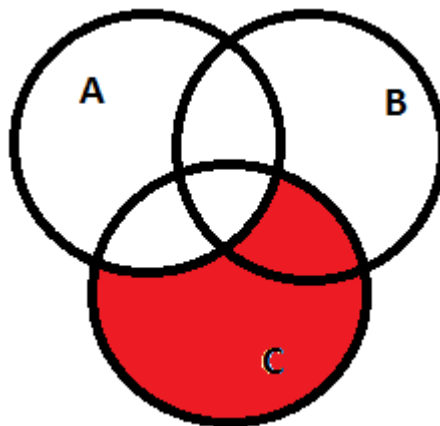
$$A \cap B$$



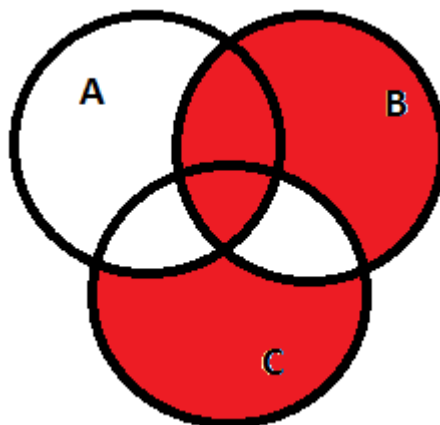
$$(A \cap B) \Delta C$$



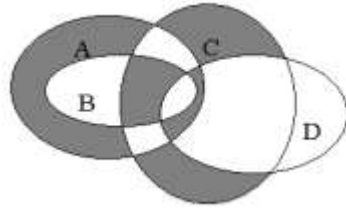
$$((A \cap B) \Delta C) \setminus A$$



$$(((A \cap B) \Delta C) \setminus A) \Delta B$$



Завдання 6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



$$((A \setminus B) \setminus (A \cap C)) \cup (B \cap C) \cup ((C \setminus D) \setminus (A \cap C))$$

Завдання 7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A \cap B \cap C \cap \neg D) \cup (\neg A \cap C) \cup (C \cap D)$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} (A \cap B \cap C \cap \neg D) \cup (\neg A \cap C) \cup (C \cap D) &= C \cap ((A \cap B \cap \neg D) \cup \neg A \cup D) = \\ C \cap ((A \cup \neg A) \cap (B \cup \neg A) \cap (\neg D \cup A) \cup D) &= C \cap (U \cap (B \cup \neg A) \cap (D \cup \neg A) \cup D) = \\ C \cap ((U \cup D) \cap (B \cup \neg A \cup D) \cap (D \cup \neg A \cup D)) &= C \cap (U \cap (B \cup \neg A \cup D) \cap U) = \\ C \cap (B \cup \neg A \cup D) \end{aligned}$$

Завдання 8. У бою не менше 70% бійців втратили одне око, не менше 75% – одне вухо, не менше 80% – одну руку і не менше 85% – одну ногу. Яка мінімальна кількість бійців, які втратили одночасно око, вухо, руку і ногу?

Розв'язання: Нехай:

A-бійці, які втратили одне око;

B-бійці, які втратили одне вухо;

C-бійці, які втратили одну руку;

D-бійці, які втратили одну ногу;

1) Обчислимо скільки відсотків бійців втратили одночасно одне око та одне вухо:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 70 + 75 - 100 = 45\%$$

2) Обчислимо скільки відсотків бійців втратили одночасно одну ногу та одну руку:

$$|C \cap D| = |C| + |D| - |C \cup D| = 80 + 85 - 100 = 65\%$$

3) Обчислимо мінімальну кількість бійців, які втратили одночасно око, вухо, руку, і ногу:

$$|A \cap B \cap C \cap D| = |A \cap B| + |C \cap D| - |A \cup B \cup C \cup D| = 45 + 65 - 100 = 10\%$$

Отже, 10% бійців одночасно втратили око, вухо, руку та ногу.

Додаток 2

Ввести з клавіатури дві множини дійсних чисел. Реалізувати операції перерізу та об'єднання над цими множинами. Вивести на екран новоутворені множини. Знайти їх потужність.

Програма:

```
1  #include <bits/stdc++.h>
2
3  using namespace std;
4
5  int main()
6  {
7      int x,y,i,j;
8      cout<<"Input size of mass 1: ";
9      cin>>x;
10     cout<<"Input size of mass 2: ";
11     cin>>y;
12     double a[x];
13     double b[y];
14     for (i=0;i<x;i++)
15         cin>>a[i];
16     for (i=0;i<x;i++) for (j=i;j<x;j++)
17         if (a[i]>a[j]) swap(a[i],a[j]);
18     for (i=0;i<x;i++) if (a[i]==a[i+1]){
19         for (j=i;j<x;j++) a[j]=a[j+1];
20         x--;
21         i--;}
22     for (i=0;i<y;i++) cin>>b[i];
23     for (i=0;i<y;i++) for (j=i;j<y;j++)
24         if (b[i]>b[j]) swap(b[i],b[j]);
25     for (i=0;i<y;i++) if (b[i]==b[i+1]){
26         for (j=i;j<y;j++) b[j]=b[j+1];
27         y--;
28         i--;}
29     //Утворюємо об'єднання множин
30     int abc=x+y;
31     double c[abc];
32     int k=0;
33     for (i=0;i<x;i++){
34         c[k]=a[i];
35         k++; }
36     for (i=0;i<y;i++){
37         c[k]=b[i];
38         k++; }
39     for (i=0;i<abc;i++) for (j=i;j<abc;j++)
40         if (c[i]>c[j]) swap(c[i],c[j]);
```

```

41 for (i=0;i<abc;i++) if (c[i]==c[i+1]){
42     for (j=i;j<abc;j++) c[j]=c[j+1];
43     abc--;
44     i--;}
45 for (i=0;i<abc;i++) cout<<c[i]<<' ';
46 cout<<endl<<abc;
47 cout<<endl;
48
49 //Утворюємо перетин множин
50 bool bas[abc];
51 for (i=0;i<abc;i++) bas[i]=1;
52 for (i=0;i<x;i++){
53     for (j=0;j<abc;j++) if (a[i]==c[j]){
54         if (bas[j]==0) bas[j]=1;
55         else
56             if (bas[j]==1) bas[j]=0;
57     }
58 }
59 for (i=0;i<y;i++){
60     for (j=0;j<abc;j++) if (b[i]==c[j]){
61         if (bas[j]==0) bas[j]=1;
62         else
63             if (bas[j]==1) bas[j]=0;
64     }
65 }
66 k=0;
67 for(i=0;i<abc;i++)
68     if (bas[i]==1) {cout<<c[i]<<' ';k++;}
69 cout<<endl<<k;
70 }

```

Результати програми:

```

Input size of mass 1: 4
Input size of mass 2: 4
1.1 1.2 2.2 4.5
1.2 2.2 2.2 5.7
1.1 1.2 2.2 4.5 5.7
5
1.2 2.2
2
Process returned 0 (0x0)   execution time : 53.488 s
Press any key to continue.

```

Висновок: ми ознайомились на практиці із основними поняттями теорії множин, навчились будувати діаграми Ейлера-Венна операцій над множинами, використали закони алгебри множин, освоїли принцип включень-виключень для двох і трьох множин та комп'ютерне подання множин.

