Análisis asintótico

Manuel Loaiza Vasquez

7 de julio de 2024

1. Exhiba tres parejas (c, n_0) tales que $100n^2 \leq (c/100)n^3$ para $n \geq n_0$.

2. Demuestre que $3n^2 + 7n - 8$ está en $\mathcal{O}(n^2)$.

3. Demuestre que $n + 100$ está en $\mathcal{O}(n)$.

4. Demuestre que $100n$ está en $\mathcal{O}(2n)$.

5. Demuestre que $100n$ está en $\mathcal{O}(2n^2 + n)$.

6. Demuestre que $n^2 + 999n + 9999$ está en $\mathcal{O}(n^2)$.

7. Demuestre que $n^2/100 - 999n - 9999$ no está en $\mathcal{O}(n)$.

8. Demuestre que $10\sqrt{n} + 10$ está en $\mathcal{O}(n)$.

9. Demuestre que $n/10 - 100$ no está en $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

10. Demuestre que $\log n^{10}$ está en $\mathcal{O}(\log n)$.

11. Demuestre que $\log_3 n$ está en $\mathcal{O}(\log_2 n)$.

12. Demuestre que $n(n-1)/2$ está en $\mathcal{O}(n^2)$.

13. Demuestre que n está en $\mathcal{O}(2^n)$.

14. Demuestre que $\log n$ está en $\mathcal{O}(n)$.

15. Demuestre que $5 + 1/n$ está en $\mathcal{O}(1)$.

16. Demuestre que $n^2 - 999n - 9999$ está en $\Omega(n^2)$.

17. Demuestre que $\log(n!)$ está en $\Omega(n \log n)$.

18. Demuestre que $n(n+1)/2$ está en $\Omega(n^2)$.

19. Demuestre que n está en $\Omega(\log n)$.

20. Demuestre que $\sqrt{n}$ está en $\Omega(\log n)$.

21. Demuestre que $(n + 10)^5$ está en $\mathcal{O}(n^5)$.

22. Demuestre que $\sqrt{n + 100}$ está en $\Theta(\sqrt{n})$.

23. Demuestre que 2^{n+1} está en $\Theta(2^n)$.

24. Sea $f(n)$ una función que está en $\mathcal{O}(1)$. Demuestre que existe $c > 0$ tal que $f(n) \leq c$ para todo $n \geq 1$.

25. Sean f y g funciones tales que $g(n) > 0$ para $n \geq 1$ y $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$. Demuestre que existe $c > 0$ tal que $f(n) \leq c\,g(n)$ para todo $n \geq 1$.

26. Suponga que $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$. Demuestre que $g(n) \in \Omega(f(n))$.

27. Demuestre que si $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ y $g(n) \in \mathcal{O}(h(n))$, entonces $f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$.

28. Demuestre que $f(n) \in \Theta(g(n))$ si y solo si $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ y $f(n) \in \Omega(g(n))$.

29. Demuestre que si $f_1(n) \in \Omega(g_1(n))$ y $f_2(n) \in \Omega(g_2(n))$, entonces $f_1(n)+f_2(n) \in \Omega(g_1(n)+g_2(n))$.

30. Demuestre que para cualquier par de reales a y b con $b > 0$ se cumple $(n+a)^b \in \Theta(n^b)$.

31. (Comportamiento asintótico de los polinomios) Sea

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

un polinomio de grado d en n con $a_d > 0$. Dada una constante k, demuestre lo siguiente:

- Si $k \geq d$, entonces $p(n) \in \mathcal{O}(n^k)$.
- Si $k \leq d$, entonces $p(n) \in \Omega(n^k)$.
- Si $k = d$, entonces $p(n) \in \Theta(n^k)$.

32. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ f(n-1) + 2n & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Demuestre que $f(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.

33. (Sucesión de Fibonacci) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq 2, \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{si } n > 2. \end{cases}$$

- Demuestre que $f(n) \in \mathcal{O}(2^n)$.
- Demuestre que $f(n) \in \Omega((3/2)^n)$.