

# Algoritmos de Clasificación

Curso de aprendizaje automático para  
el INE

IGMAT

Víctor Gallego y Roi Naveiro

2019-04-11

# Intro a git

- Git es un sistema de **control de versiones** utilizado para gestionar archivos de código.

## En la terminal de bash (Linux, MacOS)

- Obtener e instalar el programa **git**: <https://git-scm.com/>.
- Descarga de un repositorio: **git clone** <https://github.com/albertotb/curso-ml-R>.

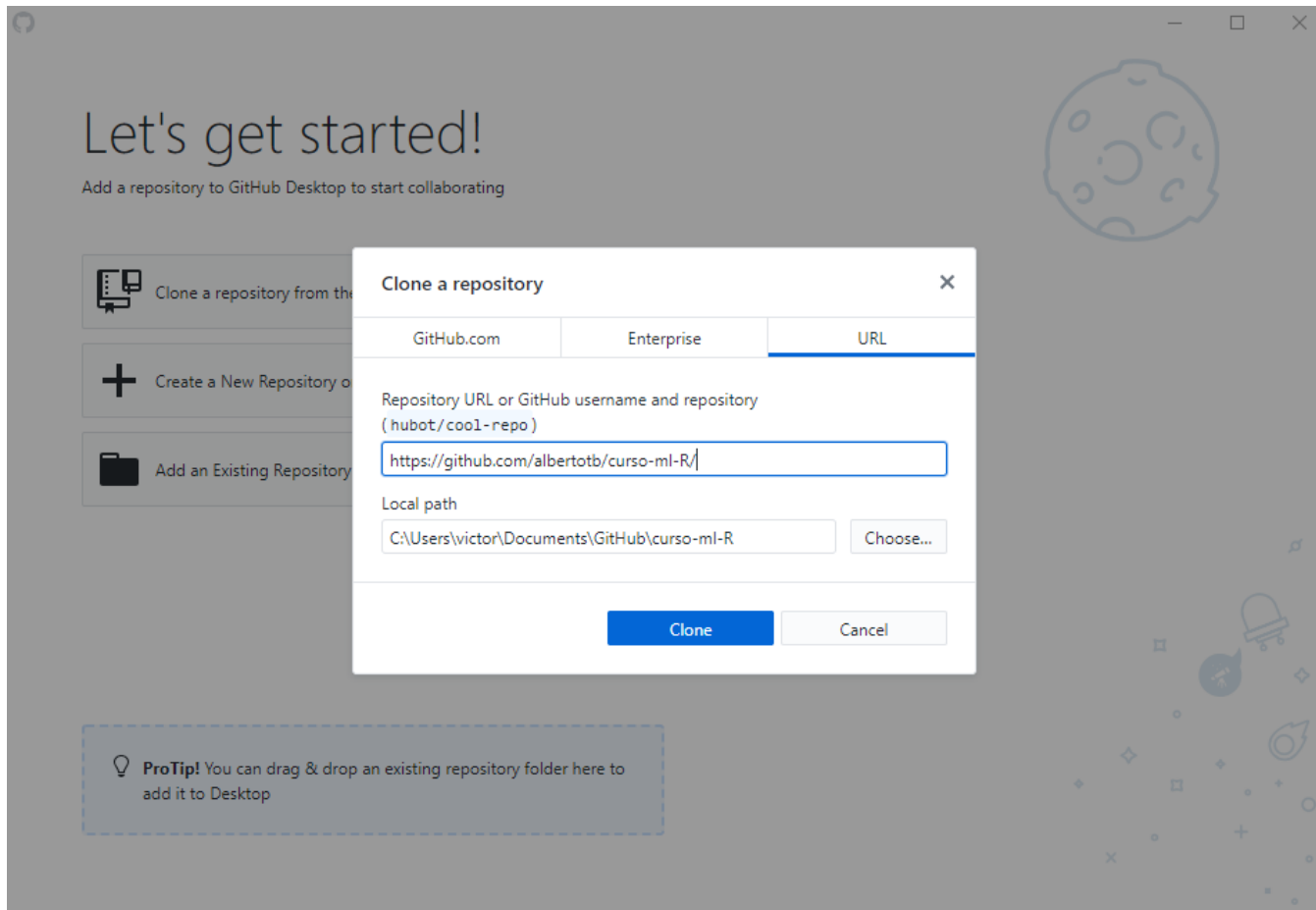
Esto nos creará un nuevo directorio **curso-ml-R**, descargando todo lo que hubiera en la copia remota (la alojada en Github en este caso).

- Actualización de cambios: **git pull** (ejecutado dentro del directorio del repositorio).

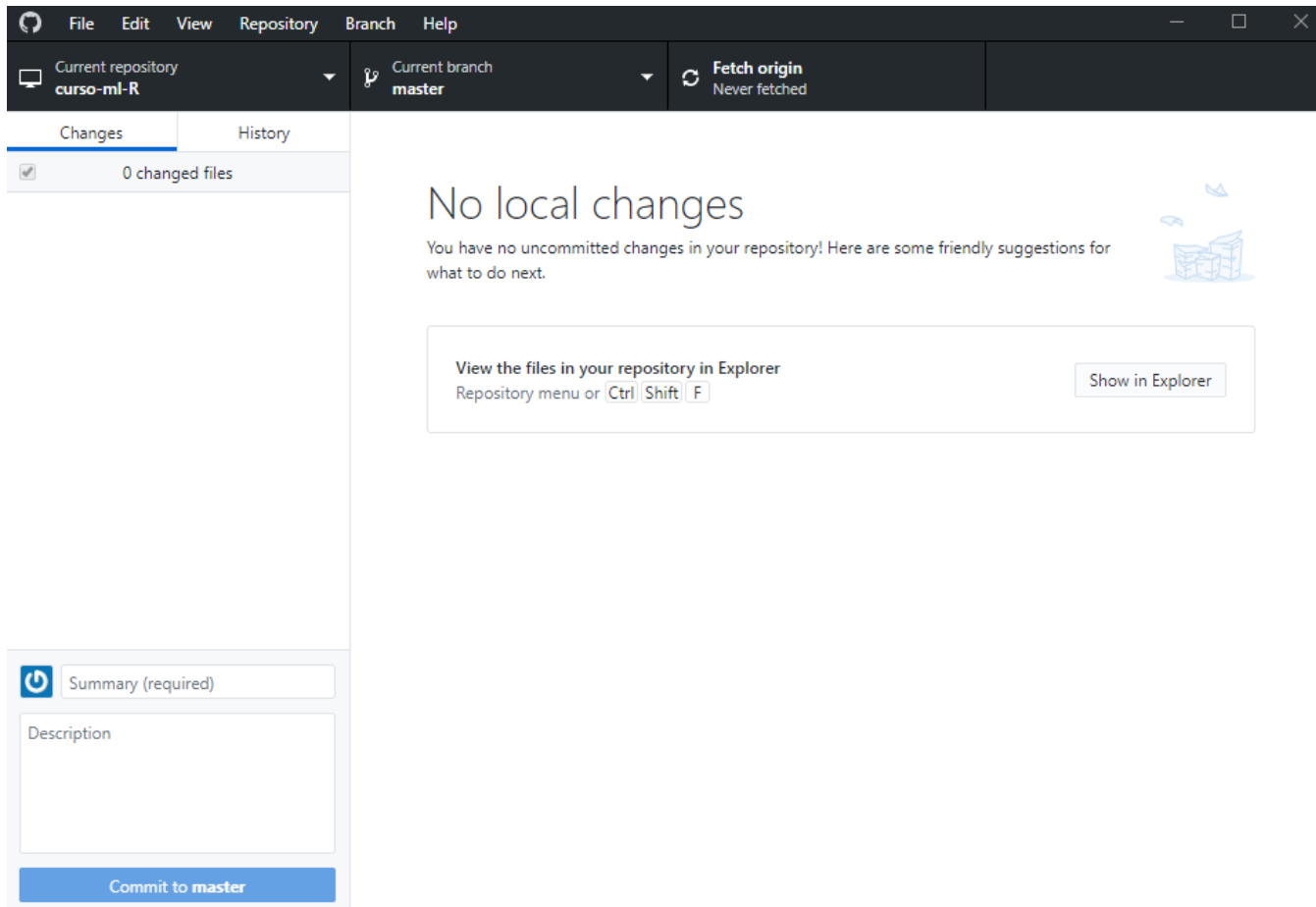
En caso de que la copia remota tenga cambios respecto a nuestra copia local, actualiza nuestra copia local del repositorio. Esto evita volver a descargar todo como al usar git clone.

# En Windows

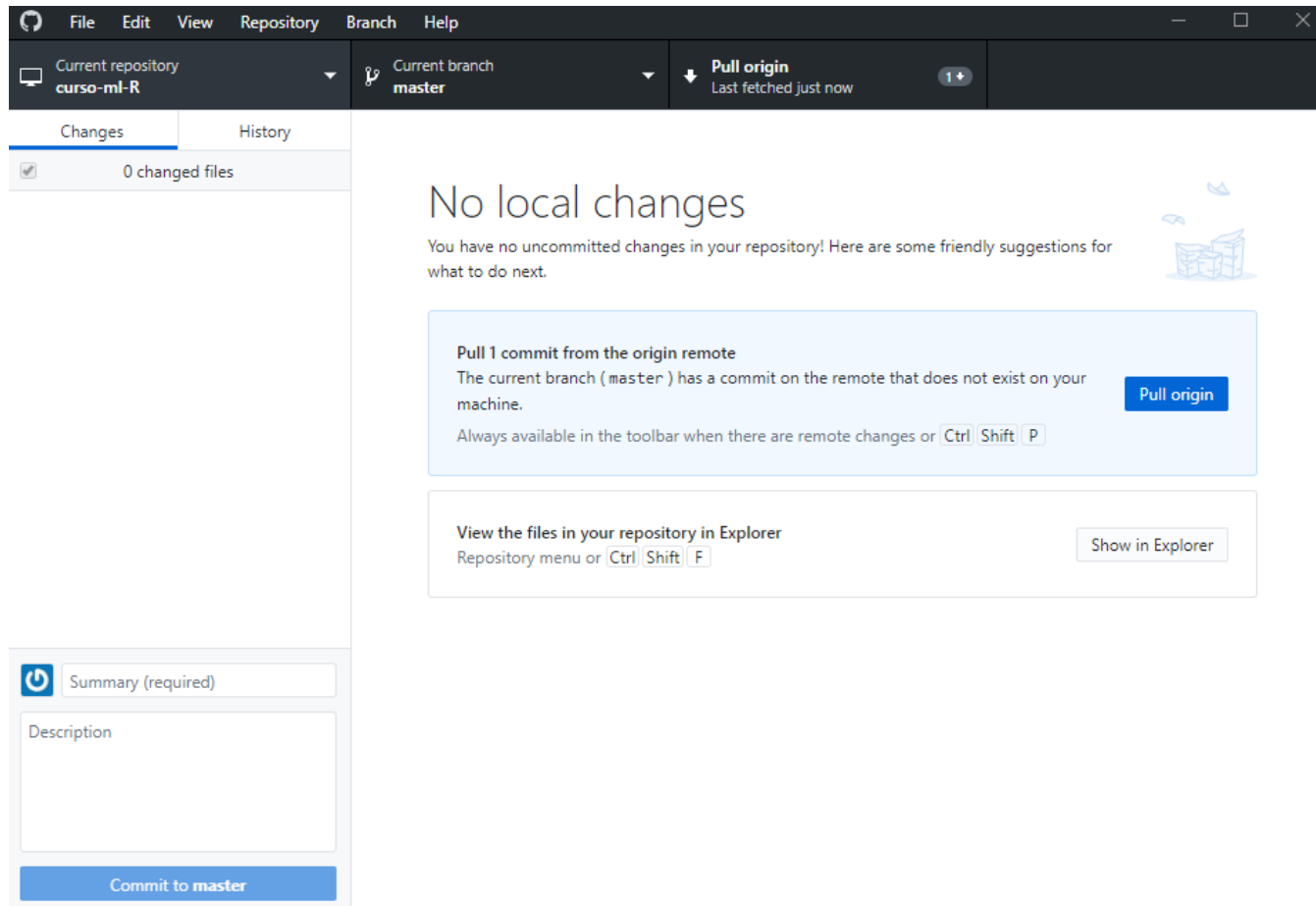
- Podemos utilizar la interfaz gráfica oficial desde <https://desktop.github.com>. Tras instalarlo, en el menú principal escogemos **Clone a new repository**:



- Ésta es la pantalla por defecto del repositorio. Podemos abrir los archivos en el explorador, o ver los cambios recientes en el lateral.



- Para **sincronizar** nuestra copia local con el remoto, pulsamos en **Fetch** arriba, y en caso de haber cambios, pulsamos en **Pull origin** para confirmar.



# Regresión Lineal en problemas de clasificación

# ¿Cómo aplicar regresión lineal a problema de clasificación multiclase?

- Consideramos  $K$  clases.
- **One Hot Encoding** de las categorías: para categoría  $k$ , crear vector  $K$  dimensional  $t_k$  con tan solo un 1 en posición  $k$  (resto ceros).
- $y_i = t_k$  si la categoría del ejemplo  $i$ -ésimo es  $k$ .
- Problema de predicción: reproducir el target de cada observación. Resolver

$$\min_{\mathbf{B}} \sum_{i=1}^N \|y_i - [(1, x_i^\top) \mathbf{B}]^\top\|^2$$

- Para clasificar nueva observación se calcula el vector  $\hat{f}(x)$  y se clasifica resolviendo

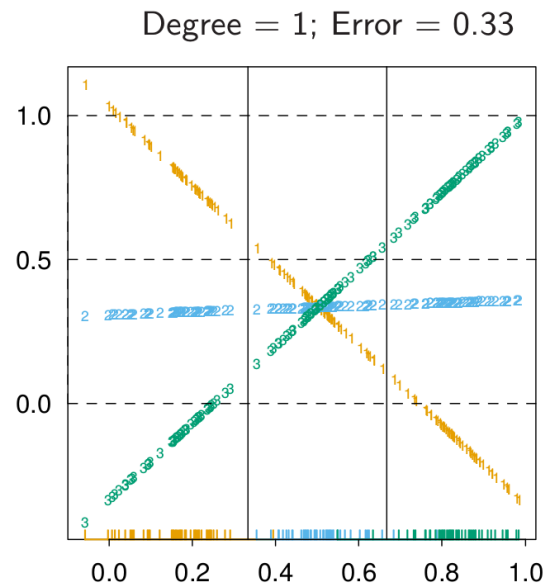
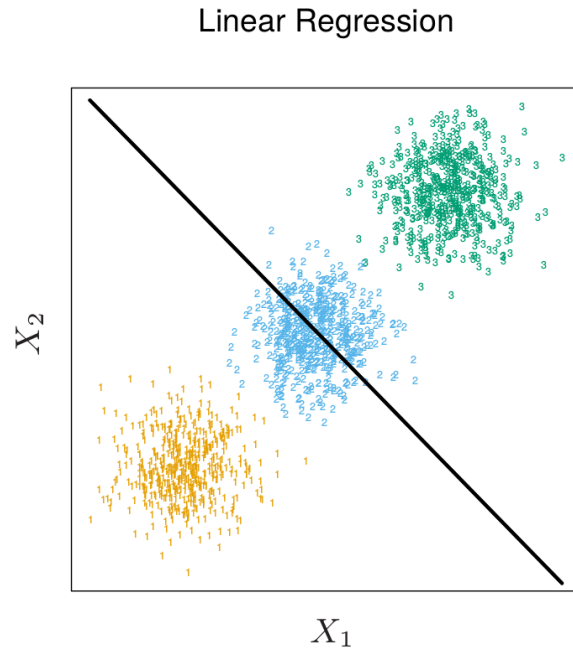
$$\arg \min_k \|\hat{f}(x) - t_k\|^2$$

- Es fácil ver que el problema desacopla en  $K$  problemas de regresión (uno para cada clase).



# Problema - *masking*

- Cuando  $K \geq 3$  unas clases pueden enmascarar otras.



*Fuente:* Elements of Statistical Learning

# Introducción

# Teoría de la decisión estadística

- Sea  $X \in \mathbb{R}^p$ , vector de variables predictoras.
- Sea  $Y \in \{Y_1, Y_2, \dots, Y_K\}$ , respuesta categórica.
- Distribución de los datos  $X, Y \sim p(X, Y)$ .
- Dado nuevo  $X$  necesitamos estimar  $\hat{Y}(X) \in \{Y_1, Y_2, \dots, Y_K\}$ .
- Definimos función de coste  $L[Y, \hat{Y}(X)]$ . Una bastante común: coste 0/1 (0 si acertamos, 1 si nos equivocamos).
- Objetivo: Escoger  $\hat{Y}(X)$  que minimice coste esperado

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{X,Y} [L(Y, \hat{Y}(X))] &= \mathbb{E}_X \mathbb{E}_{Y|X} [L(Y, \hat{Y}(X))] \\ &= \mathbb{E}_X \sum_{i=1}^K L[Y_i, \hat{Y}(X)] P(Y = Y_k | X)\end{aligned}$$

# Teoría de la decisión estadística

- Es suficiente minimizar el coste esperado para cada  $x$

$$\hat{Y}(x) = \arg \min_y \sum_{i=1}^K L[Y_i, y] P(Y = Y_k | X = x)$$

- Con el coste 0/1

$$\hat{Y}(x) = \arg \min_y [1 - P(y | X = x)]$$

- Asignamos la clase con más probabilidad a posteriori.

# Teoría de la decisión estadística

- Hemos separado el problema de clasificación en dos partes
  1. **Inferencia**: usar datos de entrenamiento para encontrar  $P(Y = Y_k | X = x)$ .
  2. **Decisión**: usar las distribuciones a posteriori para tomar decisión óptima de clasificación (minimizar coste esperado, maximizar utilidad esperada...)
- Posibilidad alternativa: aprender directamente funciones que mapeen  $X$  en  $Y$ .

# Tres maneras de enfrentar los problemas de clasificación

1. *Modelos generativos*: tratan de modelizar  $P(Y, X)$  (Naive-Bayes).

- Permiten muestrear.
- Detección de outliers (si  $P(X)$  es pequeño).
- Más difícil (si  $X$  es de dimensión alta...).

2. *Modelos discriminativos*: tratan de modelizar  $P(Y|X)$  (Regresión logística).

- Si solo interesa clasificar: más fácil computacionalmente.

3. *Funciones discriminantes*: Aprenden funciones que mapean  $X$  en  $Y$  directamente (Perceptrón).

- No tenemos acceso a las probabilidades a posteriori cada vez que queramos tomar nuevas decisiones.
- Probabilidades a posteriori **muy útiles**: cambiamos frecuentemente función de coste, queremos tener opción de rechazo, combinar modelos, etc.

# Análisis Discriminante Lineal

# LDA

- Sea  $f_k(x)$  la densidad de probabilidad de  $x$  condicionada a la clase  $Y_k$ .
- Sea  $\pi_k$  el prior de la clase  $Y_k$ . Se tiene

$$P(Y = Y_k | X = x) = \frac{f_k(x)\pi_k}{\sum_{i=1}^K f_i(x)\pi_i}$$

- ¿Es este un modelo generativo, discriminativo o función discriminante?



# LDA

- Asumamos modelo Gaussiano para  $f_k(x)$

$$f_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma_k|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - \mu_k)^\top \Sigma_k^{-1} (x - \mu_k) \right]$$

- LDA: Asume que las clases tienen matriz de covarianza común  $\Sigma_k = \Sigma \forall k$ .
- Comparamos dos clases

$$\begin{aligned} \log \frac{P(Y = Y_k | x)}{P(Y = Y_j | x)} &= \log \frac{f_k(x)}{f_j(x)} + \log \frac{\pi_k(x)}{\pi_j(x)} \\ &= \log \frac{\pi_k(x)}{\pi_j(x)} - \frac{1}{2} (\mu_k + \mu_j)^\top \Sigma^{-1} (\mu_k + \mu_j) + x^\top \Sigma^{-1} (\mu_k - \mu_l) \end{aligned}$$

- Frontera de decisión lineal!!
- El hecho de que  $\Sigma$  no dependa de la clase causa la linealidad.

# LDA

- Vemos que asignar a  $X = x$  la clase con más probabilidad a posteriori es equivalente a asignar la clase con *función discriminante lineal*  $\delta_k(x)$  más grande

$$\delta_k(x) = x^\top \Sigma^{-1} \mu_k - \frac{1}{2} \mu_k^\top \Sigma^{-1} \mu_k + \log \pi_k$$

- Para estimar parámetros desconocidos, usamos datos de entrenamiento (MLE)

1.  $\hat{\pi}_k = N_k / N$
2.  $\hat{\mu}_k = \sum_{x_i | y_i = Y_k} x_i / N_k$
3.  $\hat{\Sigma} = \sum_{k=1}^K \sum_{x_i | y_i = Y_k} (x_i - \hat{\mu}_k)(x_i - \hat{\mu}_k)^\top / (N - K)$

# QDA

- Si no asumimos que las matrices de covarianza son independientes de las clases, llegamos al **Análisis Discriminante Cuadrático**.

$$\delta_k(x) = -\frac{1}{2}\log |\Sigma_k| - \frac{1}{2}(x - \mu_k)^\top \Sigma_k^{-1}(x - \mu_k) + \log \pi_k$$

- La frontera de decisión ahora es cuadrática.
- Para estimar parámetros desconocidos, usamos datos de entrenamiento (MLE)

1.  $\hat{\pi}_k = N_k/N$
2.  $\hat{\mu}_k = \sum_{x_i|y_i=Y_k} x_i / N_k$
3.  $\hat{\Sigma}_k = \sum_{x_i|y_i=Y_k} (x_i - \hat{\mu}_k)(x_i - \hat{\mu}_k)^\top / (N - K)$

# Análisis Discriminante Regularizado

- Compromiso entre LDA y QDA, regularizando la matriz de covarianza.

$$\hat{\Sigma}_k(\alpha) = \alpha \hat{\Sigma}_k + (1 - \alpha) \hat{\Sigma}$$

- $\alpha \in [0, 1]$  permite un continuo de modelos entre LDA y QDA.
- $\alpha$  suele escogerse usando validación cruzada, validación hold-out,...
- Otra posibilidad

$$\hat{\Sigma}_k(\gamma) = \gamma \hat{\Sigma} + (1 - \gamma) \sigma^2 \mathbf{I}$$

# Computación para LDA

- La computación se simplifica diagonalizando la matriz  $\hat{\Sigma}$ .
- Sea  $\hat{\Sigma} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\top$  la descomposición en autovalores de la matriz de covarianza.
- Para clasificar podemos:
  1. *Esferizar* los datos usando  $X^* = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{U}^\top X$ . Ahora la matriz de covarianza es la identidad.
  2. Clasificar una nueva instancia a la clase del centroide más cercano en el espacio transformado, modulo el efecto de los priors  $\pi_k$ .
  3. Esto es así pues podemos escribir la función discriminante como

$$\delta'_k(x) = -\frac{1}{2}(x - \mu_k)^\top \Sigma^{-1}(x - \mu_k) + \log \pi_k$$

# Regresión Logística y Optimización Estocástica

# Regresión logística (repaso)

- Clasificación binaria:

$$p(y = 1|x) = \sigma(w^\top x + b)$$

- Clasificación en  $M > 2$  clases: cambiar la función sigmoide  $\sigma$  por la **softmax**  $s : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ , definida como

$$s(z)_i = \frac{e^{z_i}}{\sum_{j=1}^M e^{z_j}}$$

donde  $z = Wx + B$ , con  $W \in \mathbb{R}^{M \times D}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ .

- Aprendizaje mediante mínimos cuadrados no lineales, descenso por el gradiente: los algoritmos vistos requieren acceso a la matriz  $X$  entera en cada iteración.
- ¿Qué hacer cuando  $X$  no cabe en memoria?

# Descenso por el gradiente (GD)

- Habitualmente se considera el problema de minimizar una función con la siguiente forma:

$$f(w) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(w)$$

(por ejemplo, al minimizar el error/pérdida promedio sobre la muestra de entrenamiento)

- Optimizamos iterando:

$$w^{t+1} = w^t - \eta \nabla_w f(w^t)$$

- Problema: complejidad  $\mathcal{O}(N)$



# Descenso por el gradiente estocástico (SGD)

- En cada iteración, barajamos los datos y escogemos **uno** al azar

$$w^{t+1} = w^t - \eta \nabla_w f_i(w^t)$$

- También podemos seleccionar un **minilote**  $\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_B\} \subset \{1, \dots, N\}$  al azar en cada iteración:

$$w^{t+1} = w^t - \eta \nabla_w \frac{1}{B} \sum_{i \in \mathcal{B}} f_i(w^t)$$

- La complejidad pasa de  $\mathcal{O}(N)$  a  $\mathcal{O}(B)$ , además, no es necesario tener toda la matriz  $X$ , sino solo los datos del minilote  $\mathcal{B}$ .
- Otra ventaja: mayor probabilidad de escapar óptimos locales que con GD: un punto estacionario de la función objetivo en GD no lo será en SGD generalmente.

# Propiedades del SGD

- *Ejercicio: demostrar que el estimador por minilotes es **insesgado**.*

# Nuevos desarrollos desde SGD

## Momentum

Ayuda a amortiguar las oscilaciones que hacen que SGD sea lento.

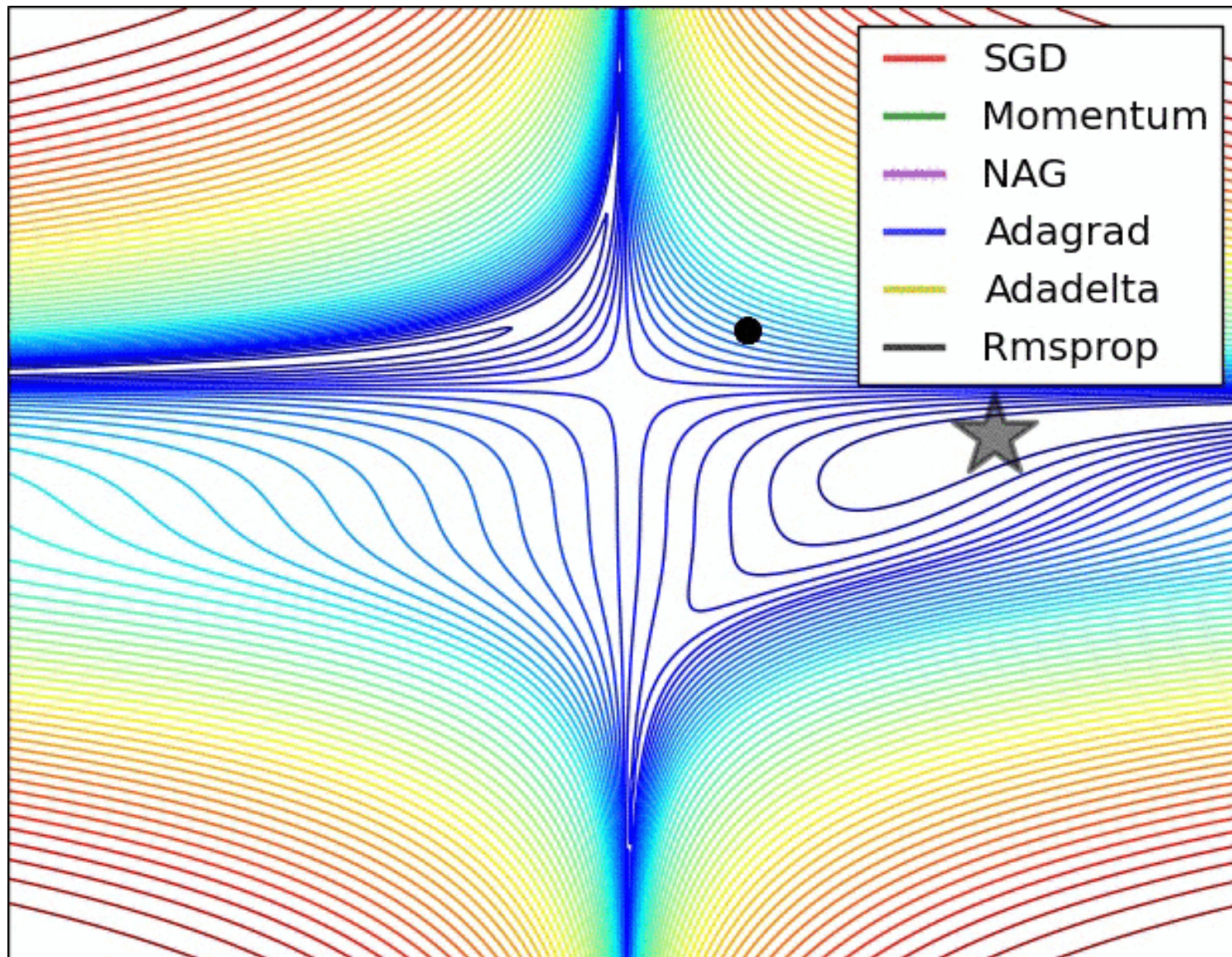
$$\begin{aligned}w^{t+1} &= w^t - v^{t+1} \\v^{t+1} &= \gamma v^t + \eta \nabla_w f_i(w^t)\end{aligned}$$

## AdaGrad

Adapta la tasa de aprendizaje a cada parámetro, disminuyéndola en parámetros con actualizaciones frecuentes (resp. aumentándola en parámetros con actualizaciones infrecuentes). Por esta razón, es adecuado para matrices de datos dispersas.

$$w_j^{t+1} = w_j^t - \frac{\eta}{\sqrt{G_{j,j}^t + \epsilon}} \nabla_w f_i(w^t)_j$$

**Adam (lo veremos en Aprendizaje Profundo)**



# SGD con datos dispersos

- Caso real: recomendación de películas a usuarios. Las observaciones son del tipo  $(id\_usuario, id\_pelicula, rating)$
- Los identificadores son variables categóricas (factor). Por ejemplo, asumiendo 50.000 usuarios:

$$id\_usuario = 24678 \rightarrow (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{50000}$$

- Esto produce una explosión en el número de variables dummy necesarias: riesgo de que **no quepa en memoria** la matriz de datos dummies.
- Solución: trabajar directamente sin dummificar, usando librerías especializadas como Vowpal Wabbit (Microsoft): [https://github.com/VowpalWabbit/vowpal\\_wabbit](https://github.com/VowpalWabbit/vowpal_wabbit)
- SGD (o variantes) solo actualizarán el peso correspondiente, ignorando los que tendrían el dummy a 0.

# Feature hashing trick

- En muchas ocasiones, las variables categóricas están representadas como **cadena alfanuméricas**.
- Ejemplo en datos de ad-server: un identificador de un cookie es **76c24efd-ec42-492a-92df-c62cfd4540a3**.
- ¿Cómo lo convertimos a un índice entero de forma eficiente?
- Solución: usar una **función de hash** sobre la representación en binario de la cadena

$$\mathcal{H} : \{0, 1\}^D \rightarrow \{0, 1\}^d$$

- donde  $d < D$ . Típicamente  $d$  se toma entre 15 y 30.
- Por ejemplo,  $\mathcal{H}(76c24efd-ec42-492a-92df-c62cfd4540a3) = 65538$
- El algoritmo de optimización solo hace la computación para actualizar el peso  $w_{65538}$

# Interacciones y Máquinas de Factorización (FMs)

# Fm's - Problema

- ¿Cómo modelizar interacciones cuando nos enfrentamos a variables categóricas con número alto de categorías?
- **Una** variable con  $K + 1$  categorías  $\rightarrow \binom{K}{2}$  interacciones a pares. Explota rápido...
- Número medio de valores distintos de cero en los vectores de variables predictoras mucho menor que su dimensión.
- Datos muy dispersos (sparse)! No hay datos suficientes para estimar interacciones complejas de manera independiente...



# FM's - Idea

- El modelo de una FM de grado 2 (solo interacciones a pares)

$$\hat{y}(x) := \sigma \left[ \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i x_i \sum_{i=1}^p \sum_{j=i+1}^p \langle v_i, v_j \rangle x_i x_j \right]$$

- Donde los parámetros a estimar son

$$\omega_0 \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^p, \quad \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{p \times k}$$

- $k$  es la dimensión latente!  $\langle v_i, v_j \rangle$  es un producto escalar

$$\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{f=1}^k v_{i,f} v_{j,f}$$

- Reducimos número de parámetros de  $1 + p + \frac{p(p-1)}{2}$  a  $1 + p + kp$ .

# FM's - Intuición y computación

- Con datos sparse, no hay datos suficientes para estimar todas las interacciones de manera independiente.
- Las FMs pueden estimar interacciones incluso en este contexto porque rompen la independencia entre los parámetros de las interacciones, factorizándolos.
- Los datos de una interacción ayudan a estimar los parámetros de otras interacciones relacionadas.
- La complejidad de computar el modelo de FMs es  $\mathcal{O}(kp^2)$ , pues hay que computar todas las interacciones!
- Se puede reducir esta complejidad a  $\mathcal{O}(kp)$  (tiempo lineal) !!
- Fácil de probar: S. Rendle **Factorization Machines**

# Clasificador Naive-Bayes

# Clasificador NB

- Sea  $f_k(x)$  la densidad de probabilidad de  $x$  condicionada a la clase  $Y_k$ .
- Sea  $\pi_k$  el prior de la clase  $Y_k$ . Se tiene

$$P(Y = Y_k | X = x) = \frac{f_k(x)\pi_k}{\sum_{i=1}^K f_i(x)\pi_i}$$

- El modelo NB asume que las variables predictoras son **condicionalmente independientes** dada la clase. O lo que es lo mismo

$$f_k(X) = \prod_{j=1}^p f_{kj}(X_j)$$

- Esto en general no es cierto...

# Clasificador NB

- ...pero simplificar tremendamente la estimación, cada marginal  $f_{kj}$  puede ser estimada por separado.
- Especialmente apropiado cuando la dimensión  $p$  es grande (pues la estimación de densidad se vuelve inviable).
- También cuando el vector de variables predictoras contiene variables discretas y continuas (pues cada una se modeliza por separado).
- Aunque la hipótesis es fuerte, el modelo puede funcionar porque la frontera de decisión puede "no sentir" detalles de las densidades condicionadas a la clase.
- Podemos ver que es la frontera de decisión la conforma una combinación lineal de funciones de cada variable predictora

$$\begin{aligned}\log \frac{P(Y = Y_k|x)}{P(Y = Y_j|x)} &= \log \frac{f_k(x)}{f_j(x)} + \log \frac{\pi_k(x)}{\pi_j(x)} \\ &= \log \frac{\pi_k(x)}{\pi_j(x)} + \sum_{i=1}^p \log \frac{f_{ki}(x_i)}{f_{ji}(x_i)} \\ &= \log \frac{\pi_k(x)}{\pi_j(x)} + \sum_{i=1}^p g_{lji}(x_i)\end{aligned}$$

# Clasificador NB en la práctica - estimación de parámetros

- Los parámetros se estima usando máxima verosimilitud con los datos de entrenamiento.
- Para **variables predictoras continuas** - NB Gaussiano

$$P(X_i = x_i | Y = Y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ki}^2}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_{ki})^2}{2\sigma_{ki}^2}\right]$$

# Clasificador NB en la práctica - estimación de parámetros

- Para **variables predictoras que son cuentas** - Versión suavizada de máxima verosimilitud con modelo multinomial
- Un vector de variables predictoras es un histograma con  $x_i$  el número de veces que sucede el evento  $i$ .

$$P(X_i = x|Y = Y_k) = \frac{N_{ki} + \alpha}{N_k + \alpha p}$$

- $N_{ki}$  es el número total de cuentas del evento  $i$  en la clase  $k$  y  $N_k$  es el número total de cuentas en la clase  $k$ .
- $\alpha$  se puede interpretar como prior, evita probabilidades 0.  $\alpha = 1$  *Laplace smoothing*.  
 $\alpha < 1$  *Lidstone smoothing*.

# Clasificador NB en la práctica - estimación de parámetros

- Para **variables predictoras categóricas** - MLE con modelo Bernoulli multivariante.
- Cada variable predictora es un booleano,  $x_i \in \{0, 1\}$ .

$$P(X_i = x | Y = Y_k) = \frac{\sum_{j=1}^N I(X_i = x) * I(Y = Y_k)}{\sum_{j=1}^N I(Y = Y_k)}$$



# k Vecinos Más Próximos (k-NN)

# Fundamentos

- k-NN es un algoritmo robusto y versátil que suele usarse como base antes de modelos más complejos.
- Es de tipo **supervisado**: aprende una función  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , donde  $\mathcal{Y}$  puede ser discreto (clasificación) o continuo (regresión).
- Es **no paramétrico**: no hace ninguna suposición acerca de la estructura de  $h$  (por ejemplo, que sea lineal,  $h(x) = w^\top x$ ). Esto ayuda para prevenir errores de modelización.
- El aprendizaje es **basado en instancias**: en lugar de aprender parámetros, **memoriza** los datos de entrenamiento, que serán usados directamente como *conocimiento* para la fase de inferencia.
- En consecuencia: solo al predecir sobre datos de test el algoritmo usa los datos de entrenamiento.

# Algoritmo

## (Pre)entrenamiento

1. Almacenar el dataset de entrenamiento  $\mathcal{D}_{tr}$ .
2. Especificar una función de distancia  $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$

## Predicción

1. Dado una instancia de test  $x_0$ , encontrar los  $k$  puntos  $\{x_{(1)}, \dots, x_{(k)}\} := \mathcal{A} \subset \mathcal{D}_{tr}$  más cercanos a  $x_0$  según  $d$ .
2. La clase predicha será la **mayoritaria** de las clases de los elementos en  $\mathcal{A}$ , es decir,

$$P(y = j | x_0) = \frac{1}{k} \sum_{i \in \mathcal{A}} I(y_{(i)} = j)$$

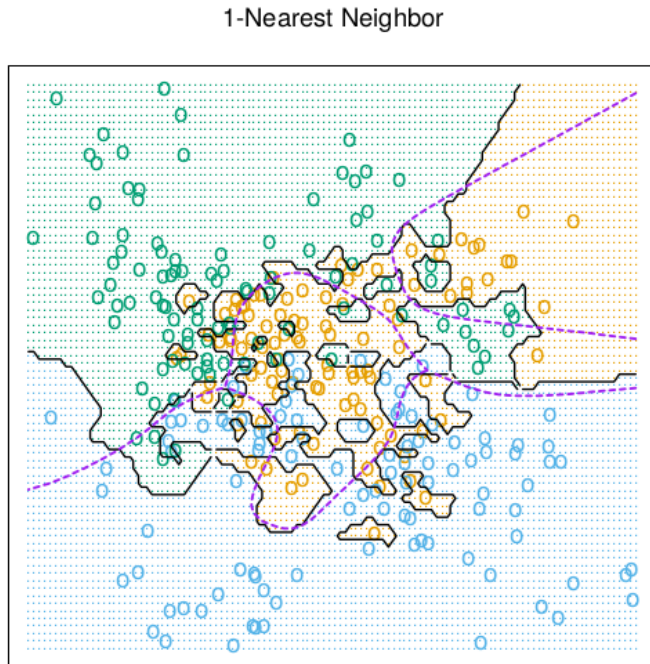
donde  $I$  es la función indicatriz.

# Funciones de distancia

- Supongamos  $x_1, x_2 \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^D$ .
- **Distancia L1:**  $d_1(x_1, x_2) = \sum_{d=1}^D |x_{1,d} - x_{2,d}|$ .
- **Distancia L2:**  $d_2(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{d=1}^D (x_{1,d} - x_{2,d})^2}$ .
- **L1 vs L2:** la L2 penaliza mucho más puntos alejados que la L1.
- ¡Es conveniente estandarizar las variables a media 0 y varianza 1 ya que pueden estar en distintas escalas!

# El hiperparámetro $k$

- Intuitivamente, aumentar  $k$  tiende a suavizar la frontera de decisión, es decir, el clasificador es más resistente a outliers.

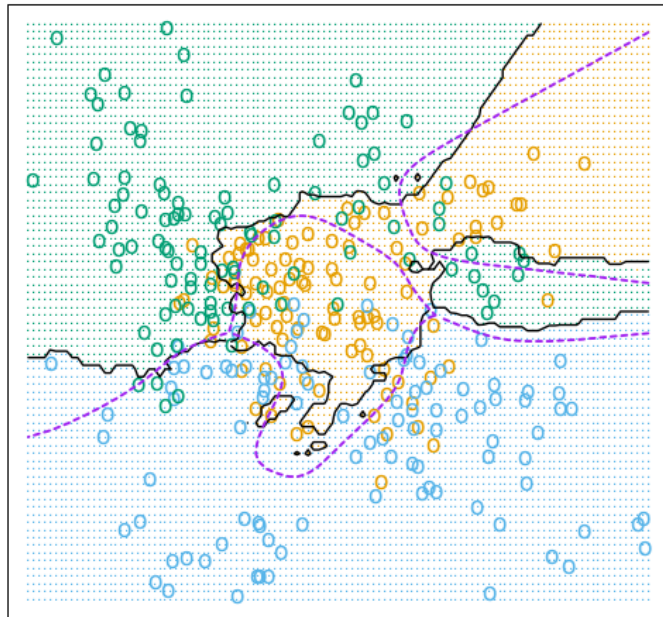


*Fuente:* Elements of Statistical Learning

# El hiperparámetro $k$

- Intuitivamente, aumentar  $k$  tiende a suavizar la frontera de decisión, es decir, el clasificador es más resistente a outliers.

15-Nearest Neighbors



*Fuente:* Elements of Statistical Learning

# Ventajas

- Sencillo y válido para regresión y clasificación multiclase (no solo binaria).
- **No hace suposiciones** sobre la estructura de los datos.

# Inconvenientes

- Predicción **muy costosa en tiempo**: en la mayoría de las aplicaciones, interesa que la predicción sea rápida y el entrenamiento lento.
- Necesario almacenar todo el dataset de entrenamiento.
- En **alta dimensión**, las distancias no son intuitivas.

# Propiedades asintóticas

- **Ejercicio:** probar que a medida que el número de observaciones de entrenamiento  $N \rightarrow \infty$ , 1-NN tiene una tasa de error que no será peor que el doble la tasa de error de Bayes.



# En la práctica: resumen

- Preprocesar los datos: estandarizar.
- Si los datos tienen mucha dimensionalidad, considera utilizar técnicas de reducción de dimensionalidad.
- Validar en el hiperparámetro  $k$  y la distancia  $d$ .
- Si tiempo es crítico, considerar usar variantes aproximadas:  
<https://github.com/eddelbuettel/rcppannoy>

# Métricas para clasificación

# Problema

- La **tasa de acierto** (accuracy) no basta en problemas con clases poco equilibradas.
- Caso real: predicción de CTR (**click-through rate**, click 1, no click 0).
- Alrededor de  $10^8$  anuncios (observaciones), de los cuales clicks solo 80.000 clicks.
- Un modelo que clasifique siempre 0, obtiene una tasa de acierto del **99.92 %**...

# Calidad modelos clasificación

		Predicted class	
		<i>P</i>	<i>N</i>
Actual Class	<i>P</i>	True Positives (TP)	False Negatives (FN)
	<i>N</i>	False Positives (FP)	True Negatives (TN)

Medidas:

- Tasa de acierto:  $\frac{TP+TN}{P+N}$
- Sensitividad, recall, TPR:  $\frac{TP}{TP+FN}$
- Especificidad, TNR:  $\frac{TN}{TN+FP}$
- Precisión, PPV:  $\frac{TP}{TP+FP}$
- F1-score:  $2 \times \frac{PPV \times TPR}{PPV + TPR}$

Tutorial muy extenso: <http://people.cs.bris.ac.uk/~flach/ICML04tutorial/>

(Análisis ROC, generalizaciones a clasificación n-aria,...)