



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Notas de Aula ET76C– Eletrônica de Potência

Qualidade de Energia, distorção harmônica, filtros
passivos e ativos para redução da distorção
harmônica;

Autor:

Prof. Adriano RUSELER, Dr. Eng.

Semestre:

2017/2

Curitiba, 9 de novembro de 2017.

Sumário

Introdução	3
1 Exemplos de comandos	4
1.1 Exemplo de equação	4
1.2 Exemplo de tabela	4
1.3 Inserindo código fonte	4
1.4 Figuras	5
2 Axiomas ou postulados	6
3 Teorema	6
3.1 Terminologia	6
3.2 Conjectura ou hipótese	7
3.3 Lema	7
3.4 Recuo do ambiente <code>citacao</code>	8
4 Mais exemplos no Modelo Canônico de Trabalhos Acadêmicos . . .	9
5 Consulte o manual da classe <code>abntex2</code>	9
Considerações finais	9
 Referências	 11
A Relações Trigonométricas	12
1 Deslocamentos Angulares	12
1.1 Deslocamento de 90 graus	12
1.2 Deslocamento de 180 graus	12
1.3 Deslocamento de 360 graus	12
2 Relações de soma e subtração	13
3 Ângulo duplo	13
4 Ângulo Triplo	13
5 Meio ângulo	14
6 Redução de Potência	14
7 Produto para soma	15
8 Soma para Produto	15

Introdução

Este documento e seu código-fonte são exemplos de referência de uso da classe `abntex2` e do pacote `abntex2cite`. O documento exemplifica a elaboração de publicação periódica científica impressa produzida conforme a ABNT NBR 6022:2003 *Informação e documentação - Artigo em publicação periódica científica impressa - Apresentação*.

A expressão “Modelo canônico” é utilizada para indicar que `abnTEX2` não é modelo específico de nenhuma universidade ou instituição, mas que implementa tão somente os requisitos das normas da ABNT. Uma lista completa das normas observadas pelo `abnTEX2` é apresentada em Araujo (2015a).

Sinta-se convidado a participar do projeto `abnTEX2`! Acesse o site do projeto em <http://www.abntex.net.br/>. Também fique livre para conhecer, estudar, alterar e redistribuir o trabalho do `abnTEX2`, desde que os arquivos modificados tenham seus nomes alterados e que os créditos sejam dados aos autores originais, nos termos da “The L^AT_EX Project Public License”¹.

Encorajamos que sejam realizadas customizações específicas deste documento. Porém, recomendamos que ao invés de se alterar diretamente os arquivos do `abnTEX2`, distribua-se arquivos com as respectivas customizações. Isso permite que futuras versões do `abnTEX2` não se tornem automaticamente incompatíveis com as customizações promovidas. Consulte Araujo (2015b) par mais informações.

Este exemplo deve ser utilizado como complemento do manual da classe `abntex2` (ARAÚJO, 2015a), dos manuais do pacote `abntex2cite` (ARAÚJO, 2015d; ARAÚJO, 2015e) e do manual da classe `memoir` (WILSON; MADSEN, 2010). Consulte o Araujo (2015c) para obter exemplos e informações adicionais de uso de `abnTEX2` e de L^AT_EX.

¹ <http://www.latex-project.org/lppl.txt>

1 Exemplos de comandos

1.1 Exemplo de equação

Para a obtenção da corrente de carga é recomendável o emprego da Série de Fourier. Decompondo-se a tensão obtém-se a expressão (1.1).

$$v_L(\omega t) = \sqrt{2}V_2 \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos(2\omega t) - \frac{4}{15\pi} \cos(4\omega t) - \dots \right] \quad (1.1)$$

1.2 Exemplo de tabela

Table 1.1 shows the dc voltage distribution between each bus capacitor for different load conditions. As the load increases the system becomes more balanced due to increased of real power processed and decrease of reactive power exchanged.

Tabela 1.1 – Bus capacitor voltage and inverter output current at no load (#0), one load step (#1), two load step (#2) and three load step (#3) conditions.

	Phase A			Phase B			Phase C		
	W_{a1}	W_{a2}	W_{a3}	W_{b1}	W_{b2}	W_{b3}	W_{c1}	W_{c2}	W_{c3}
$V_{RMS\#0}[V]$	377.47	395.33	417.42	378.45	394.80	416.93	419.27	395.06	375.74
$I_{RMS\#0}[A]$	2.18	2.30	3.51	2.12	2.48	3.46	3.54	2.33	2.17
$V_{RMS\#1}[V]$	393.00	396.58	413.86	392.65	398.69	412.04	413.92	395.06	375.74
$I_{RMS\#1}[A]$	2.47	2.52	3.45	2.46	2.48	3.42	3.47	2.48	2.42
$V_{RMS\#2}[V]$	392.21	394.49	408.76	392.63	397.45	405.32	408.52	398.12	389.40
$I_{RMS\#2}[A]$	2.68	2.67	3.72	2.66	2.70	3.59	3.67	2.70	2.62
$V_{RMS\#3}[V]$	389.67	391.57	401.79	394.47	398.27	412.04	401.66	394.99	386.27
$I_{RMS\#3}[A]$	3.01	3.00	3.96	3.02	3.80	3.42	3.87	3.00	2.90

1.3 Inserindo código fonte

Código-fonte 1 – Leitura dos dados simulados e conversão para estados topológicos.

```
% Pré definições iniciais
nsüb=3; % Numero de Sunmódulos
nbits=2*nsüb; % Numero de bits necessários para representar os estados
nlevels=2*nsüb+1; % Numero total de níveis

% Leitura dos pontos gerados por simulação
time=data(1,:)'; % extrai vetor de tempo
PWM=lógicoal(data(2:end,:))'; % Conversão dos pulsos PWM para estados lógicos

% Cria vetor de string binário com os estados correspondentes
binstates=núm2str([PWM(:,1) PWM(:,3) PWM(:,5) PWM(:,7) PWM(:,9)
    PWM(:,11)]);
state=fi(bin2dec(binstates),0,nbits,0); % Objeto numérico de ponto-fixado
```

1.4 Figuras

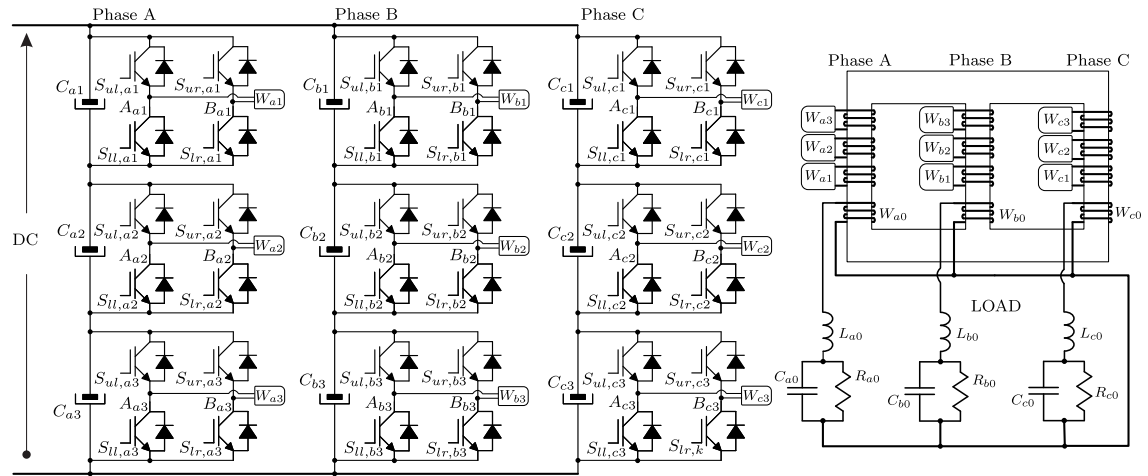


Figura 1.1 – Conexão utilizada ao se empregar um transformador.

2 Axiomas ou postulados

Na lógica tradicional, um axioma ou postulado é uma sentença ou proposição que não é provada ou demonstrada e é considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. Por essa razão, é aceito como verdade e serve como ponto inicial para dedução e inferências de outras verdades (dependentes de teoria).

Na matemática, um axioma é uma hipótese inicial de qual outros enunciados são logicamente derivados. Pode ser uma sentença, uma proposição, um enunciado ou uma regra que permite a construção de um sistema formal. Diferentemente de teoremas, axiomas não podem ser derivados por princípios de dedução e nem são demonstráveis por derivações formais, simplesmente porque eles são hipóteses iniciais. Isto é, não há mais nada a partir do que eles seguem logicamente (em caso contrário eles seriam chamados teoremas). Em muitos contextos, "axioma", "postulado" e "hipótese" são usados como sinônimos.

Axioma 0.1 (Axioma de Igualdade). *Supondo \mathfrak{L} , uma linguagem de primeira ordem. para cada variável x , a fórmula $x = x$ é universalmente válida.*

Postulado 0.1 (Postulado de Igualdade). *Supondo \mathfrak{L} , uma linguagem de primeira ordem. para cada variável x , a fórmula $x = x$ é universalmente válida.*

3 Teorema

Na matemática, um teorema é uma afirmação que pode ser provada como verdadeira através de outras afirmações já demonstradas, como outros teoremas, juntamente com afirmações anteriormente aceitas, como axiomas. Prova é o processo de mostrar que um teorema está correto. O termo teorema foi introduzido por Euclides, em Elementos, para significar "afirmação que pode ser provada". Em grego, originalmente significava "espetáculo" ou "festa". Atualmente, é mais comum deixar o termo "teorema" apenas para certas afirmações que podem ser provadas e de grande "importância matemática", o que torna a definição um tanto subjetiva.

Teorema 0.1 (Teorema de Pitágoras). *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

3.1 Terminologia

Usualmente deixa-se o termo “teorema” apenas para as afirmações que podem ser provadas de grande importância. Assim, são dados outros nomes para os outros tipos dessas afirmações:

Proposição: Uma Proposição é uma sentença não associada a algum outro teorema, de simples prova e de importância matemática menor.

Lema: Um Lema é um "pré-teorema", um teorema que serve para ajudar na prova de outro teorema maior. A distinção entre teoremas e lemas é um tanto quanto arbitrária, uma vez que grandes resultados são usados para provar outros. Por exemplo, o Lema de Gauss e o Lema de Zorn são muito interessantes de per se, e muitos autores os denominam de Lemas, mesmo que não os usem para provar alguma outra coisa.

Corolário: Um Corolário é uma consequência direta de outro teorema ou de uma definição, muitas vezes tendo suas demonstrações omitidas, por serem simples.

Corolário 0.1.1. *Em qualquer triângulo retângulo, a hipotenusa é maior que qualquer um dos catetos, mas menor que a soma deles.*

Alguns outros termos também são usados, por mais que raros e com definição menos rigorosa, basicamente sendo usadas quando não se quer usar a palavra "teorema":

Regra. Lei, que também pode se referir a axiomas, regras de dedução e a distribuições de Probabilidade. Princípio. Algoritmo (como em Algoritmo da Divisão), muito raro e diferente do conceito com o mesmo nome que é um dos estudos centrais da Ciência da Computação. Paradoxo, usado quando a afirmação vai aparentemente de encontro com alguma outra verdade ou com alguma noção intuitiva. Entretanto, tal termo também pode ser usado para afirmações falsas que aparentemente ser verdadeiras em um primeiro momento.

Alguns teoremas continuam a ser chamados de Conjecturas logo após serem provados (por exemplo, a Conjectura de Poincaré). O termo conjectura é usado para afirmações que não se sabe se são verdadeiras, e que acredita-se que são verdadeiras, mas nunca ninguém conseguiu prová-las nem negá-las (às vezes conjecturas são chamadas de hipóteses (como em Hipótese de Riemann), obviamente, num sentido diferente do aqui já descrito).

3.2 Conjectura ou hipótese

Uma conjectura é uma ideia, fórmula ou frase, a qual não foi provada ser verdadeira, baseada em suposições ou ideias com fundamento não verificado. As conjecturas utilizadas como prova de resultados matemáticos recebem o nome de hipóteses.

Conjectura 0.1 (Conjectura dos primos gêmeos). *Existem infinitos números primos gêmeos.*

Um par de primos é chamado de primos gêmeos se eles são dois números primos p, q tais que $q = p + 2$.

3.3 Lema

Na Matemática, um lema é um teorema que é usado como um passo intermediário para atingir um resultado maior, provado em outro teorema. Normalmente o

lema tem pouca serventia além de servir ao propósito do teorema que o utiliza, mas isto não é uma regra, e a classificação entre lemas e teoremas é arbitrária².

Lema 0.2. *Given two line segments whose lengths are a and b respectively there is a real number r such that $b = ra$.*

Unnumbered theorem-like environments are also possible.

Observação. This statement is true, I guess.

And the next is a somewhat informal definition

Definição 3.1 (Fibration). A fibration is a mapping between two topological spaces that has the homotopy lifting property for every space X .

Exemplo 3.1 (Fibration). A fibration is a mapping between two topological spaces that has the homotopy lifting property for every space X .

Exercício 3.1. Este é um exercício

Exercício 3.2. Mais um exercício para vocês...

Condição 3.1 (Fibration). A fibration is a mapping between two topological spaces that has the homotopy lifting property for every space X .

Theorem styles

definition boldface title, romand body. Commonly used in definitions, conditions, problems and examples.

plain boldface title, italicized body. Commonly used in theorems, lemmas, corollaries, propositions and conjectures.

remark italicized title, romman body. Commonly used in remarks, notes, annotations, claims, cases, acknowledgments and conclusions.

3.4 Recuo do ambiente citacao

Na produção de artigos (opção `article`), pode ser útil alterar o recuo do ambiente `citacao`. Nesse caso, utilize o comando:

```
\setlength{\ABNTEXcitacaorecuo}{1.8cm}
```

Quando um documento é produzido com a opção `twocolumn`, a classe `abntex2` automaticamente altera o recuo padrão de 4 cm, definido pela ABNT NBR 10520:2002 seção 5.3, para 1.8 cm.

² Wikipédia

4 Mais exemplos no Modelo Canônico de Trabalhos Acadêmicos

Este modelo de artigo é limitado em número de exemplos de comandos, pois são apresentados exclusivamente comandos diretamente relacionados com a produção de artigos.

Para exemplos adicionais de `abnTEX2` e `LATEX`, como inclusão de figuras, fórmulas matemáticas, citações, e outros, consulte o documento Araujo (2015c).

5 Consulte o manual da classe `abntex2`

Consulte o manual da classe `abntex2` (ARAUJO, 2015a) para uma referência completa das macros e ambientes disponíveis.

Considerações finais

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Do-

nec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Referências

- ARAUJO, L. C. *A classe abntex2: Modelo canônico de trabalhos acadêmicos brasileiros compatível com as normas ABNT NBR 14724:2011, ABNT NBR 6024:2012 e outras*. [S.l.], 2015. Disponível em: <<http://www.abntex.net.br/>>. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 9.
- ARAUJO, L. C. *Como customizar o abnTeX2*. 2015. Wiki do abnTeX2. Disponível em: <<https://github.com/abntex/abntex2/wiki/ComoCustomizar>>. Acesso em: 27 abr 2015. Citado na página 3.
- ARAUJO, L. C. *Modelo Canônico de Trabalho Acadêmico com abnTeX2*. [S.l.], 2015. Disponível em: <<http://www.abntex.net.br/>>. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 9.
- ARAUJO, L. C. *O pacote abntex2cite: Estilos bibliográficos compatíveis com a ABNT NBR 6023*. [S.l.], 2015. Disponível em: <<http://www.abntex.net.br/>>. Citado na página 3.
- ARAUJO, L. C. *O pacote abntex2cite: tópicos específicos da ABNT NBR 10520:2002 e o estilo bibliográfico alfabético (sistema autor-data)*. [S.l.], 2015. Disponível em: <<http://www.abntex.net.br/>>. Citado na página 3.
- WILSON, P.; MADSEN, L. *The Memoir Class for Configurable Typesetting - User Guide*. Normandy Park, WA, 2010. Disponível em: <<http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/memoir/memman.pdf>>. Acesso em: 19 dez. 2012. Citado na página 3.

APÊNDICE A – Relações Trigonométricas

1 Deslocamentos Angulares

1.1 Deslocamento de 90 graus

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = +\cos\theta \quad (1.1)$$

$$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta \quad (1.2)$$

$$\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\cot\theta \quad (1.3)$$

$$\csc(\theta + \frac{\pi}{2}) = +\sec\theta \quad (1.4)$$

$$\sec(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\csc\theta \quad (1.5)$$

$$\cot(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\tan\theta \quad (1.6)$$

1.2 Deslocamento de 180 graus

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta \quad (1.7)$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta \quad (1.8)$$

$$\tan(\theta + \pi) = +\tan\theta \quad (1.9)$$

$$\csc(\theta + \pi) = -\csc\theta \quad (1.10)$$

$$\sec(\theta + \pi) = -\sec\theta \quad (1.11)$$

$$\cot(\theta + \pi) = +\cot\theta \quad (1.12)$$

1.3 Deslocamento de 360 graus

$$\sin(\theta + 2\pi) = +\sin\theta \quad (1.13)$$

$$\cos(\theta + 2\pi) = +\cos\theta \quad (1.14)$$

$$\tan(\theta + 2\pi) = +\tan\theta \quad (1.15)$$

$$\csc(\theta + 2\pi) = +\csc\theta \quad (1.16)$$

$$\sec(\theta + 2\pi) = +\sec\theta \quad (1.17)$$

$$\cot(\theta + 2\pi) = +\cot\theta \quad (1.18)$$

2 Relações de soma e subtração

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (2.1)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (2.2)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad (2.3)$$

$$\arcsin \alpha \pm \arcsin \beta = \arcsin \left(\alpha \sqrt{1 - \beta^2} \pm \beta \sqrt{1 - \alpha^2} \right) \quad (2.4)$$

$$\arccos \alpha \pm \arccos \beta = \arccos \left(\alpha \beta \mp \sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)} \right) \quad (2.5)$$

$$\arctan \alpha \pm \arctan \beta = \arctan \left(\frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha \beta} \right) \quad (2.6)$$

3 Ângulo duplo

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (3.1)$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (3.2)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad (3.3)$$

$$\cot 2\theta = \frac{\cot^2 \theta - 1}{2 \cot \theta} \quad (3.4)$$

4 Ângulo Triplo

$$\sin 3\theta = -\sin^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin \theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta \quad (4.1)$$

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad (4.2)$$

$$\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} \quad (4.3)$$

$$\cot 3\theta = \frac{3 \cot \theta - \cot^3 \theta}{1 - 3 \cot^2 \theta} \quad (4.4)$$

5 Meio ângulo

$$\sin \frac{\theta}{2} = \operatorname{sgn} \left(2\pi - \theta + 4\pi \left\lfloor \frac{\theta}{4\pi} \right\rfloor \right) \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad (5.1)$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad (5.2)$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{sgn} \left(\pi + \theta + 4\pi \left\lfloor \frac{\pi - \theta}{4\pi} \right\rfloor \right) \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad (5.3)$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad (5.4)$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \csc \theta - \cot \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad (5.5)$$

$$\tan \frac{\eta + \theta}{2} = \frac{\sin \eta + \sin \theta}{\cos \eta + \cos \theta} \quad (5.6)$$

$$\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \sec \theta + \tan \theta \quad (5.7)$$

$$\sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}} = \frac{1 - \tan(\theta/2)}{1 + \tan(\theta/2)} \quad (5.8)$$

$$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\tan \theta}{1 + \sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.9)$$

$$\cot \frac{\theta}{2} = \csc \theta + \cot \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \quad (5.10)$$

6 Redução de Potência

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (6.1)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (6.2)$$

$$\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1 - \cos 4\theta}{8} \quad (6.3)$$

$$\sin^3 \theta = \frac{3\sin \theta - \sin 3\theta}{4} \quad (6.4)$$

$$\cos^3 \theta = \frac{3\cos \theta + \cos 3\theta}{4} \quad (6.5)$$

$$\sin^3 \theta \cos^3 \theta = \frac{3\sin 2\theta - \sin 6\theta}{32} \quad (6.6)$$

7 Produto para soma

$$2 \cos \theta \cos \varphi = \cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi) \quad (7.1)$$

$$2 \sin \theta \sin \varphi = \cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi) \quad (7.2)$$

$$2 \sin \theta \cos \varphi = \sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi) \quad (7.3)$$

$$2 \cos \theta \sin \varphi = \sin(\theta + \varphi) - \sin(\theta - \varphi) \quad (7.4)$$

$$\tan \theta \tan \varphi = \frac{\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)}{\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)} \quad (7.5)$$

8 Soma para Produto

$$\sin \theta \pm \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta \pm \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta \mp \varphi}{2} \right) \quad (8.1)$$

$$\cos \theta + \cos \varphi = 2 \cos \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) \quad (8.2)$$

$$\cos \theta - \cos \varphi = -2 \sin \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) \quad (8.3)$$

$$(8.4)$$