Appunti di interazioni fondamentali

Adriano Del Vincio

February 6, 2022

0.1 Introduzione

Questa è una raccolta di appunti tratta dalle lezioni del corso di interazioni fondamentali del professore Francesco Forti. L'intento è quello di seguire lo stile del corso in modo fedele. Tuttavia, di tanto in tanto, è presente qualche approfondimento. Tale caso sarà opportunamente segnalato con il simbolo * ; il lettore potrà considerare tali argomenti facoltativi ad una prima lettura. Nelle note sono presentati anche una serie di esercizi svolti, tratti dalle esercitazioni del professore Giovanni Signorelli. Gli argomenti sono divisi in moduli. I primi due riguardano esperimenti di fisica delle alte energie e cenni di rivelazione delle particelle. Nel modulo 2 si richiamano alcuni concetti di cinematica relativistica, si introduce lo spazio delle fasi e l'equazione di Dirac. ...

Contents

Modulo 2

0.2 Richiami di cinematica relativistica

Le leggi di trasformazione da un sistema di riferimento (s.r) che si muove con velocitá β rispetto ad un altro sistema, lungo l'asse z, in relatività ristretta, sono le trasformazioni di Lorentz :

$$\begin{cases} ct^{'} = \gamma(ct - \beta z) \\ x^{'} = x \\ y^{'} = y \\ z^{'} = \gamma z - \beta\gamma ct \end{cases}$$

Per un generico *boost* lungo una direzione qualunque specificata da $\beta = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ è più comodo utilizzare la seguente forma vettoriale :

$$\begin{cases} \frac{E^{'}}{c} = \gamma(\frac{E}{c} - \vec{\beta} \cdot \vec{p}) \\ \vec{p^{'}} = (\gamma - 1)\dfrac{(\vec{p} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta}}{\beta^2} + \vec{p} - \beta\gamma\frac{E}{c} \end{cases}$$

Ricordiamo anche come cambia il concetto di simultaneità e contrazione delle lunghezze. Se abbiamo due eventi separati in un certo s.r con intervallo Δt, in un altro sistema di riferimento con velocità β osserviamo $c\Delta t^{'} = \gamma c\Delta t - \beta\gamma\Delta z$. Quindi due eventi che avvengono simultaneamente in un sistema di riferimento, e sono separati spazialmente con distanza Δz, non sono simultanei in un altro sistema di riferimento che si muove con velocità β rispetto al primo. Per la contrazione, dati due eventi nello spazio tempo con coordinate lungo l'asse z pari a Z_a, Z_b in $O^{'}$, in un altro sistema O che si muove rispetto al primo con velocità β si ha $Z_a^{'} = \gamma Z_a$ e $Z_b^{'} = \gamma Z_b$. Perciò le distanza sono $\Delta Z^{'} = \gamma\Delta Z$ ovvero $\Delta Z = \frac{L}{\gamma}$. A questo punto è utile introdurre le formule di addizione delle velocità, ricavabili a partire dalle trasformazioni lungo z viste prima. Sapendo che in un sistema $S^{'}$ una particella si muove lungo z con velocità $u^{'}$, in un sistema S un osservatore vedrà la particella muoversi con velocità:

$$u_z = \frac{\Delta Z}{\Delta t} = \frac{\gamma(\Delta Z^{'} + \beta c\Delta t^{'})}{\gamma(c\Delta t^{'} + \beta\gamma\Delta z^{'})} = \frac{\frac{u^{'}}{c} + \beta}{1 + \frac{u^{'}}{c}\beta} \tag{1}$$

Un altro risultato da tenere a mente: per una particella con vita media τ e con velocità β, si può ottenere il tempo di volo nel sistema di laboratorio semplicemente come $t = \gamma\tau$, mentre l'ampiezza di volo sarà pari ad $\Delta l = \gamma\beta c\tau$.

0.2.1 Quadrivettori

Eópportuno adesso richiamare la notazione di Einstein. In relatività ristretta il concetti di spazio e tempo sono profondamente connessi, per questo si introduce il concetto di vettore a 4 componenti x^{μ}, o quadrivettore, in cui $x^{\mu=0}$ è la componente temporale, mentre $x^{\mu=1,2,3}$ sono le componenti spaziali. Un evento è rappresentato, in un certo sistema di riferimento, dal vettore $x^\mu = (ct, x, y, z)$. Questa notazione permette di riscrive in modo estremamente compatto un boost nella direzione z

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^{\nu=3} \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{2}$$

Dove con Λ^μ_ν:

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

In molti manuali, il simbolo di sommatoria è omesso, implicitamente si intende che si deve effettuare la somma sugli indici ripetuti (tranne nei casi in cui è specificato diversamente). Una trasformazione di Lorentz può essere interpretata come una matrice di rotazione, che agisce in un spazio a 4-dimensioni. Si definisce adesso l'invariante di lorentz, ovvero:

$$x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^0)^2 - \vec{x} \cdot \vec{x}$$

Si può dimostrare che tale quantità è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz, cioè assume lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento. L'invariante di Lorentz si esprime in notazione di Einstein introducendo il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ pari ad

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Con questo è possibile esprimere l'invariante di lorentz come $x^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$. In questa forma, è quasi immediato dimostrare che l'invariante di lorentz assume lo stesso valore in qualsiasi sistema di riferimento, è infatti sufficiente dimostrare, partendo da $x'^2 = x'^\mu g_{\mu\nu} x'^\nu = x^\sigma \Lambda^\mu_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\eta x^\eta$ che sia vera la relazione: $\Lambda^\mu_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\eta = g_{\sigma\eta}$

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La scrittura $x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$ può essere rielaborata introducendo il concetto di indice covariante e indice controvariante: $x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = x^\mu x_\mu$ In questo caso abbiamo portato l'indice in alto ν in basso, dove $x_\nu = g_{\mu\nu} x^\nu$. Moltiplicando per il tensore metrico è possibile alzare od abbassare gli indici, cioè trasformare un indice controvariante (come nel nostro caso) in un indice covariante e viceversa. In questi appunti la forma del tesore metrico è quella scritta in equazione 3, che è la metrica dello spazio-tempo di Minkowski.

0.2.2 Quadrimpulso, invarianti cinematici

Oltre al quadrivettore x^μ che descrive la posizione nello spazio-tempo di una particella, si considera anche il quadrimpulso $P^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$. Le componenti del quadrimpulso sono legate dalla relazione:

$$E = m\gamma c^2 \quad \vec{p} = m\gamma\beta c$$

Si ricava immediatamente che $\frac{P^\mu}{m} = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ che è la 4-velocità della particella. Alcune relazioni utili sono $\vec{\beta} = \frac{\vec{p}c}{E}$