Universidade Federal do Ceará
Instituto de Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica

Circuitos Elétricos

Capítulo 6 B – Indutância, Capacitância e Indutância Mútua

Prof. Fabrício Nogueira

Capacitor

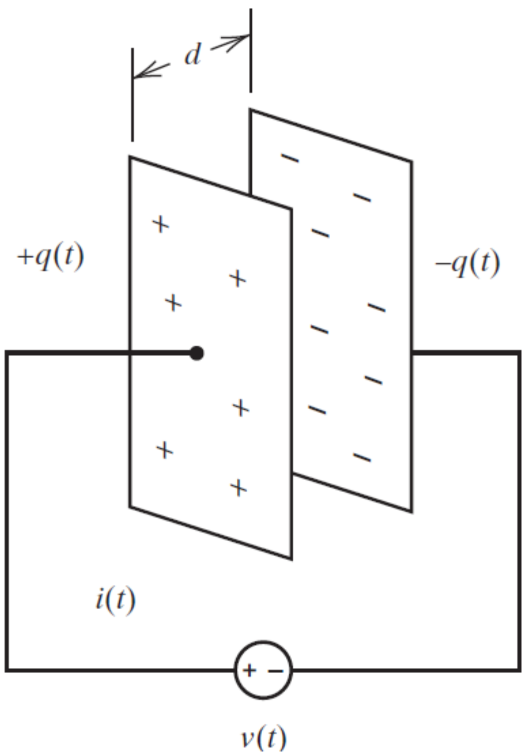
- Capacitância (C) é o parâmetro de circuito utilizado para descrever o capacitor.

$$C = \frac{\in A}{d}$$

ϵ = constante dielétrica;

A = área da superfície das placas;

d = distância entre as placas.

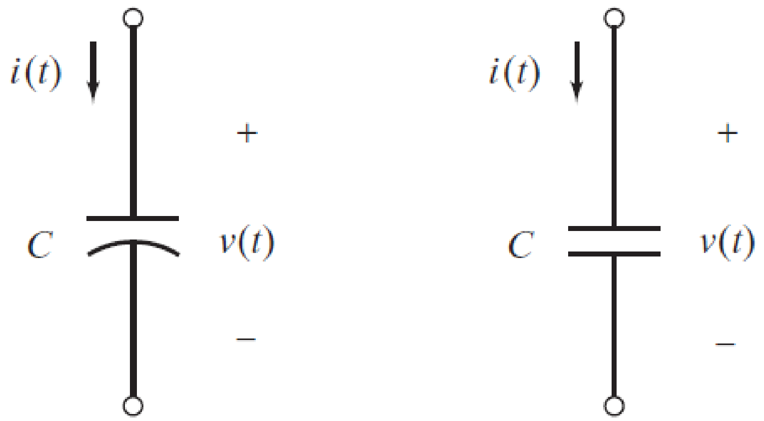


- Unidade de capacitância: Farads (F);

- Normalmente na faixa entre pF a μF.

Capacitor

- Simbologia:



Indutância, Capacitância e Indutância Mútua

Capacitor

- A carga armazenada é proporcional à tensão: $q(t) = Cv(t)$

- A variação de carga com respeito ao tempo: $i(t) = \dfrac{d}{dt} q(t)$

- Corrente (convenção passiva):

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$$

Tensão:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_o}^{t} i\, d\tau + v(t_o)$$

- Tensão não varia instantaneamente nos terminais de um capacitor.

- Se a tensão nos terminais for constante, a corrente no capacitor é zero.

- Na presença de uma tensão constante, o capacitor se comporta como um circuito aberto.

Capacitor

- Potência (convenção passiva):

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt}$$

- Ou

$$p = i\left[\frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} i\,d\tau + v(t_o)\right]$$

- Energia:

$$w = \frac{1}{2}Cv^2$$

Capacitor - Exemplo

$$v(t)=\begin{cases}0 & ,t\le 0\,s\\ 4t\,V & ,0\,s\le t\le 1\,s\\ 4e^{-(t-1)}\,V & ,t\ge 1s\end{cases}\quad (1)$$

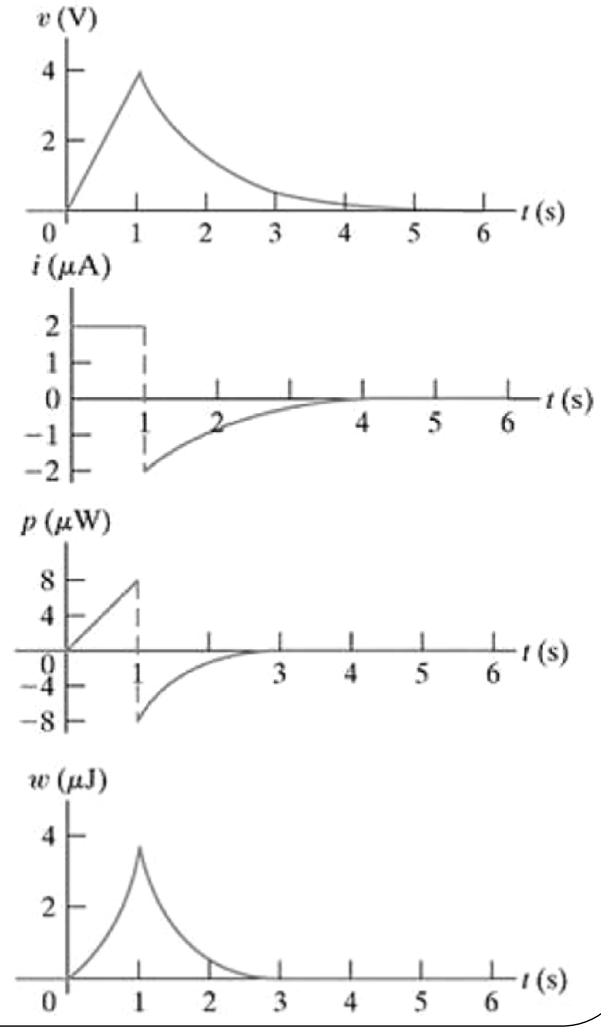
- O pulso de tensão descrito pelas equações (1) é aplicado nos terminais de um capacitor de 0,5μF.

a) Determine as expressões para corrente, potência e energia no capacitor.

$$i=\begin{cases}\left(0{,}5\times 10^{-6}\right)(0)=0 & ,t\le 0\,s\\ \left(0{,}5\times 10^{-6}\right)(4)=2\,\mu A & ,0\,s\le t\le 1\,s\\ \left(0{,}5\times 10^{-6}\right)\left(-4e^{-(t-1)}\right)=-2e^{-(t-1)}\mu A & ,t\ge 1s\end{cases}$$

$$p=\begin{cases}(0)=0 & ,t\le 0\,s\\ (4t)(2)=8t\;\mu W & ,0\,s\le t\le 1\,s\\ \left(4e^{-(t-1)}\right)\left(-2e^{-(t-1)}\right)=-8e^{-2(t-1)}\mu W & ,t\ge 1s\end{cases}$$

$$w=\begin{cases}(0)=0 & ,t\le 0\,s\\ 0{,}5(0{,}5)16t^2=4t^2\;\mu J & ,0\,s\le t\le 1\,s\\ 0{,}5(0{,}5)\left(16e^{-2(t-1)}\right)=4e^{-2(t-1)}\mu J & ,t\ge 1s\end{cases}$$



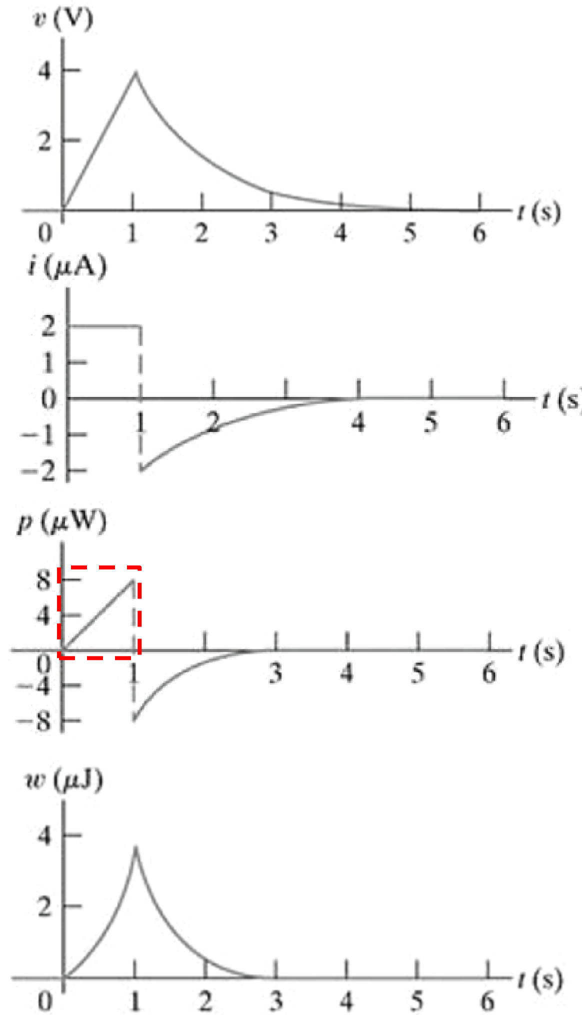
Capacitor - Exemplo

$$v(t)=\begin{cases}0 & ,t\le 0\,s\\ 4t\,V & ,0\,s\le t\le 1\,s\\ 4e^{-(t-1)}\,V & ,t\ge 1\,s\end{cases} \qquad (1)$$

- O pulso de tensão descrito pelas equações (1) é aplicado nos terminais de um capacitor de 0,5μF.

b) Em qual intervalo de tempo a energia está sendo armazenada no capacitor?

A energia é armazenada no capacitor sempre que a potência for positiva, portanto de 0 a 1 s.



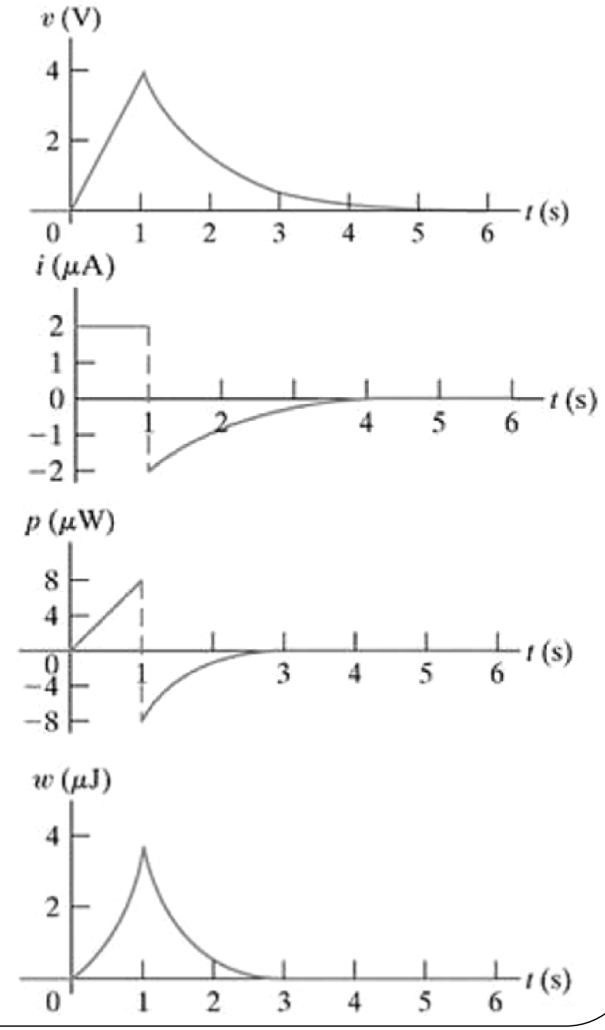
Capacitor - Exemplo

$$v(t)=\begin{cases}0 & ,t \le 0\,s \\ 4t\,V & ,0\,s \le t \le 1\,s \\ 4e^{-(t-1)}\,V & ,t \ge 1s\end{cases} \quad (1)$$

- O pulso de tensão descrito pelas equações (1) é aplicado nos terminais de um capacitor de 0,5μF.

c) Em qual intervalo de tempo o capacitor fornece energia?

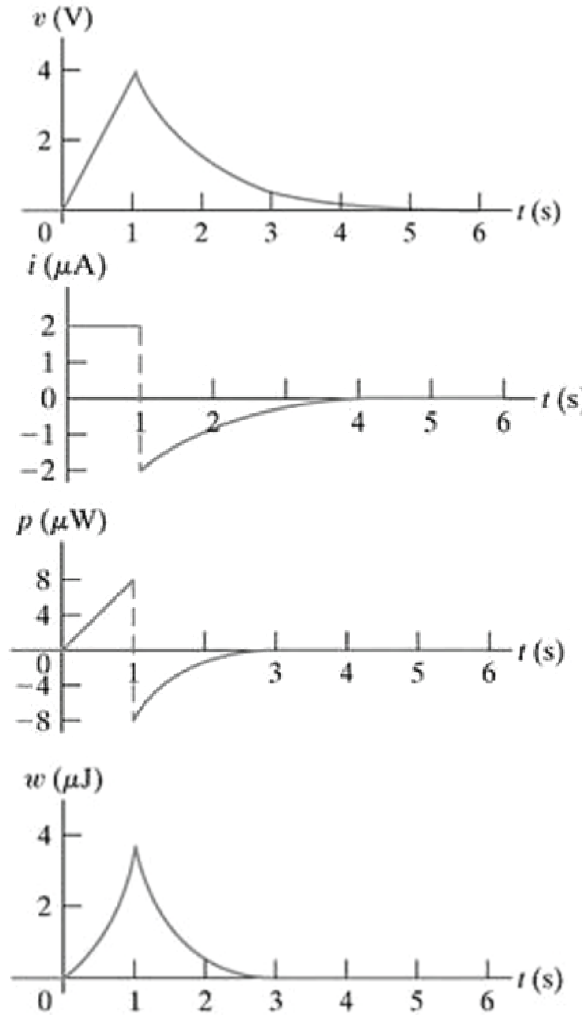
O capacitor fornece energia sempre que a potência for negativa, portanto quando *t* for maior que 1 s.



Capacitor - Exemplo

$$v(t)=\begin{cases}0 & ,t \le 0\,s \\ 4t\,V & ,0\,s \le t \le 1\,s \\ 4e^{-(t-1)}\,V & ,t \ge 1s\end{cases} \quad (1)$$

d) Avalie as integrais: $\int_0^1 p\,dt \quad e \quad \int_1^\infty p\,dt$



A integral de *p dt* é a energia associada ao intervalo de tempo correspondente aos limites da integral:

$\int_0^1 p\,dt$ ➡ Energia acumulada no capacitor entre 0 e 1 s.

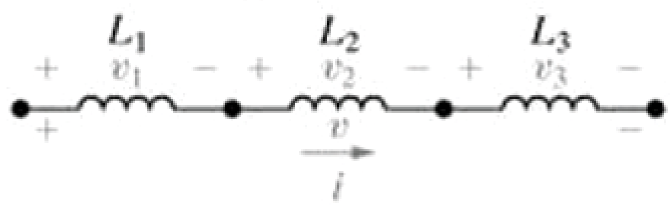
$\int_1^\infty p\,dt$ ➡ Energia fornecida pelo capacitor de1 s a infinito.

$$\int_0^1 p\,dt = \int_0^1 8t\,dt = 4t^2\Big|_0^1 = \boxed{4\,\mu J}$$

$$\int_1^\infty p\,dt = \int_1^\infty \left(-8e^{-2(t-1)}\right)dt = (-8)\frac{e^{-2(t-1)}}{-2}\Bigg|_1^\infty = \boxed{-4\,\mu J}$$

Indutores e Capacitores em Série e Paralelo

Indutores em série:



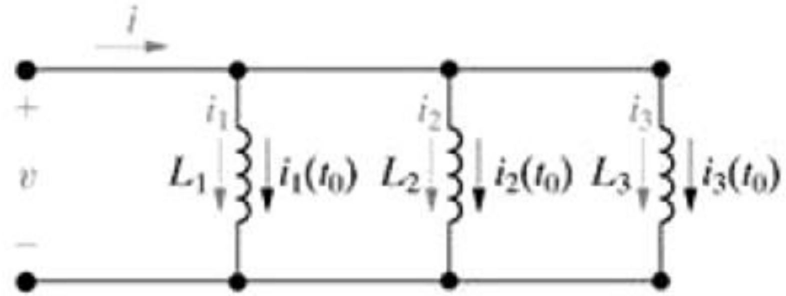
$$v_1 = L_1 \frac{di}{dt}, \qquad v_2 = L_2 \frac{di}{dt}, \qquad v_3 = L_3 \frac{di}{dt},$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = (L_1 + L_2 + L_3)\frac{di}{dt}$$

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3}$$

Indutores e Capacitores em Série e Paralelo

Indutores em paralelo:



Corrente em cada indutor é função da tensão terminal e da corrente inicial no indutor:

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_1(t_0) \qquad i_2 = \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_2(t_0) \qquad i_3 = \frac{1}{L_3}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_3(t_0)$$

A corrente nos terminais dos três indutores e paralelo é igual a soma das correntes:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0)$$

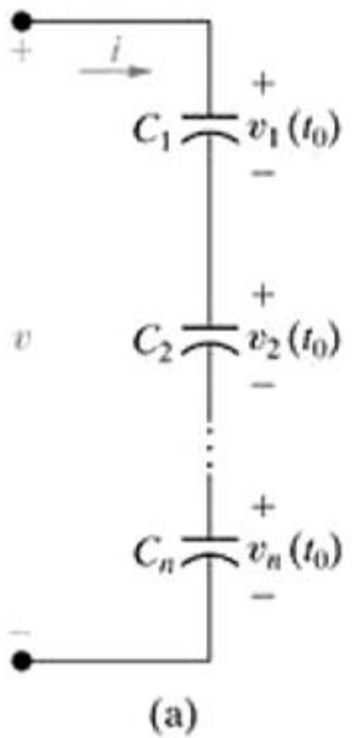
$$i = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0)$$

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}\right)}$$

$$\boxed{i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \ldots + i_n(t_0)}$$

Indutores e Capacitores em Série e Paralelo

Capacitores em série:



$$v_1 = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v_1(t_0) \qquad v_2 = \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v_2(t_0) \qquad v_3 = \frac{1}{C_3}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v_3(t_0)$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3$$

$$v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0)$$

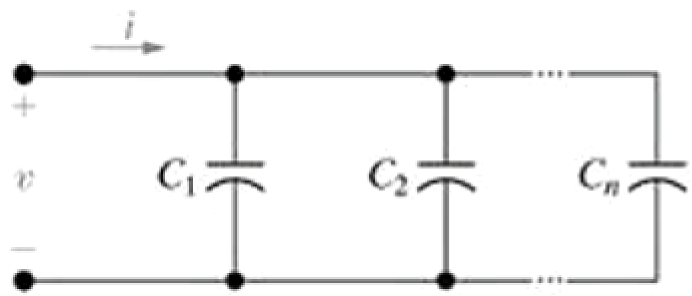
$$v = \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v(t_0)$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)}$$

$$\boxed{v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \ldots + v_n(t_0)}$$

Indutores e Capacitores em Série e Paralelo

Capacitores em paralelo:



$$i_1 = C_1 \frac{dv}{dt}, \qquad i_2 = C_2 \frac{dv}{dt}, \qquad i_3 = C_3 \frac{dv}{dt},$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \left(C_1 + C_2 + C_3\right)\frac{dv}{dt}$$

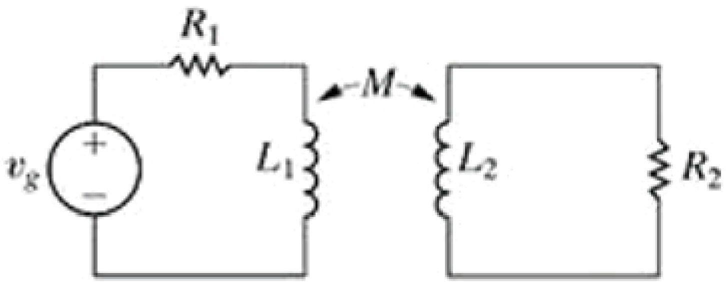
$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3}$$

Indutância Mútua

- Anteriormente, o campo magnético que consideramos no estudo de indutores estava restrito a apenas um circuito.
- **Indutância (Auto-indutância):** parâmetro que relaciona uma tensão a uma corrente que varia com o tempo no mesmo circuito.

- Considerando dois circuitos imersos em um campo magnético:
- **Indutância mútua:** relaciona a tensão induzida no segundo circuito devido a corrente variável com o tempo no primeiro circuito.

Dois enrolamentos acoplados magneticamente

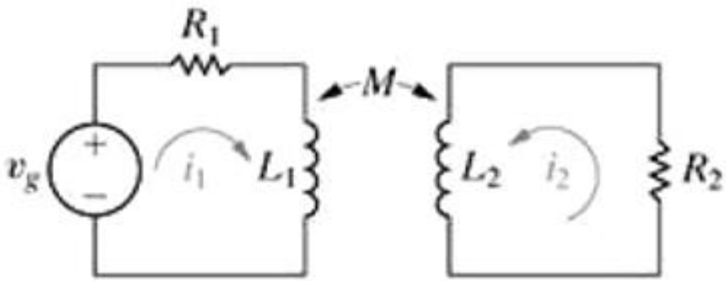


Autoindutâncias: L1 e L2

Indutância mútua: M

Indutância Mútua – Análise de Circuitos

- Método das correntes de malha:
- Escolher a direção de referência da corrente de cada enrolamento. Ex: i_1 e i_2



- Após escolher as direções de referência para i_1 e i_2, some as tensões nas malhas.
- Por causa da indutância mútua M, haverá duas tensões em cada enrolamento:

a) Tensão auto-induzida: (autoindutância) x (derivada da corrente no enrolamento).

b) Tensão mutuamente induzida: (indutância mútua dos enrolamentos) x (derivada da corrente no outro enrolamento).

Ex: Para o enrolamento da esquerda: Auto-indutância = L1

a) Tensão auto-induzida = $L_1(di_1/dt)$ **b) Tensão mutuamente induzida =** $M(di_2/dt)$

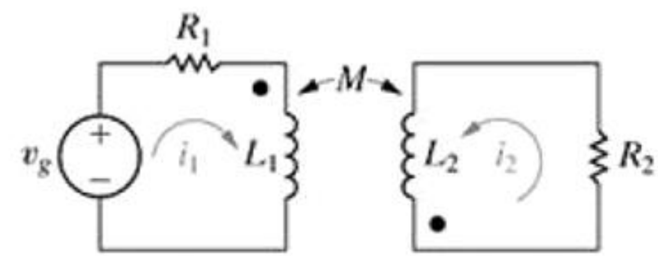
Indutância Mútua – Análise de Circuitos

- E a polaridade das tensões?

- **<u>Convenção do ponto:</u>**

Convenção do ponto para enrolamentos mutuamente acoplados: Quando a direção de referência para uma corrente entra no terminal de um enrolamento identificado por um ponto, a polaridade de referência da tensão que ela induz no outro enrolamento é positiva no terminal identificado pelo ponto.

Convenção do ponto para enrolamentos mutuamente acoplados (alternativa): Quando a direção de referência para uma corrente sair do terminal de um enrolamento identificado por um ponto, a polaridade de referência da tensão que ela induz no outro enrolamento é negativa no terminal identificado pelo ponto.



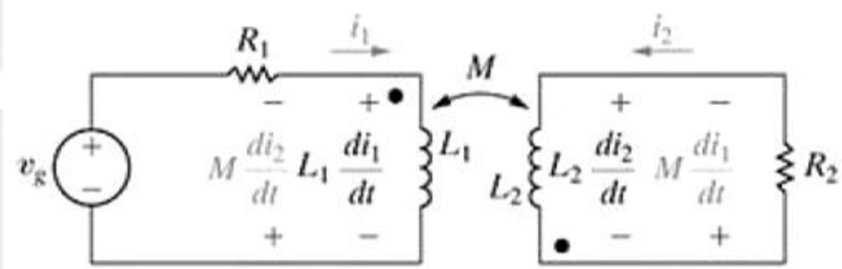


Figura 6.22 ▲ Tensões auto-induzidas e mutuamente induzidas que aparecem nos enrolamentos mostrados na Figura 6.21.

Indutância Mútua – Análise de Circuitos

- Exemplo. Pela regra do ponto:

Enrolamento 1:

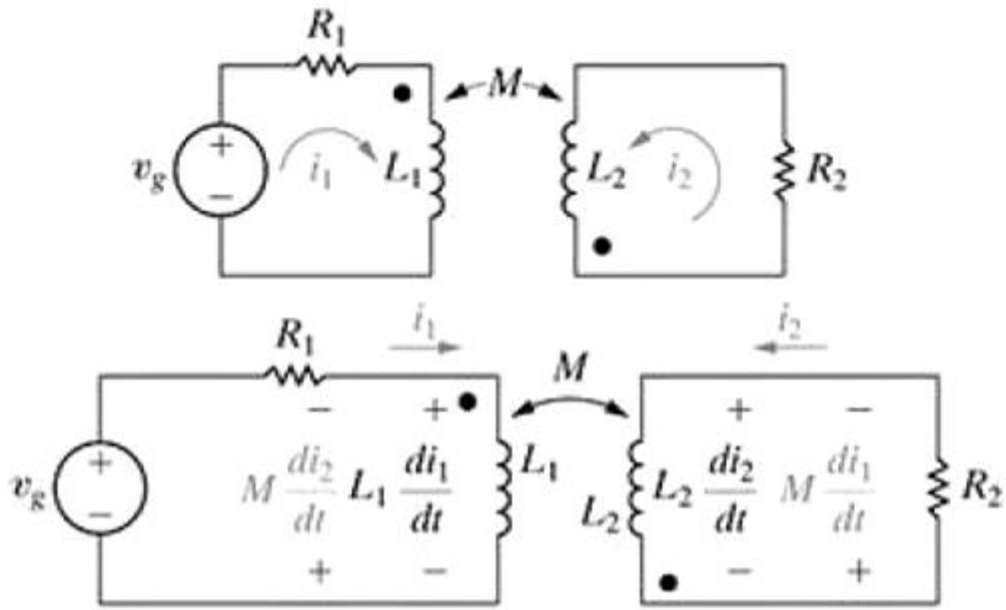


Figura 6.22 ▲ Tensões auto-induzidas e mutuamente induzidas que aparecem nos enrolamentos mostrados na Figura 6.21.

$$-v_g + i_1R_1 + L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} = 0 \qquad i_2R_2 + L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} = 0$$

Indutância Mútua – Análise de Circuitos

- Procedimentos para marcação de pontos.

I) Conhecendo o arranjo físico dos dois enrolamentos:

1) Escolha um terminal e marque com um ponto.

2) Designe uma corrente entrando nesse terminal.

3) Use a regra da mão direita para determinar o sentido do campo magnético criado por i_d no interior dos enrolamentos acoplados e denomine esse campo (Φ_D).

4) Mesmo procedimento para o outro enrolamento (corrente i_a e campo Φ_A)

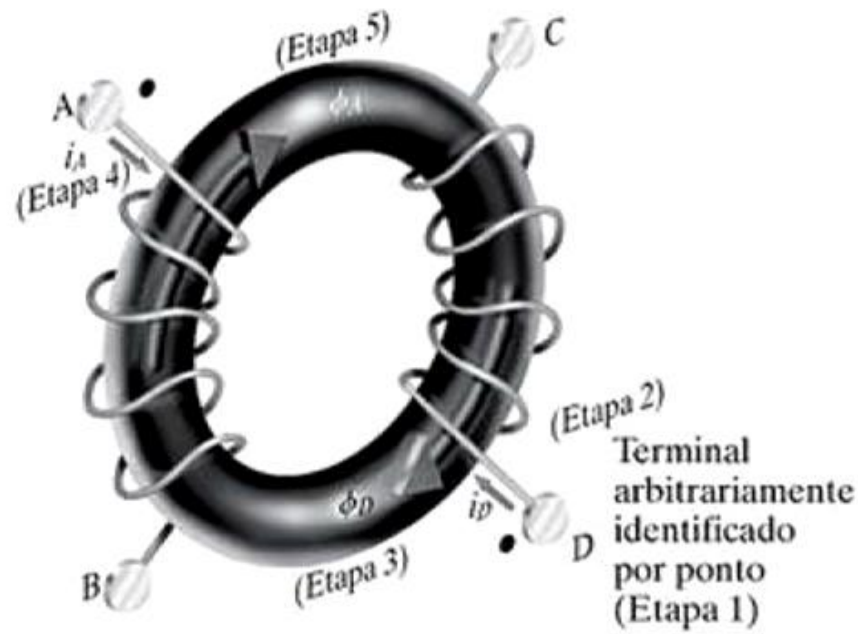


Figura 6.23 ▲ Conjunto de enrolamentos para demonstrar o método que determina um conjunto de marcações de pontos.

Indutância Mútua – Análise de Circuitos

- Procedimentos para marcação de pontos.

I) Conhecendo o arranjo físico dos dois enrolamentos:

5) Compare as direções dos dois fluxos (Φ_D e Φ_A):

-Se os campos tiverem a mesma direção de referência, coloque um ponto no terminal do segundo enrolamento onde a corrente i_a entra.

- Se as direções de referência dos fluxos forem diferentes, coloque um ponto no terminal do segundo enrolamento onde a corrente auxiliar sai.

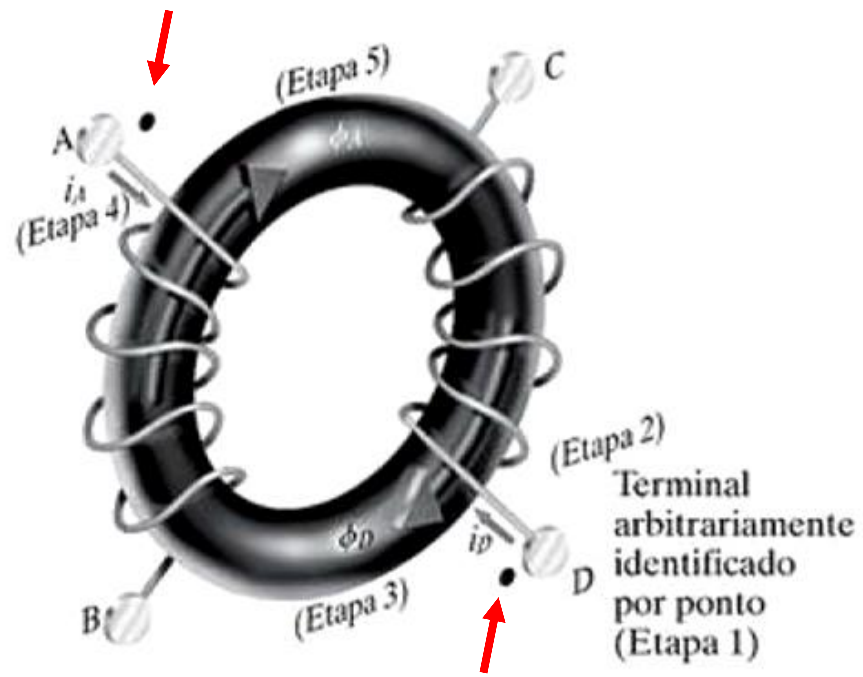


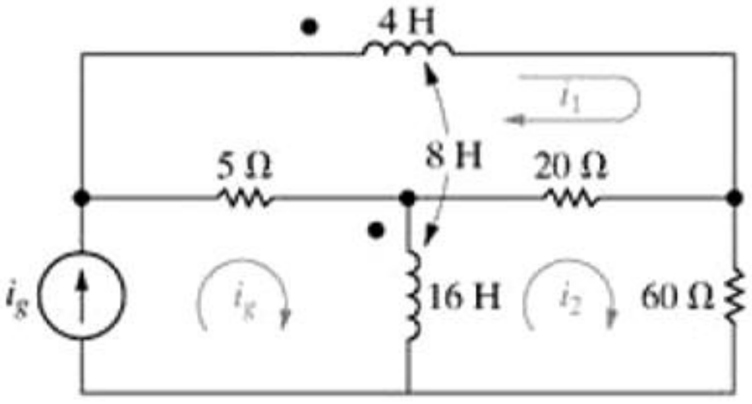
Figura 6.23 ▲ Conjunto de enrolamentos para demonstrar o método que determina um conjunto de marcações de pontos.

Indutância Mútua – Análise de Circuitos

Exemplo: a) escreva um conjunto de equações de malha que descreva o circuito em termos das correntes i_1 e i_2.

$$4\frac{di_1}{dt}+8\frac{d}{dt}\left(i_g-i_2\right)+20\left(i_1-i_2\right)+5\left(i_1-i_g\right)=0$$

$$20\left(i_2-i_1\right)+60i_2+16\frac{d}{dt}\left(i_2-i_g\right)-8\frac{di_1}{dt}=0$$



Circuitos Resistivos

Referências Bibliográficas:

Nilsson, J.W. e Riedel, S.A., Circuitos Elétricos, 8ª Edição, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2009.

Svodoba, J.A. and Dorf, R.C., Introduction to Electric Circuits, 9th edition, Wiley, 2011.