Universidade Federal do Ceará
Instituto de Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica

Circuitos Elétricos

Capítulo 6 A – Indutância, Capacitância e Indutância Mútua

Introdução

Dois novos componentes passivos são introduzidos nesse capítulo, o indutor e o capacitor. Ambos são considerados dispositivos armazenadores de energia:

- Capacitor – armazena energia em um campo elétrico.
- Indutor – armazena energia em um campo magnético.

Estude:

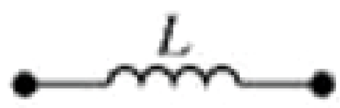
- Diferença entre campo elétrico e magnético.

Indutor

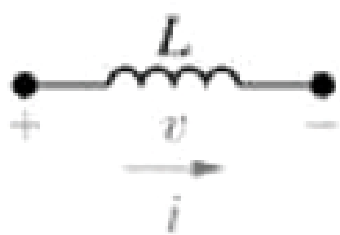
- Indutância (L) é o parâmetro de circuito utilizado para descrever o indutor.

- Unidade de indutância: Henry (H).

- Simbologia:

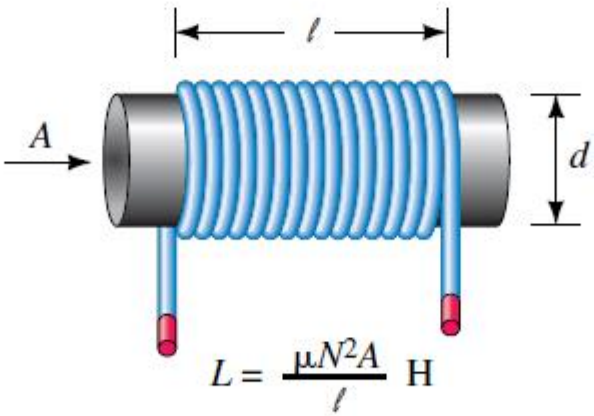


(a)



(b)

Indutor



- l – comprimento em metros;
- A- área em metros quadrados;
- N – números de voltas;
- μ – permeabilidade do núcleo.

Indutor

- Equação *v*-*i* do indutor:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

(A tensão é proporcional a variação temporal da corrente no indutor).

- Se a corrente for constante, a tensão no indutor ideal é zero.

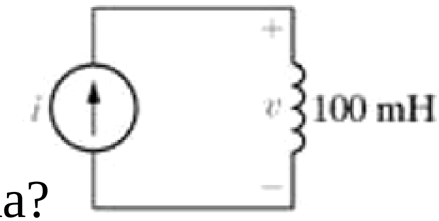
Corrente constante = curto circuito no indutor;

- A corrente não pode variar instantaneamente em um indutor.

(analogia à inércia em um sistema mecânico)

Indutor - Exemplo

- Considere o circuito:



$$i = 0, \quad t < 0$$

$$i = 10te^{-5t}\,\text{A}, \quad t > 0$$

a) Em qual instante de tempo a corrente é máxima?

$$\frac{di}{dt} = 10\left(1.e^{-5t} + t.e^{-5t}.-5\right)$$

$$\frac{di}{dt} = 10\left(e^{-5t} - 5te^{-5t}\right)$$

$$\frac{di}{dt} = 10e^{-5t}\left(1 - 5t\right)$$

$$\frac{di}{dt} = 0$$

$$10e^{-5t}\left(1 - 5t\right) = 0$$

$$10 = 50t$$

$$t = \frac{10}{50} = 0{,}2\,s$$

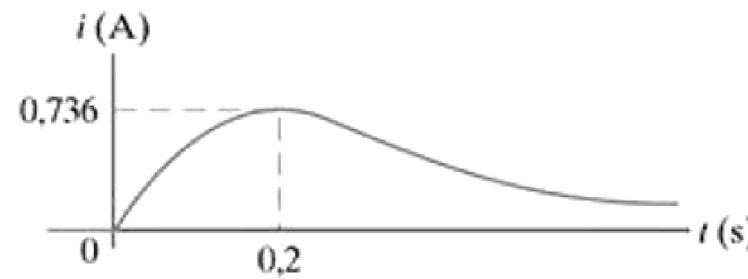


Figura 6.3 ▲ Forma de onda da corrente para o Exemplo 6.1.

b) Expresse a tensão nos terminais do indutor em função do tempo.

$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$\begin{cases} v(t) = 0{,}1 \times 10e^{-5t}\left(1 - 5t\right) & ,t > 0 \\ v(t) = 0 & ,t < 0 \end{cases}$$

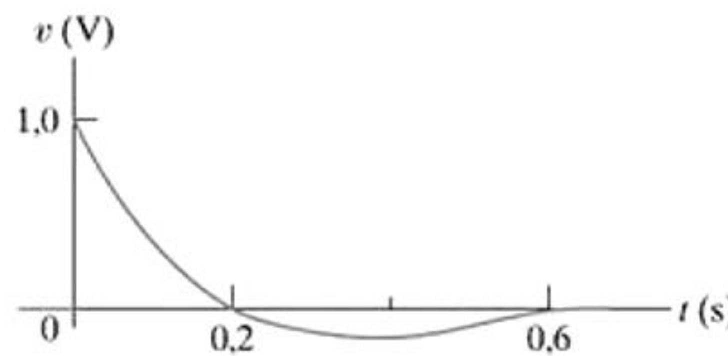
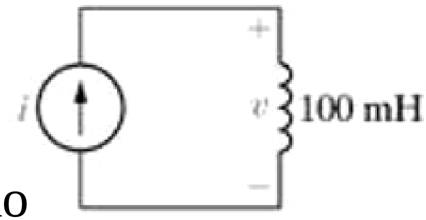


Figura 6.4 ▲ Forma de onda da tensão para o Exemplo 6.1.

Indutor - Exemplo

- Considere o circuito:



$i = 0, \quad t < 0$

$i = 10te^{-5t}\,\text{A}, \quad t > 0$

c) A tensão e a corrente são máximas ao mesmo tempo?

Não, a tensão é proporcional a di/dt, não a i.

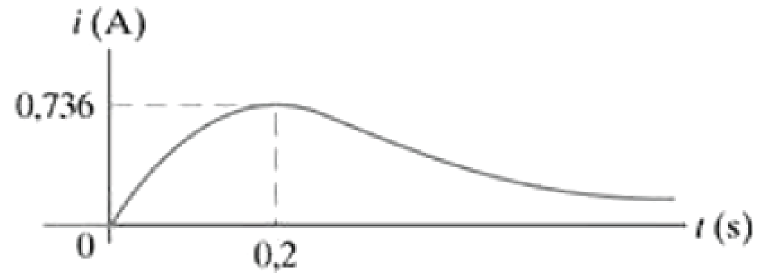


Figura 6.3 ▲ Forma de onda da corrente para o Exemplo 6.1.

d) Em que instante *t* a tensão muda de polaridade?

Em 0,2 s, momento em que di/dt cruza o zero e muda de sinal.

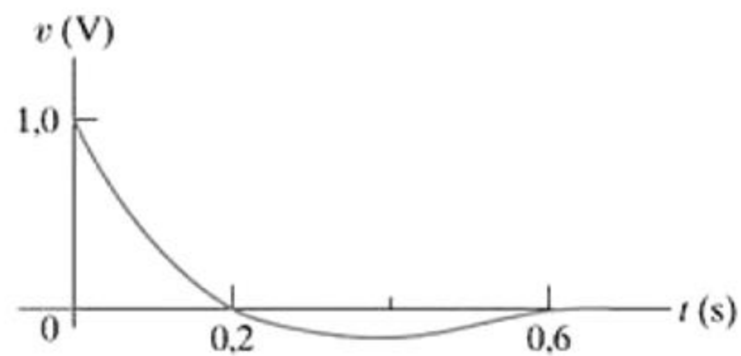


Figura 6.4 ▲ Forma de onda da tensão para o Exemplo 6.1.

e) Há variações instantâneas da tensão no indutor?

Sim, em t=0.

Indutor - Corrente em função da tensão

- Para determinar i em função de v, começamos multiplicando ambos os lados da equação $v = L\dfrac{di}{dt}$ por um tempo diferencial dt.

$$vdt = L\left(\frac{di}{dt}\right)dt$$

$$vdt = Ldi$$

- Em seguida, integramos ambos os lados.

$$L\int_{i(t_0)}^{i(t)} dx = \int_{t_0}^{t} vd\tau$$

- Observe que usamos x e τ como as variáveis de integração, ao passo que i e t tornam-se limites nas integrais.

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vd\tau$$

Indutor - Corrente em função da tensão

- Então:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0)$$

- Onde i(t) é a corrente correspondente a t e $i(t_0)$ é o valor da corrente do indutor quando iniciarmos a integração.

- Em muitos casos, t_0 é igual a zero:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v\,d\tau + i(0)$$

Exemplo

O pulso de tensão aplicado ao indutor de 100mH é 0 para t < 0 e é dado pela expressão: $v(t) = 20te^{-10t}\,V$ para t > 0. Admita também que i = 0 para t≤ 0.

b) Corrente p/ t > 0.

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0)$$

$$i(t) = \frac{1}{0{,}1}\int_{0}^{t} 20\tau e^{-10\tau}\,d\tau + 0$$

$$i(t) = 200\left[\frac{-e^{-10\tau}}{100}(10\tau + 1)\right]\Bigg|_0^t$$

$$i(t) = 2\left(-10te^{-10t} - e^{-10t} + 1\right)A,\ \ t > 0$$

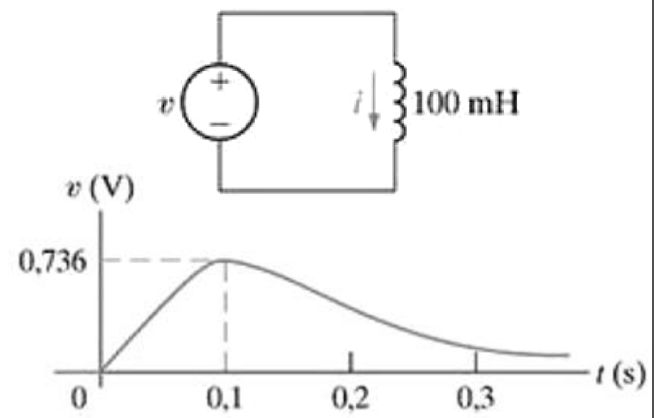
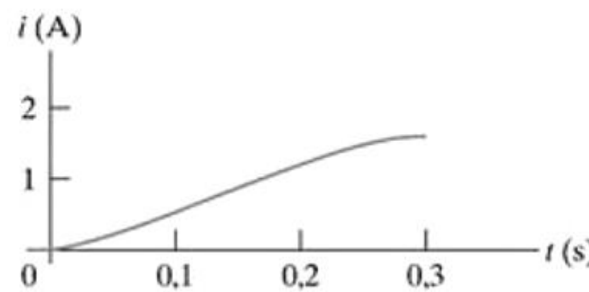


Figura 6.6 ▲ Forma de onda da tensão para o Exemplo 6.2.



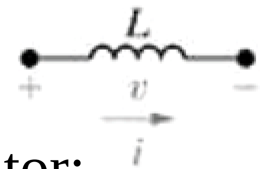
$$\int xe^{cx}dx = \frac{e^{cx}}{c^2}(cx - 1)$$

Figura 6.7 ▲ Forma de onda da corrente para o Exemplo 6.2.

Potência no Indutor

- Se a referência de corrente estiver no sentido de queda de tensão nos terminais do indutor, a potência é:

$$p = vi$$



- Se a tensão do indutor estiver em função da corrente do indutor:

$$p = iL\frac{di}{dt}$$

- Também podemos expressar a corrente em termos da tensão:

$$p = v\left[\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0)\right]$$

Energia no Indutor

- Potência é a taxa de variação de energia em relação ao tempo:

$$p = \frac{dw}{dt} = iL\frac{di}{dt}$$

$$dw = iLdi$$

- Integrando ambos os lados:

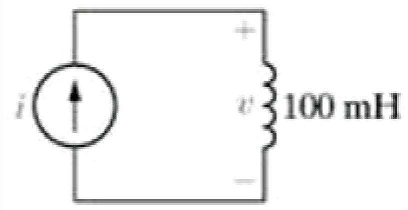
$$\int_0^w dx = L\int_0^i ydy \qquad w - 0 = L\int_0^i ydy$$

$$\boxed{w = \frac{1}{2}Li^2}$$

(Energia em um indutor- joules)

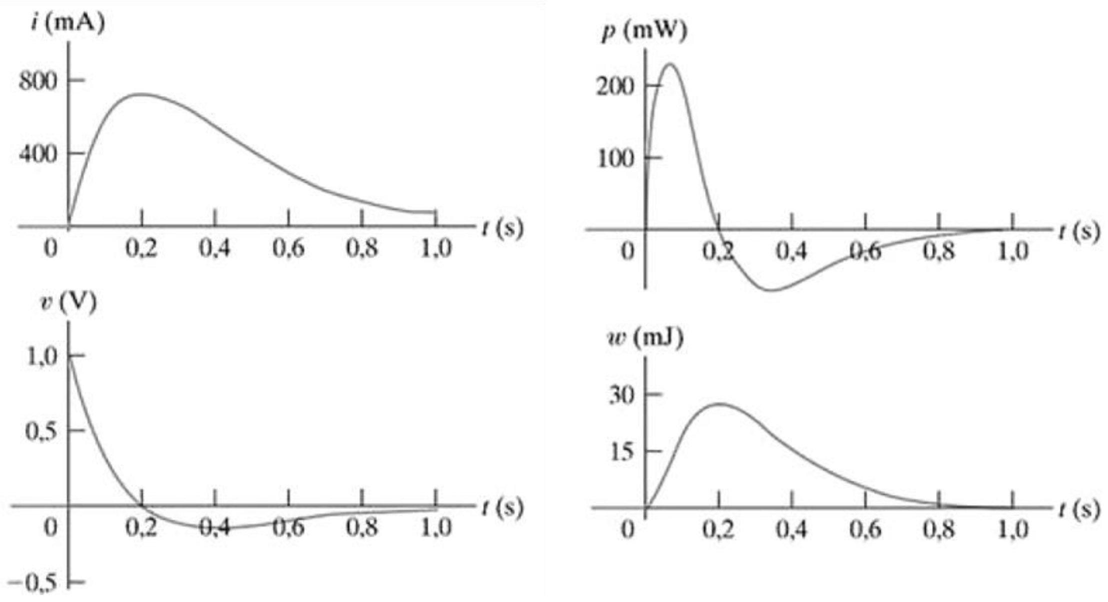
Exemplo - Indutor

a) Gráficos de *i*, *v*, *p* e *w* em função do tempo.



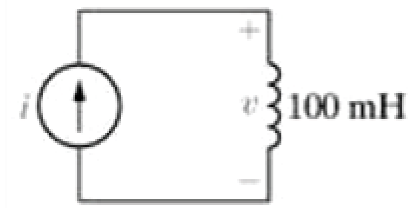
$i = 0, \quad t < 0$

$i = 10te^{-5t}\text{A}, \quad t > 0$



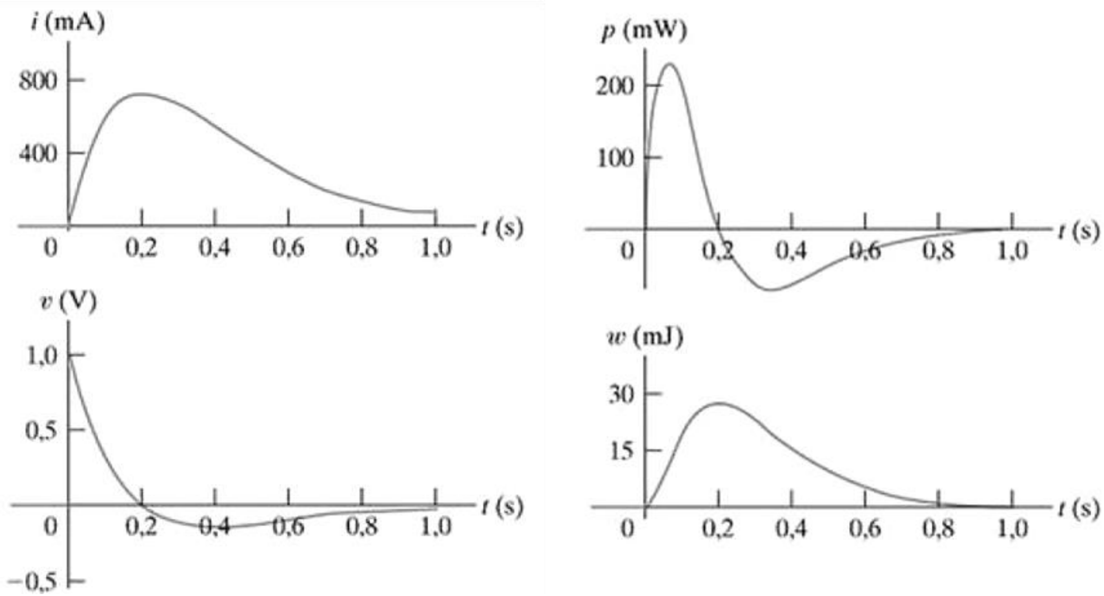
Exemplo - Indutor

b) Em qual intervalo de tempo a energia está sendo armazenada?



$$i = 0, \quad t < 0$$

$$i = 10te^{-5t}\,\text{A}, \quad t > 0$$

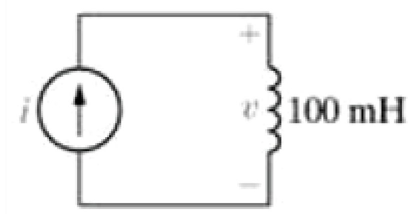


b) Uma inclinação positiva na curva de energia indica que energia está sendo armazenada. Assim, a energia está sendo armazenada no intervalo de tempo 0 a 0,2 s. Observe que isso corresponde ao intervalo em que $p > 0$.

Indutância, Capacitância e Indutância Mútua

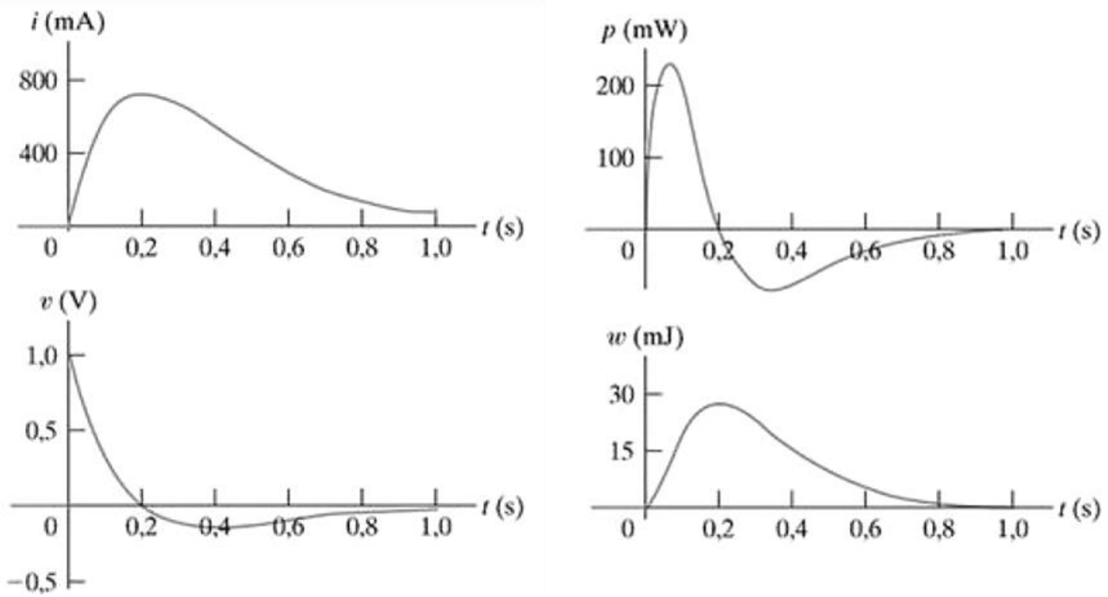
Exemplo - Indutor

c) Em qual intervalo de tempo a energia está sendo extraída do indutor?



$i = 0, \quad t < 0$

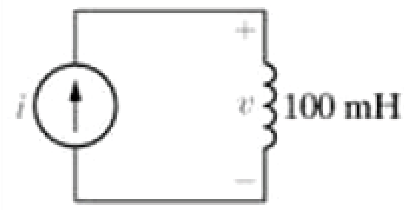
$i = 10te^{-5t}\,\text{A}, \quad t > 0$



c) Uma inclinação negativa na curva de energia indica que energia está sendo extraída. Assim, a energia está sendo extraída no intervalo de tempo 0,2 s a ∞. Observe que isso corresponde ao intervalo em que $p < 0$.

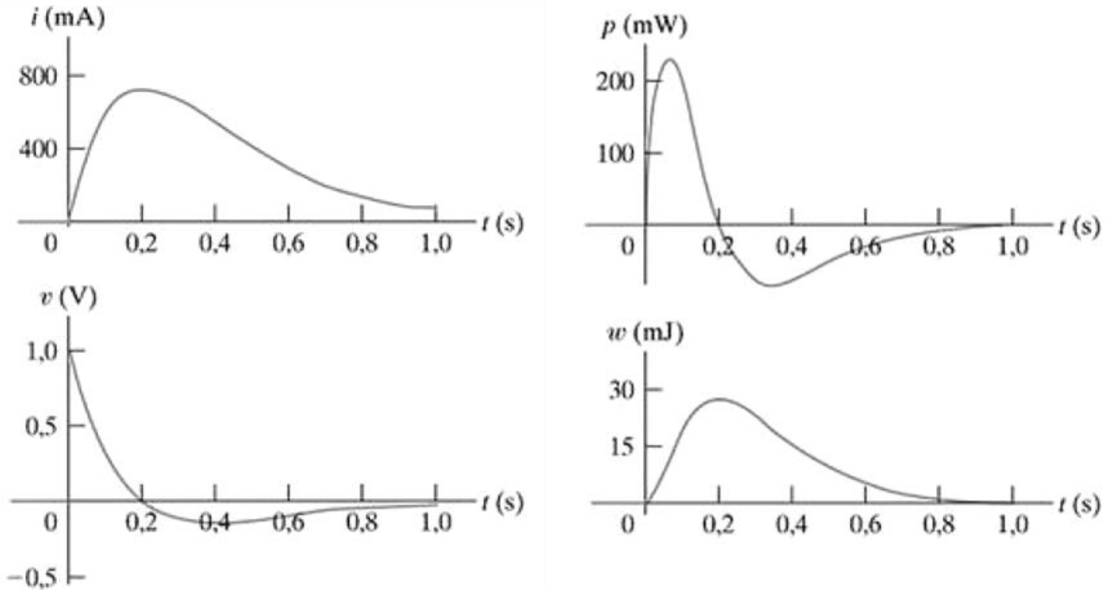
Exemplo - Indutor

d) Qual a máxima energia armazenada no indutor?



$i = 0, \quad t < 0$

$i = 10te^{-5t}\,\mathrm{A}, \quad t > 0$



$t_{i\max} = 0{,}2\,s$

$i_{\max} = 0{,}7357\,A$

$$\boxed{w = \frac{1}{2}Li^2}$$

$$w = \frac{1}{2}0{,}1(0{,}7357)^2 = 0{,}02707\,J$$

$$w = 27{,}07\,mJ$$

Exemplo - Indutor

e) Calcule a integral: $\int_0^{0,2} p\,dt$

$i = 10te^{-5t}\ A$ $\quad v = e^{-5t}(1-5t)V$ $\quad p = vi = 10te^{-10t} - 50t^2e^{-10t}\ W$

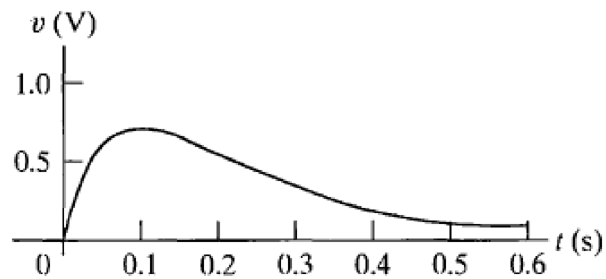
$$\int_0^{0,2} p\,dt \quad = 10\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]\Bigg|_0^{0,2} - 50\left\{\frac{t^2e^{-10t}}{-10} + \frac{2}{10}\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t-1)\right]\right\}\Bigg|_0^{0,2}$$

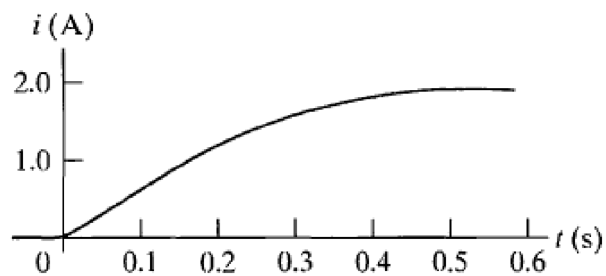
$$= 0,2e^{-2} = 27,07\,mJ$$

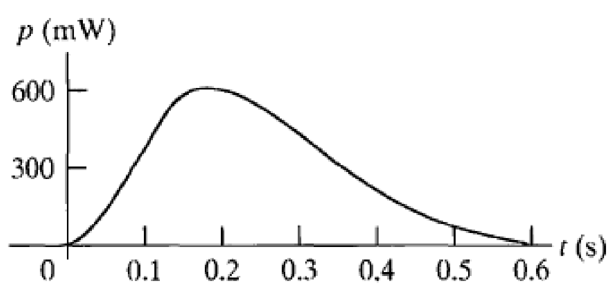
$$\boxed{\int_{0,2}^{\infty} p\,dt = -27,07mJ}$$

Exemplo - Indutor

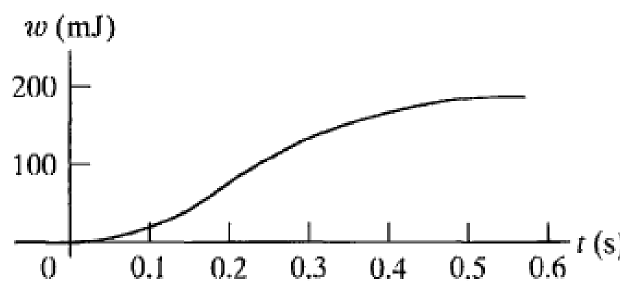
Por que há uma corrente finita no indutor à medida que a tensão se aproxima de zero?







g) A aplicação do pulso de tensão faz com que a energia seja armazenada no indutor. Como o indutor é ideal, essa energia não pode ser dissipada após a tensão cair a zero. Portanto, uma corrente persistente circula no circuito. É óbvio que um indutor sem perda é um elemento ideal de circuito. O modelo de circuito de indutores reais requer, além do indutor, um resistor. (Voltaremos a falar sobre isso.)



Circuitos Resistivos

Referências Bibliográficas:

Nilsson, J.W. e Riedel, S.A., Circuitos Elétricos, 8ª Edição, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2009.

Svodoba, J.A. and Dorf, R.C., Introduction to Electric Circuits, 9th edition, Wiley, 2011.