Universidade Federal do Ceará
Instituto de Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica

Circuitos Elétricos

Capítulo 7 A – Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

Prof. Fabrício Nogueira

Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

Introdução

- Circuitos compostos por resistores, indutores ou capacitores (não ambos).

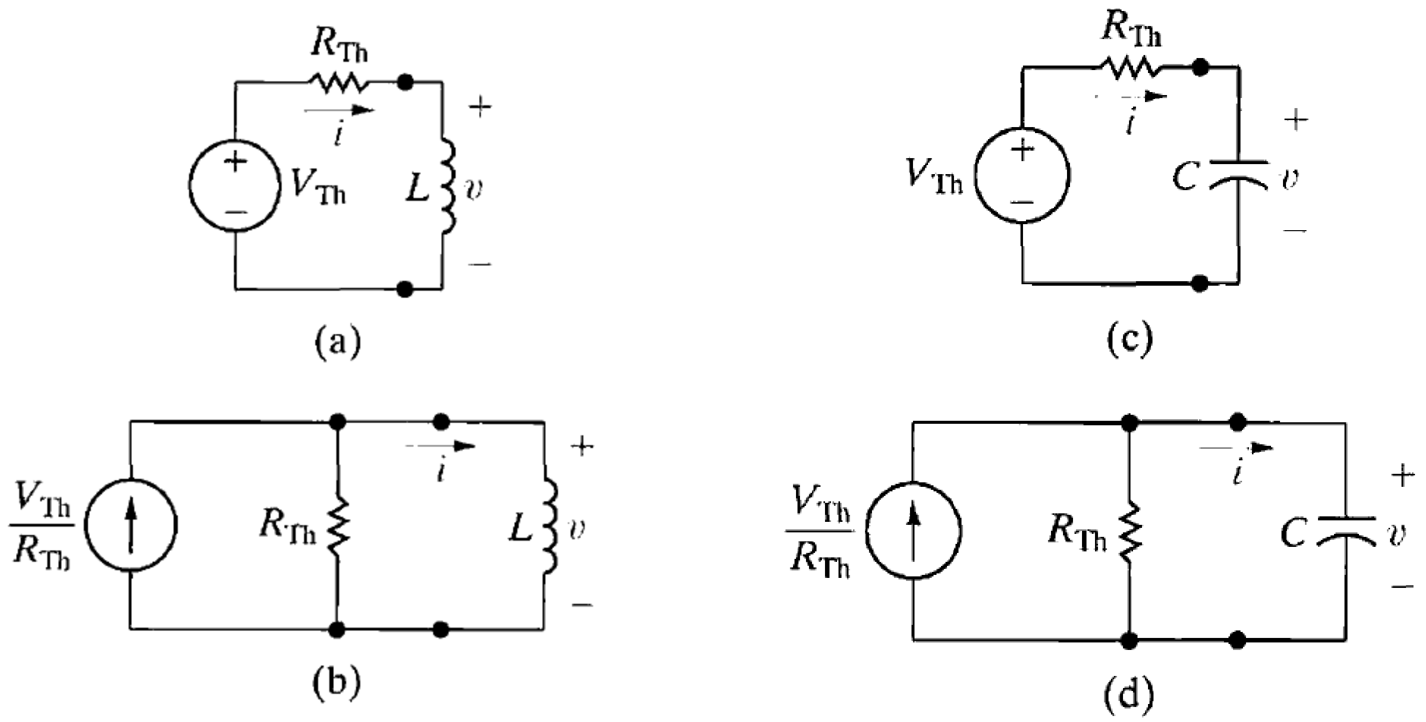
- Circuito resistor -indutor (RL);
- Circuito resistor - capacitor (RC);

- Circuitos de 1ª ordem: tensões e correntes são descritas por equações diferenciais de 1ª ordem.

Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

Introdução

- Quatro possíveis circuitos RL e RC:



Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

Introdução

- Se um circuito puder ser reduzido a um equivalente de Thévenin ou de Norton ligado aos terminais de um indutor ou capacitor equivalente, é um circuito de 1ª ordem.

- Se existirem vários indutores ou capacitores no circuito original, eles devem ser interligados de modo que possam ser substituídos por um único elemento equivalente.

Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

Introdução

- A resposta pode ser representada por dois termos:

Resposta completa	=	resposta natural (transitória)	+	resposta forçada (regime permanente)

- Resposta natural:

- Caracterizada somente pela natureza do circuito, sem influência de fontes externas de excitação.

- Quando a energia armazenada em um indutor ou capacitor é repentinamente fornecida a uma rede resistiva.

- Acontece quando a fonte cc é desligada abruptamente.

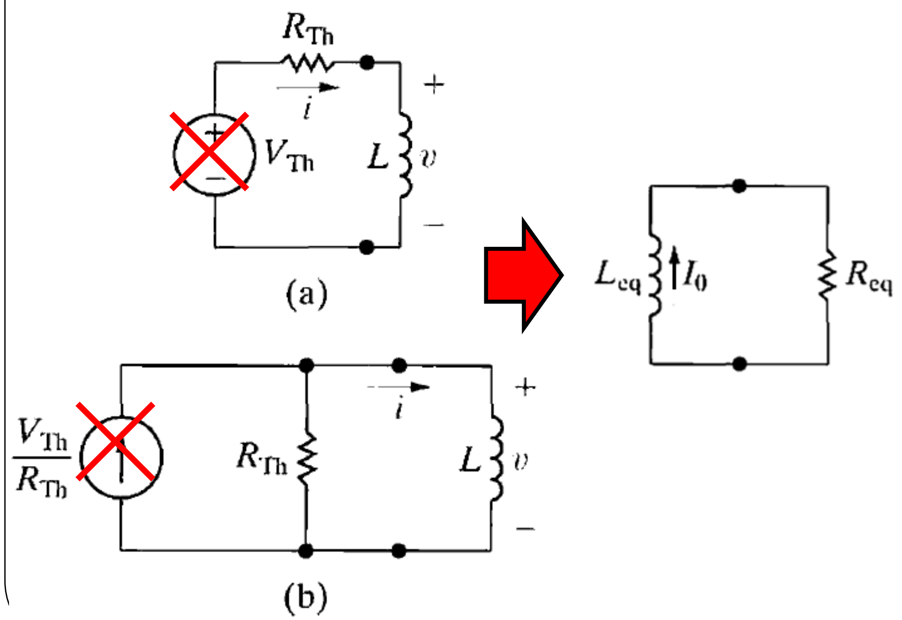
Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

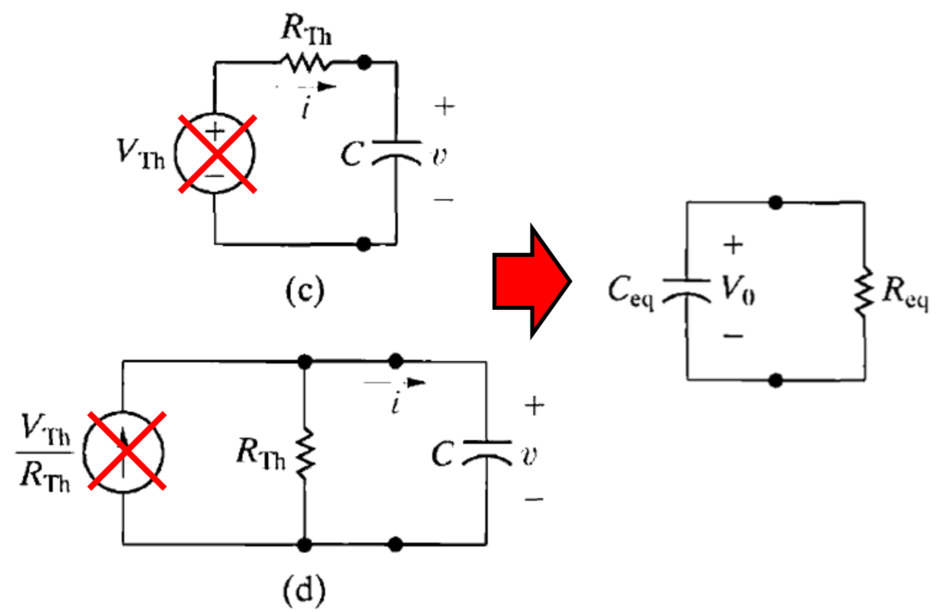
Introdução

- A resposta pode ser representada por dois termos:

Resposta completla	=	resposta natural (transitória)	+	resposta forçada (regime permanente)

- <u>Resposta natural</u>:





Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

Introdução

- A resposta pode ser representada por dois termos:

Resposta completa	=	resposta natural (transitória)	+	resposta forçada (regime permanente)

- Resposta forçada:

- Tensões e correntes quando a energia está sendo recebida por um indutor ou capacitor por causa da aplicação de uma fonte de tensão ou corrente.

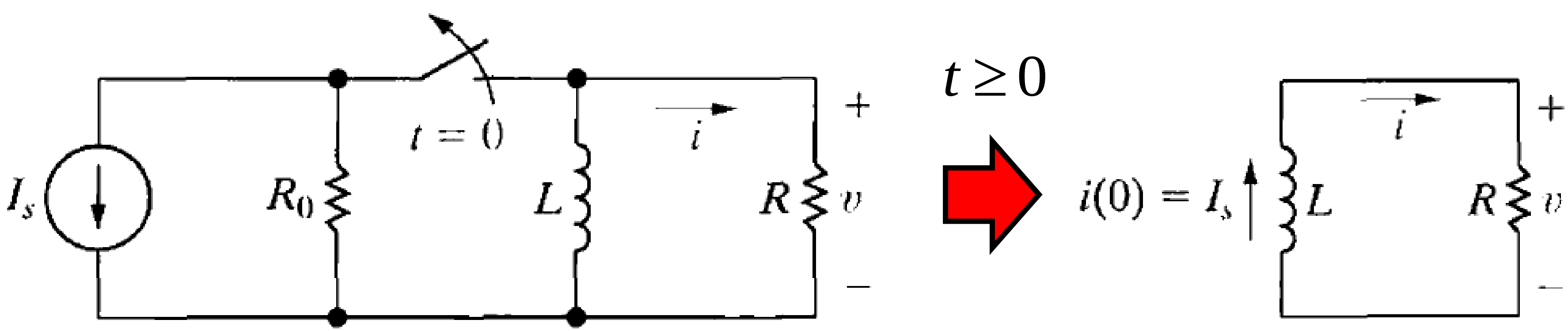
- Aplicação repentina de uma fonte de tensão ou corrente cc = **resposta ao degrau.**

Resposta natural de circuitos RL

Considerações iniciais:

- A chave está fechada há longo tempo.
- Todas as tensões e correntes atingiram valores constantes (cc).
- O indutor se comporta como um curto-circuito: $v = L\,di/dt = 0$.
- Logo: tensão no ramo indutivo = 0; e corrente em R e R_0 = 0;
- Toda a corrente I_s percorre o ramo indutivo.

Resposta natural: determinar $v(t)$ e $i(t)$ para t ≥ 0



Resposta natural de circuitos RL

Cálculo da expressão da corrente:

(Equação diferencial de 1ª ordem)

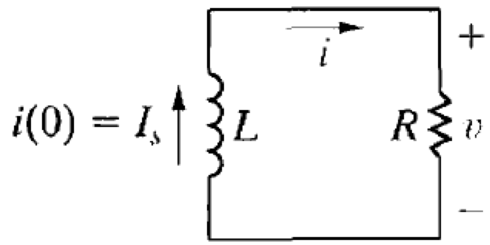
$$L\frac{di}{dt}+Ri=0 \;\Rightarrow\; \frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0 \;\Rightarrow\; \frac{di}{dt}dt=-\frac{R}{L}idt \;\Rightarrow\; \frac{di}{i}=-\frac{R}{L}dt$$

Determina-se uma equação explícita de i como uma função de t integrando-se os dois lados:

$$t_0=0$$

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)}\frac{dx}{x}=-\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t}dy \;\Rightarrow\; \ln(x)\Big|_{i(t_0)}^{i(t)}=-\frac{R}{L}y\Big|_{t_0}^{t} \;\Rightarrow\; \ln(i(t))-\ln(i(0))=-\frac{R}{L}(t-0)$$

$$\ln\frac{i(t)}{i(0)}=-\frac{R}{L}t \;\Rightarrow\; \boxed{i(t)=i(0)e^{-\frac{R}{L}t}}$$



$$y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$$

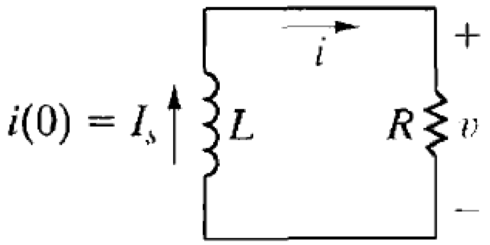
Resposta natural de circuitos RL

Cálculo da expressão da corrente:

Definição:

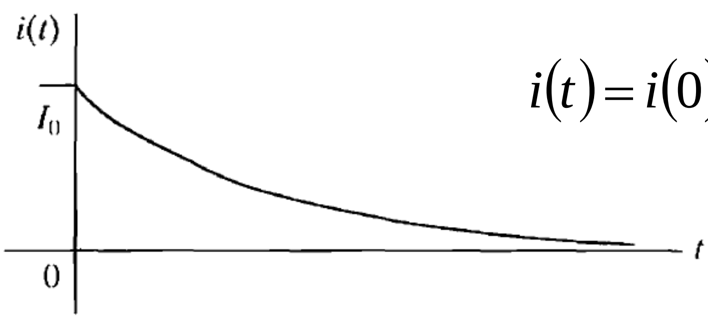
Se o chaveamento for realizado em t=0:

- Tempo imediatamente anterior ao chaveamento = 0^-.
- Tempo imediatamente posterior ao chaveamento = 0^+.



$$\boxed{i(0^-) = i(0^+) = I_0}$$

(I_0 é a corrente inicial no indutor).



$$i(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow \boxed{i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}\ ,\ t \geq 0}$$

A corrente começa com o valor inicial I_0 e diminui exponencialmente tendendo a zero quando t aumenta

Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

Resposta natural de circuitos RL

Cálculo da tensão no resistor:

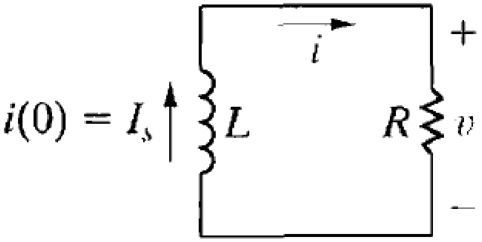
$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \ , \ t \geq 0$$

$$v = Ri = I_0 \operatorname{Re}^{-\frac{R}{L}t}$$

- Em t = 0, o valor de v é desconhecido, pois há uma variação instantânea da tensão.
- Portanto, a equação da tensão tem validade somente para t > 0, ou t $\geq 0^+$.

$$v = I_0 \operatorname{Re}^{-\frac{R}{L}t} \ , \ t \geq 0^+$$

$$v(0^-) = 0$$
$$v(0^+) = RI_0$$



Resposta natural de circuitos RL

- **Cálculo da potência dissipada no resistor:**

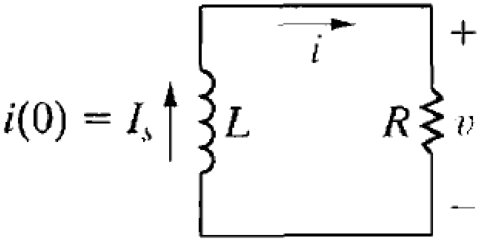
$$p = vi \qquad p = Ri^2 \qquad p = \frac{v^2}{R}$$

$$p = I_0^{\,2}\,\mathrm{R}e^{-2\frac{R}{L}t}\,,\;\; t \geq 0^+$$

- **Cálculo da energia fornecida ao resistor após a chave ser aberta:**

$$w = \int_0^t p\,dx \qquad w = \int_0^t I_0^{\,2}\,\mathrm{R}e^{-2\frac{R}{L}x}\,dx \qquad w = \frac{1}{-2(R/L)} I_0^{\,2} R\left(e^{-2\frac{R}{L}t} - 1\right)$$

$$w = \frac{1}{2} L I_0^{\,2}\left(1 - e^{-2\frac{R}{L}t}\right) \qquad t \geq 0^+$$



Resposta natural de circuitos RL

Constante de tempo (τ):

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

Então:

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \ , \ t \geq 0$$

$$v(t) = I_0 \, \mathrm{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \ , \ t \geq 0^+$$

$$p = I_0{}^2 \, \mathrm{R} e^{-2\frac{t}{\tau}} \ , \ t \geq 0^+$$

$$w = \frac{1}{2} L I_0{}^2 \left(1 - e^{-2\frac{t}{\tau}} \right) \qquad t \geq 0^+$$

Resposta natural de circuitos RL

Procedimento para o cálculo da resposta natural:

1) Determinar a corrente inicial, I_0 que passa pelo indutor ;

2) Calcule a constante de tempo do circuito, $\tau = L/R$;

3) Use a equação $i\,(t) = I_0\, e^{-t/\tau}$, para gerar i(t) a partir de I_0 e τ.

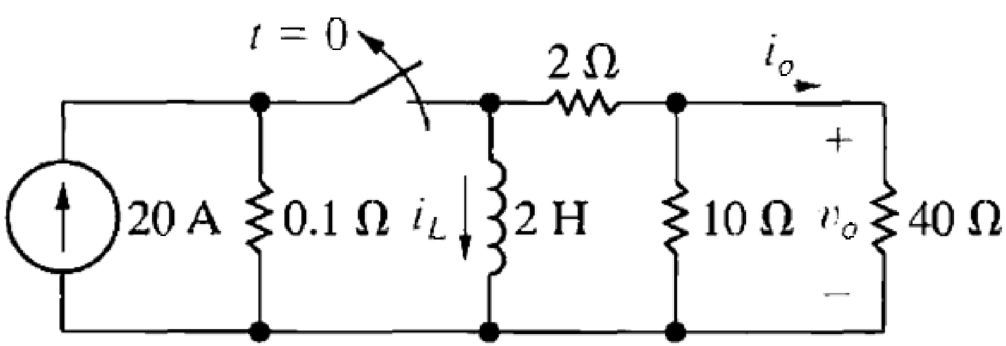
Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

Exemplo 1: Resposta natural de Circuitos RL

- A chave esteve fechada por um longo tempo e foi aberta em t=0:

a) Determine i_L para $t \geq 0$.

1) Tensão no indutor deve ser 0 em $t = 0^-$
2) Corrente inicial no indutor = 20 A em $t = 0^-$
3) Então $i_L(0+) = 20A$
4) $R_{eq}=2 + (40||10) = 10\ \Omega$
5) Constante de tempo $\tau = (L/R_{eq}) = 0{,}2$ s
6) Expressão para a corrente: $i_L(t)=20e^{-5t}\ A,\ t \geq 0$



Exemplo 1: Resposta natural de Circuitos RL

- A chave esteve fechada por um longo tempo e foi aberta em t=0:

b) Determine a corrente i_o no resistor de 40 Ω para t ≥ 0^+.

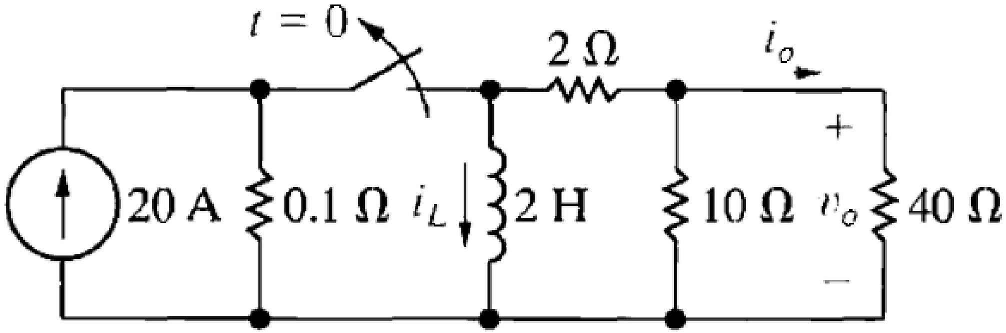
A corrente no resistor de 40 Ω pode determinada pela divisão de corrente:

$$i_o = -i_L \frac{10}{10+40} = -i_L \times 0{,}2 \qquad\qquad i_L(t) = 20e^{-5t}\ A, \quad t \geq 0$$

Essa expressão é válida para $t \geq 0^+$ porque i_o=0 em t=0^-.

O indutor comporta-se como um curto-circuito antes da chave ser aberta, produzindo uma variação instantânea na corrente i_o, então:

$$i_o(t) = -4e^{-5t}\ A, \quad t \geq 0^+$$



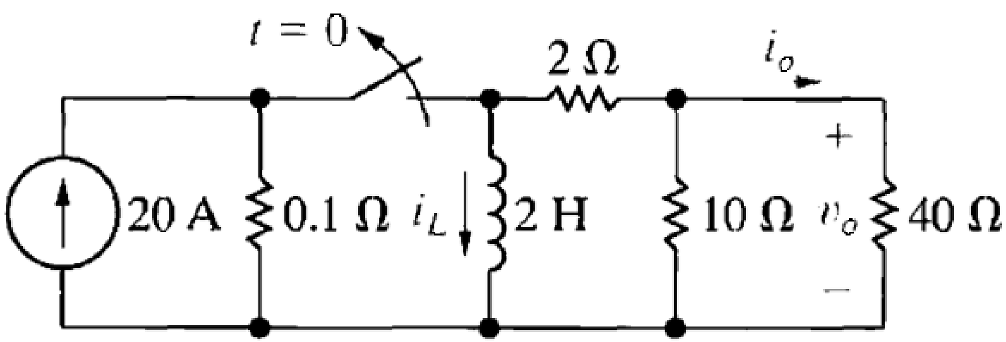
Exemplo 1: Resposta natural de Circuitos RL

- A chave esteve fechada por um longo tempo e foi aberta em t=0:

c) Determine a expressão $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$.

$$i_o(t) = -4e^{-5t}\ A, \quad t \geq 0^+$$

$$v_o(t) = 40 i_o = -160 e^{-5t}\ V\ ,\ t \geq 0^+$$



Exemplo 1: Resposta natural de Circuitos RL

- A chave esteve fechada por um longo tempo e foi aberta em t=0:

d) A porcentagem da energia total armazenada no indutor de 2 H que é dissipada no resistor de 10 Ω.

1) A potência dissipada no resistor de 10Ω é:

$$p_{10\Omega}(t) = \frac{v_o^2}{R} = \frac{\left(-160e^{-5t}\right)^2}{10} = 2.560e^{-10t}\,W \;,\; t \geq 0^+$$

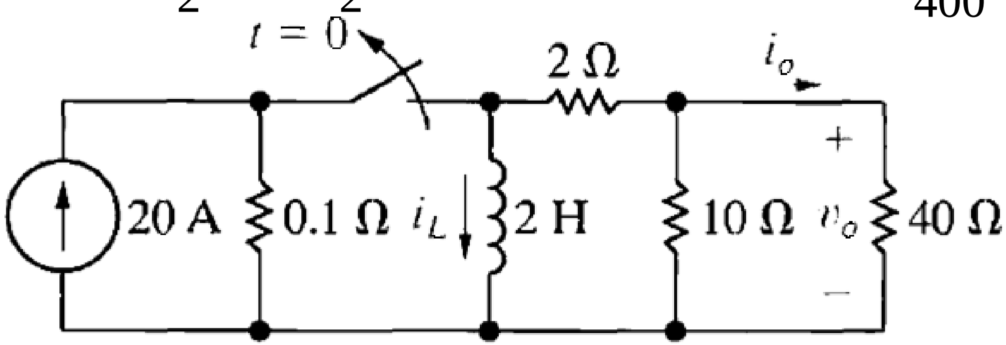
2) A energia total dissipada no resistor de 10Ω é:

$$w_{10\Omega}(t) = \int_0^\infty 2.560e^{-10t}dt = 2.560\left(\frac{e^{-10t}}{-10}\right)\Bigg|_0^\infty = (0)-(-256) = 256\,J$$

3) A energia inicial armazenada no indutor de 2 H é:

$$w(0) = \frac{1}{2}Li_0^{\,2} = \frac{1}{2}(2)(400) = 400J$$

$$\frac{256}{400}(100) = 64\%$$



Resposta natural de circuitos RC

Considerações iniciais:

- A chave está fechada há <u>longo tempo.</u>

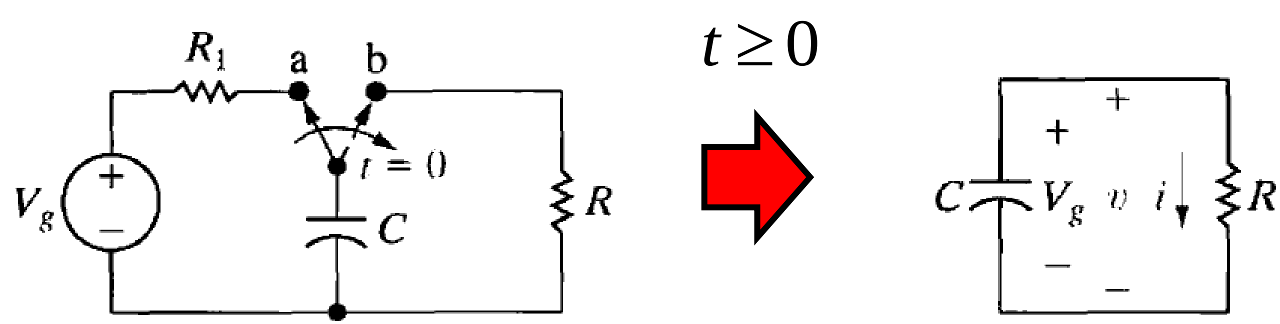
- Todas as tensões e correntes atingiram valores constantes (cc).

-O capacitor se comporta como um circuito aberto.

$$i = C\frac{dv}{dt} = 0$$

- Não circula corrente pelo capacitor.

Resposta natural: determinar $v(t)$ e $i(t)$ para t $\geq$ 0



Resposta natural de circuitos RC

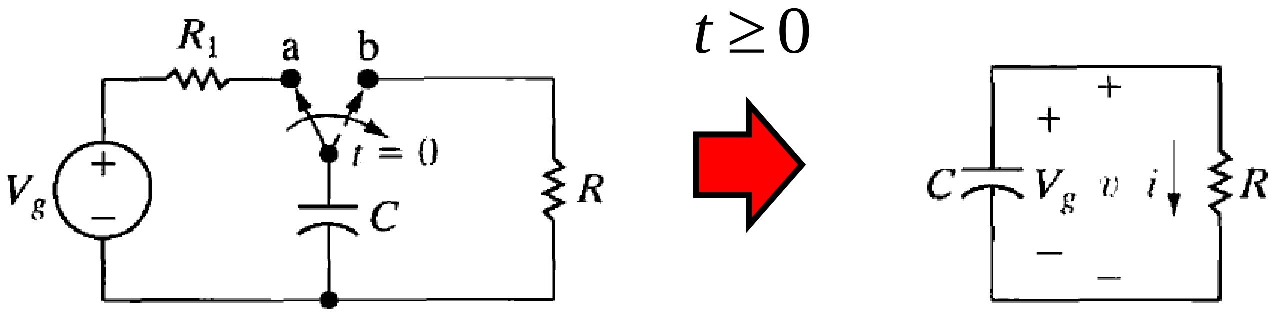
Cálculo da expressão da tensão:

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=0$$

$$\boxed{v(t)=v(0)e^{-t/RC}\ ,\ t\geq 0}$$

$$v(0^-)=v(0)=v(0^+)=V_g=V_0$$

$$t\geq 0$$



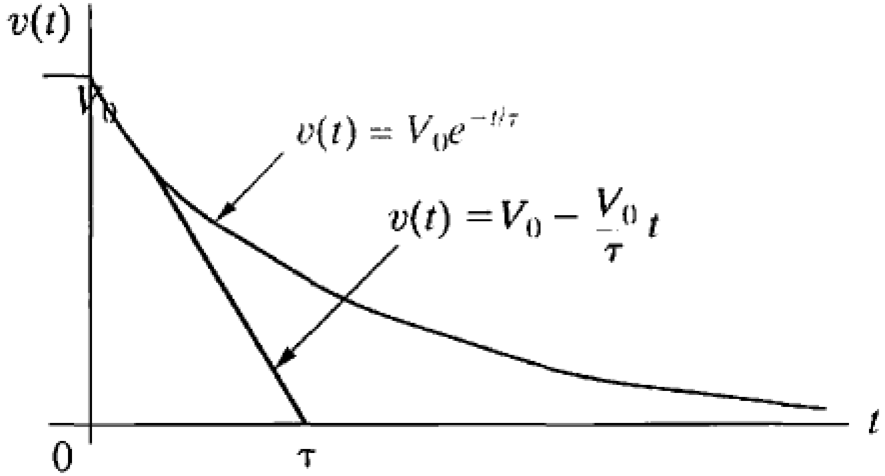
Resposta natural de circuitos RC

- **Constante de tempo:**

$$\tau = RC$$

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \ , \ t \geq 0$$

A resposta natural de um circuito RC é uma queda exponencial a partir da tensão inicial.



Resposta natural de circuitos RC

- **Conjunto de equações para um circuito RC:**

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \ , \ t \geq 0$$

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \ , \ t \geq 0^+$$

$$p = vi = \frac{V_0^{\ 2}}{R} e^{-2\frac{t}{\tau}} \ , \ t \geq 0^+$$

$$w = \frac{1}{2} C V_0^{\ 2} \left(1 - e^{-2\frac{t}{\tau}} \right) \qquad t \geq 0$$

Resposta natural de circuitos RC

- **Procedimento para o cálculo da resposta natural:**

1) Determinar a tensão inicial V_0 no capacitor;

2) Calcule a constante de tempo do circuito, $\tau = RC$;

3) Use a equação $v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$, para gerar v(t) a partir de V_0 e τ.

Exemplo: Resposta natural de circuitos RC

- Considerando que a chave muda para o estado *y* em $t = 0$, determine:

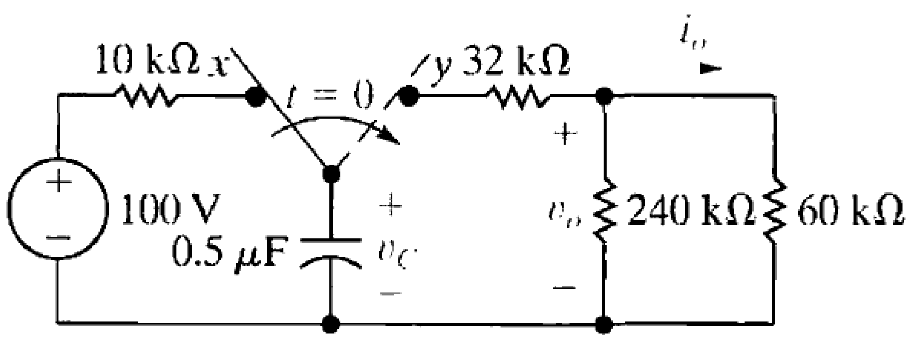
a) $v_C(t)$ para $t \geq 0$

O capacitor está carregado com 100 V;

Resistência equivalente: Req = 80 kΩ ;

Constante de tempo: $\tau = RC = \left(80 \times 10^{3}\right)\left(0{,}5 \times 10^{-6}\right) = 0{,}04 = 40\, ms$

Então: $v_c\left(t\right) = 100e^{-25t}\, V, t \geq 0$



Exemplo: Resposta natural de circuitos RC

- Considerando que a chave muda para o estado *y* em *t*=0, determine:

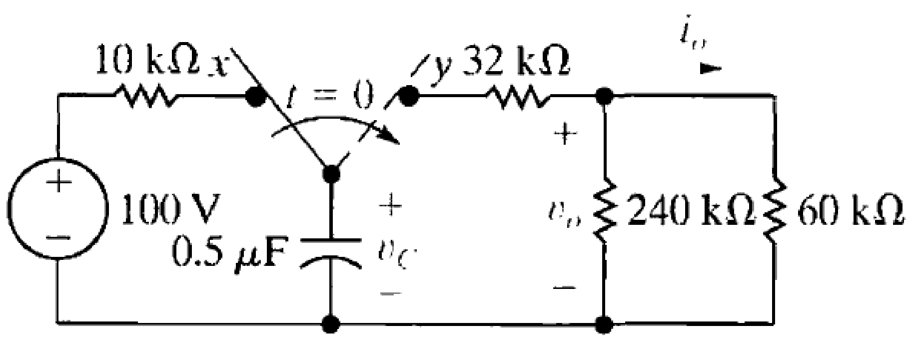
b) $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$

$$v_c(t) = 100e^{-25t}\,V,\, t \geq 0$$

$$R_{eq}(240k \parallel 60k) = 48k\Omega \qquad v_o(t) = v_C(t)\frac{R_{eq1}}{R_{eq1}+32k} = v_C(t)\frac{48}{80}$$

$$v_o(t) = 60e^{-25t}\,V,\, t \geq 0^+$$

A expressão para $v_o(t)$ é válida para $t \geq 0^+$ porque $v_o(0^-) = 0$. Portanto, existe uma variação instantânea da tensão no resistor de 240 kΩ.

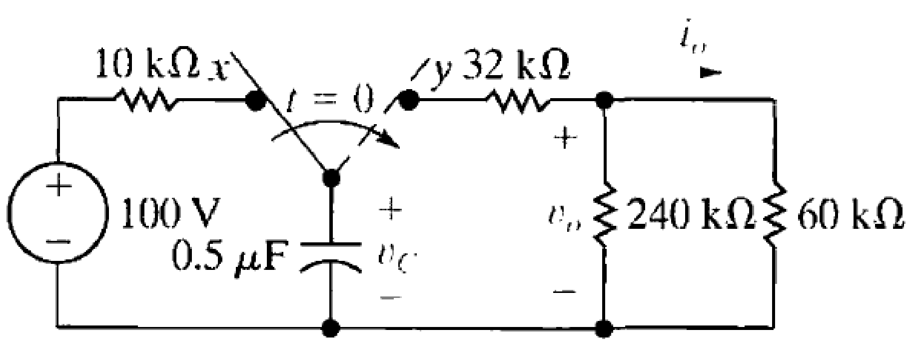


Exemplo: Resposta natural de circuitos RC

- Considerando que a chave muda para o estado y em t=0, determine:

c) i_o(t) para $t \geq 0^+$

$$i_o(t) = \frac{v_o(t)}{60\times10^3} = \frac{60e^{-25t}}{60\times10^3} = e^{-25t}\ mA\ ,\ t \geq 0^+$$



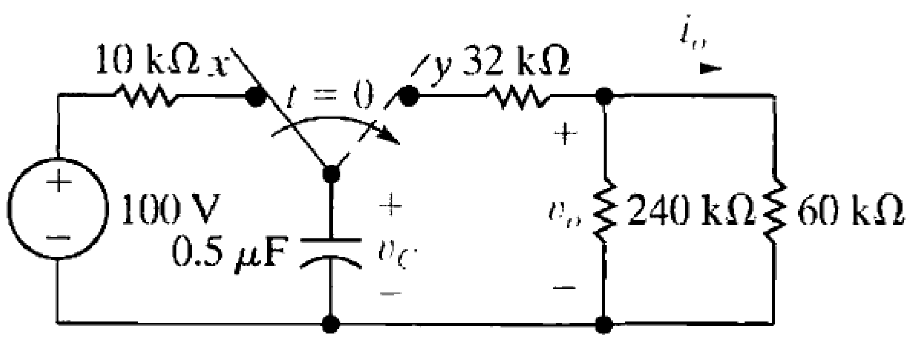
Exemplo: Resposta natural de circuitos RC

- Considerando que a chave muda para o estado y em t=0, determine:

d) A energia total dissipada no resistor de 60kΩ.

$$p_{60k\Omega}(t) = Ri_o^{\,2}(t) = \left(60\times10^{3}\right)\left(e^{-25t}\times10^{-3}\right)^2 = 60e^{-50t}\ mW,\ t\geq 0^+$$

$$w_{60k\Omega} = \int_0^{\infty} 60e^{-50t} = 60(0) - 60\left(\frac{1}{-50}\right) = 1{,}2\,mJ,\ t\geq 0^+$$



Exemplo 2: Resposta natural de circuitos RC

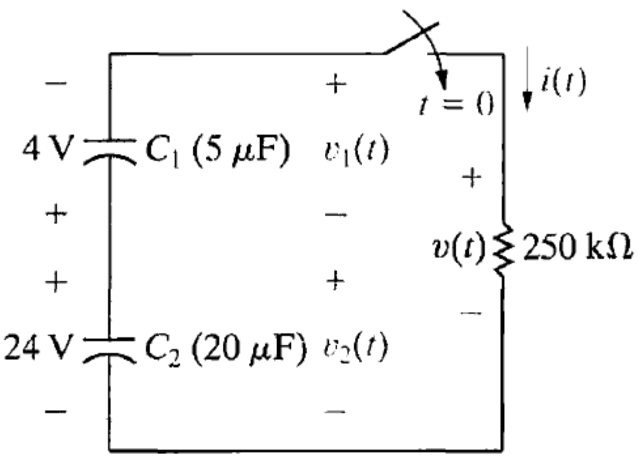
- As tensões iniciais em C1 e C2 foram estabelecidas por fontes não mostradas.

a) Calcule $v(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ para $t \geq 0$ e $i(t)$ para $t \geq 0^+$.

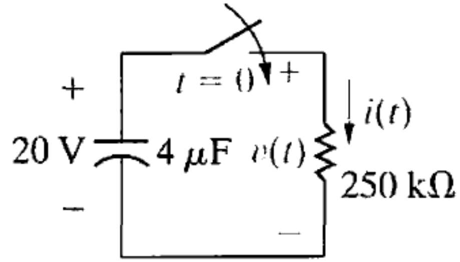
$$V_0 = 20V \qquad \tau = RC = \left(250\times10^3\right)\left(4\times10^{-6}\right) = 1s$$

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \;,\; t \geq 0 \;\Rightarrow\; v(t) = 20e^{-t} \;,\; t \geq 0$$

$$i(t) = \frac{20e^{-t}}{250\times10^3} = 80e^{-t}\ \mu A \;,\; t \geq 0^+$$



- Circuito equivalente:



$$C_{eq} = \frac{5\times20}{5+20} = 4\mu F$$

Exemplo 2: Resposta natural de circuitos RC

- As tensões iniciais em C1 e C2 foram estabelecidas por fontes não mostradas.

a) Calcule $v(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ para $t \geq 0$ e $i(t)$ para $t \geq 0^+$.

$$v(t) = 20e^{-t} \;,\; t \geq 0$$

$$i(t) = 80e^{-t}\ \mu A \;,\; t \geq 0^+$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx + v_1(0)$$

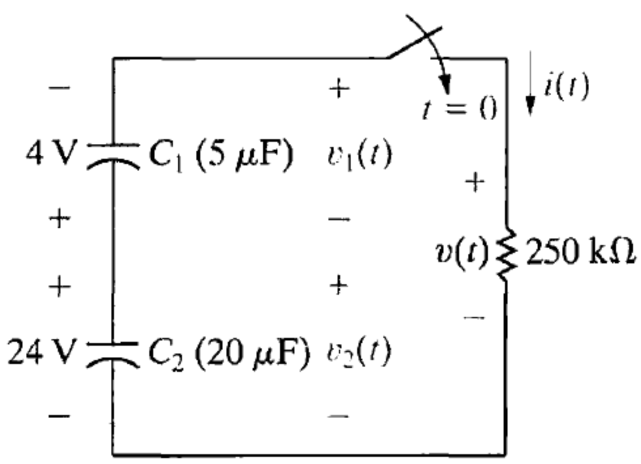
$$v_1(t) = -\frac{1}{(5\times10^{-6})}\int_0^t 80\times10^{-6} e^{-x}dx \;-4$$

$$v_1(t) = -16\int_0^t e^{-x}dx \;-4$$

$$v_1(t) = -16\left[\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right)\Bigg|_0^t\right] - 4$$

$$v_1(t) = -16\left(-e^{-t}+1\right) - 4$$

$$v_1(t) = 16e^{-t} - 20V,\; p/\; t \geq 0$$



Exemplo 2: Resposta natural de circuitos RC

- As tensões iniciais em C1 e C2 foram estabelecidas por fontes não mostradas.

a) Calcule $v(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ para $t \geq 0$ e $i(t)$ para t $\geq 0^+$.

$$v(t) = 20e^{-t} \;, \; t \geq 0$$

$$i(t) = 80e^{-t} \; \mu A \;, \; t \geq 0^+$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx + v_1(0)$$

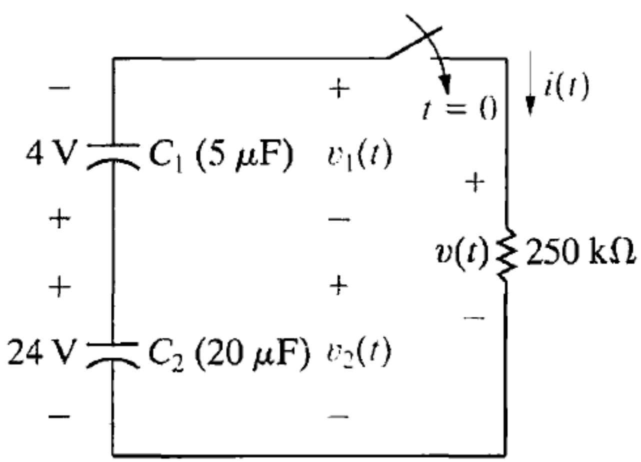
$$v_2(t) = -\frac{1}{\left(20\times10^{-6}\right)}\int_0^t 80\times10^{-6} e^{-x}dx \; + 24$$

$$v_2(t) = -4\int_0^t e^{-x}dx \; + 24$$

$$v_2(t) = -4\left[\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right)\Bigg|_0^t\right] + 24$$

$$v_2(t) = -4\left(-e^{-t} + 1\right) + 24$$

$$v_2(t) = 4e^{-t} + 20V, \; p/\; t \geq 0$$



Exemplo 2: Resposta natural de circuitos RC

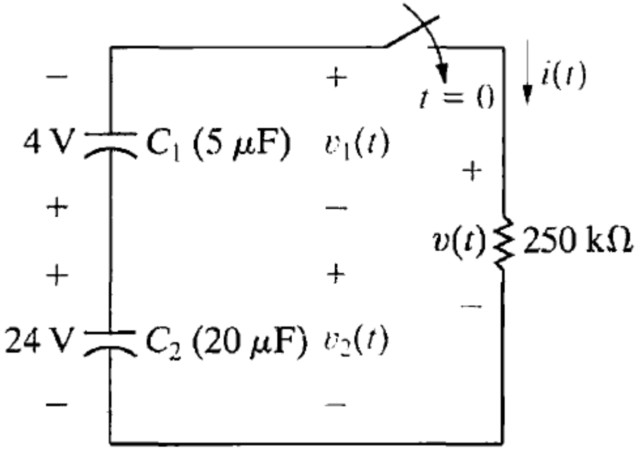
- As tensões iniciais em C1 e C2 foram estabelecidas por fontes não mostradas.

b) A energia inicial armazenada nos capacitores.

$$w = \frac{1}{2} C v^2$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\left(5\times10^{-6}\right)4^2 \Rightarrow w_1 = 40\mu J$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\left(20\times10^{-6}\right)24^2 \Rightarrow w_2 = 5{,}76 mJ$$



$$w_{total\_inicial} = 5{,}76 mJ + 40\mu J = 5{,}8\, mJ$$

Exemplo 2: Resposta natural de circuitos RC

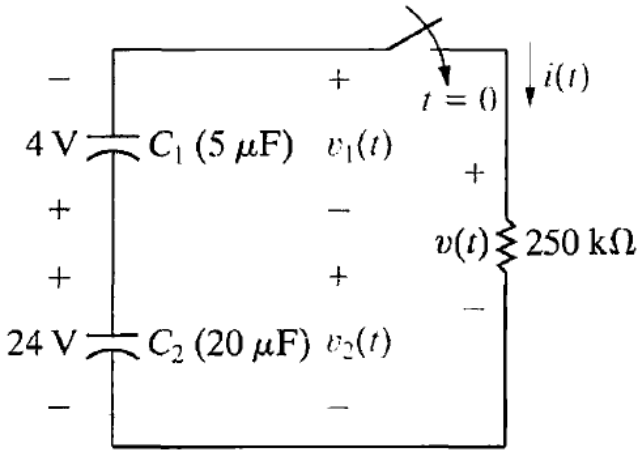
- As tensões iniciais em C1 e C2 foram estabelecidas por fontes não mostradas.

c) A energia armazenada nos capacitores quando t→∞.

- Quando t→∞: $v_1(t) = -20V$ $\quad v_2(t) = 20V$

$$w_1 = \frac{1}{2}\left(5\times10^{-6}\right)\left(-20\right)^2 \Rightarrow w_1 = 1mJ$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\left(20\times10^{-6}\right)20^2 \Rightarrow w_2 = 4mJ$$



$$w_{total\_final} = 1mJ + 4mJ = 5mJ$$

Exemplo 2: Resposta natural de circuitos RC

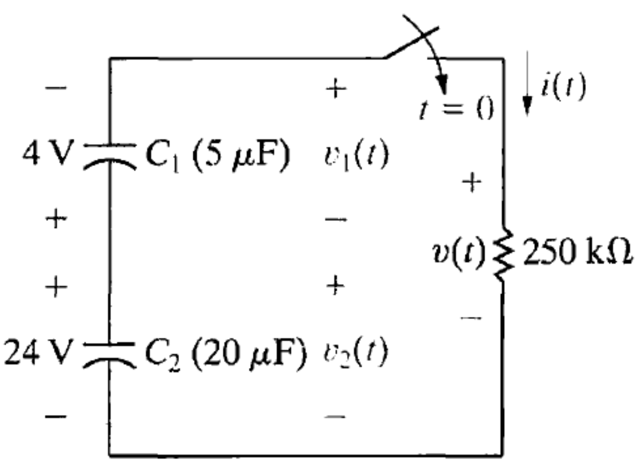
- As tensões iniciais em C1 e C2 foram estabelecidas por fontes não mostradas.

d) A energia total fornecida ao resistor.

$$v(t) = 20e^{-t} \quad , \; t \geq 0$$

$$w_{250k\Omega} = \int_0^{\infty} p\,dt = \int_0^{\infty} \frac{\left(20e^{-t}\right)^2}{250000}\,dt$$

$$w_{250k\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{400e^{-2t}}{250\times 10^3}\,dt \Rightarrow = \int_0^{\infty} \frac{1{,}6e^{-2t}}{10^3}\,dt \Rightarrow = 1{,}6\times 10^{-3}\int_0^{\infty} e^{-2t}\,dt$$



$$= 1{,}6\times 10^{-3}\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^{\infty} \qquad = -0{,}8\times 10^{-3}\left(0-1\right)$$

$$w_{250k\Omega} = 800\;\mu J$$

Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

Referências Bibliográficas:

Nilsson, J.W. e Riedel, S.A., Circuitos Elétricos, 8ª Edição, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2009.

Svodoba, J.A. and Dorf, R.C., Introduction to Electric Circuits, 9th edition, Wiley, 2011.