Universidade Federal do Ceará
Instituto de Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica

# Circuitos Elétricos

## Capítulo 7 B – Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

**Prof. Fabrício Nogueira**

# Resposta ao Degrau de Circuitos RL e RC

- **Resposta ao degrau:** tensões e correntes em circuitos RL e RC quando são aplicadas repentinamente no circuito fontes de tensão ou corrente cc.

- Resposta do circuito quando a energia está sendo armazenada no indutor ou no capacitor.

Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

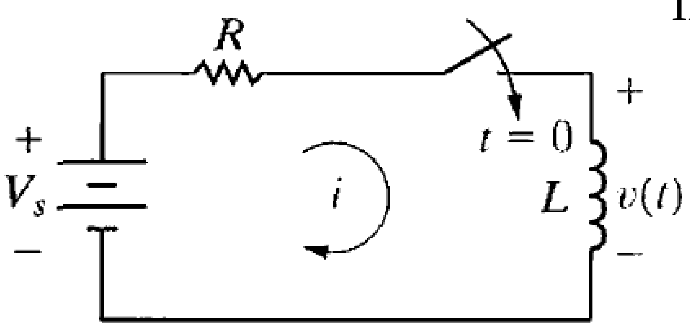
# Resposta ao Degrau de Circuitos RL

- Determinação da expressão da corrente em função do tempo:

$$V_s = Ri + L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{-Ri + V_s}{L} = \frac{-R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right) \Rightarrow \frac{di}{dt}dt = \frac{-R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right)dt$$

$$di = \frac{-R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right)dt \Rightarrow \frac{di}{i - (V_s/R)} = \frac{-R}{L}dt \Rightarrow \int_{i(t_0)}^{i(t)} \frac{dx}{x - (V_s/R)} = \frac{-R}{L}\int_0^t dy$$

$$\ln\frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = \frac{-R}{L}t \Rightarrow \frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = e^{\frac{-R}{L}t}$$



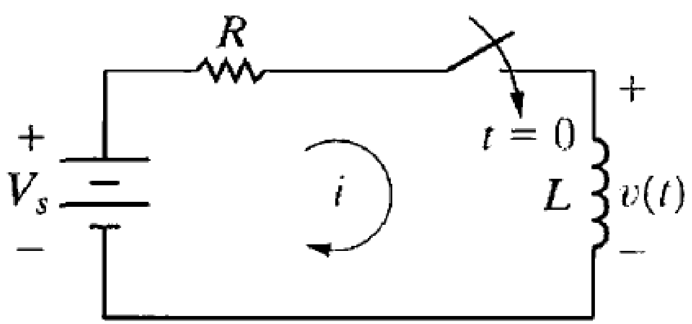

$$\boxed{i(t) = \left(\frac{V_s}{R}\right) + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{\frac{-R}{L}t}}$$

# Resposta ao Degrau de Circuitos RL

- Se a corrente inicial $I_0$ for zero:

$$i(t) = \left(\frac{V_s}{R}\right) + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{\frac{-R}{L}t} \Rightarrow i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}e^{\frac{-R}{L}t}$$

- Após a chave ser fechada, a corrente aumenta exponencialmente de zero a um valor fixo $V_s/R$.
- A constante de tempo L/R determina a rapidez do aumento.
- Uma constante de tempo após a chave ter sido fechada, a corrente atinge aproximadamente 63% do valor final:




$$i(\tau) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}e^{-1} \approx 0{,}6321\frac{V_s}{R}$$

# Resposta ao Degrau de Circuitos RL

- A tensão no indutor é Ldi/dt, então:

$$i(t)=\left(\frac{V_s}{R}\right)+\left(I_0-\frac{V_s}{R}\right)e^{\frac{-R}{L}t} \Rightarrow v=L\left(-\frac{R}{L}\right)\left(I_0-\frac{V_s}{R}\right)e^{\frac{-R}{L}t} \Rightarrow v=\left(V_s-I_0R\right)e^{\frac{-R}{L}t}$$

- Se a corrente inicial $I_0$ for zero:

$$v=V_se^{\frac{-R}{L}t}$$

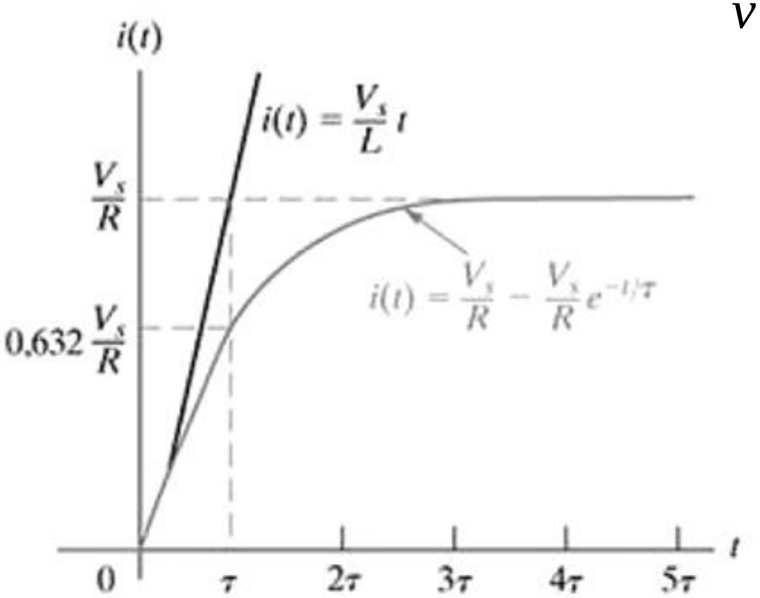



Figura 7.17 ▲ Resposta a um degrau do circuito *RL* mostrado na Figura 7.16 quando $I_0 = 0$.

$$\tau=\frac{L}{R}$$

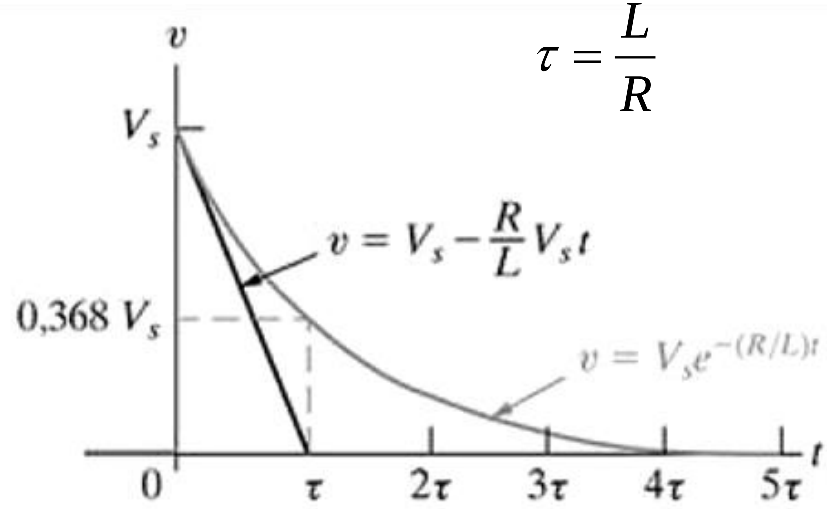



Figura 7.18 ▲ Tensão no indutor *versus* tempo.

# Exemplo: Resposta ao Degrau de Circuitos RL

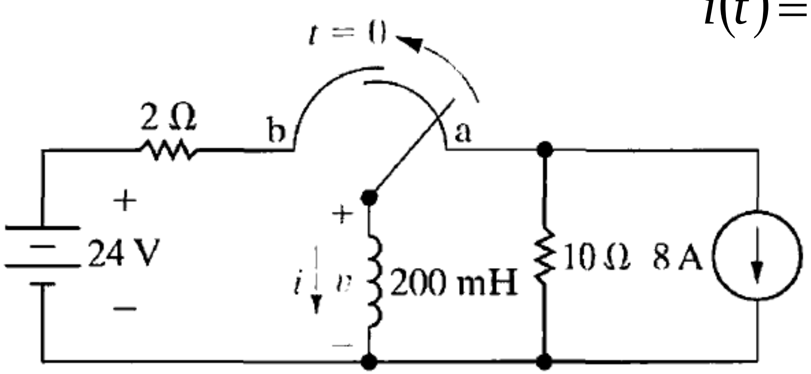
a) Determine a expressão para i(t) para t ≥ 0.

$$I_0 = -8\,A \qquad i_{final} = V/R = 24/2 = 12\,A \qquad \tau = L/R = \left(200\times10^{-3}\right)/2 = 100\,ms$$

Substituindo os valores em: $i(t) = \left(\frac{V_s}{R}\right) + \left(I_0 - \left(\frac{V_s}{R}\right)\right)e^{\frac{-R}{L}t}$

Resulta: $i(t) = 12 + (-8-12)e^{\frac{-t}{0,1}}$

$$i(t) = 12 - 20e^{-10t}\;A\;,\; t \geq 0$$



# Exemplo: Resposta ao Degrau de Circuitos RL

b) Determine a tensão inicial no indutor.

$$i(t) = 12 - 20e^{-10t} \ A$$

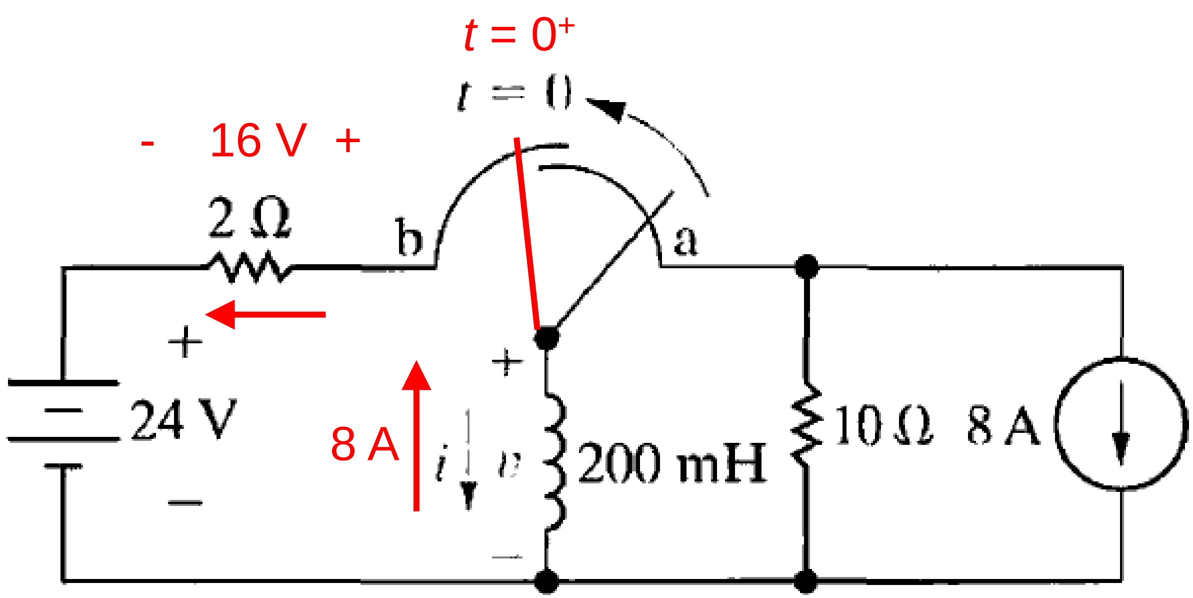
$$\frac{di}{dt} = 200e^{-10t} \ A$$

$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$= 0{,}2\left(200e^{-10t}\right)$$

$$= 40e^{-10t} \ V \ , \ t \geq 0^+$$

$$v\left(0^+\right) = 40V$$



# Circuitos de 1ª Ordem RL e RC

## Exemplo: Resposta ao Degrau de Circuitos RL

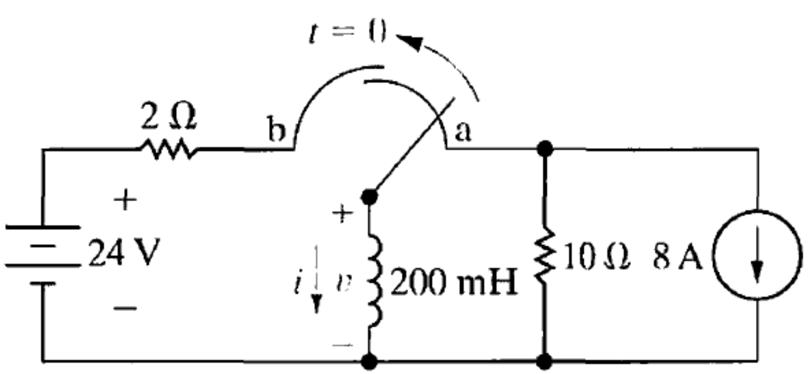
c) Quantos milisegundos após a chave ter mudado de posição a tensão no indutor atinge 24 V.

$$v = 40e^{-10t}\,V \;,\; t \geq 0^{+}$$

$$24 = 40e^{-10t}\,V$$

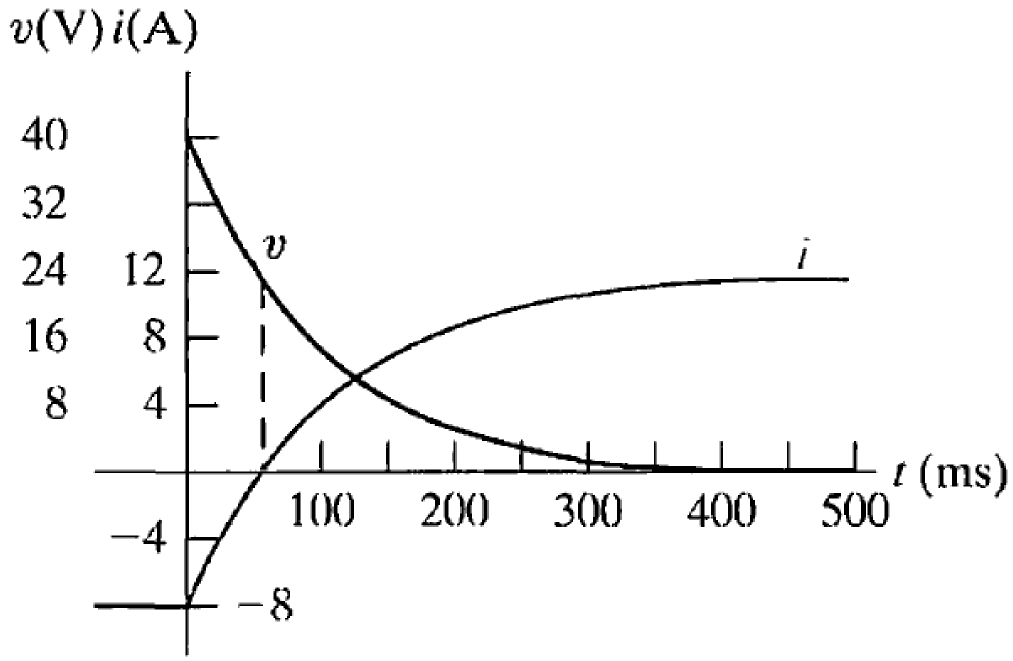
$$-10t = \ln\frac{24}{40}$$

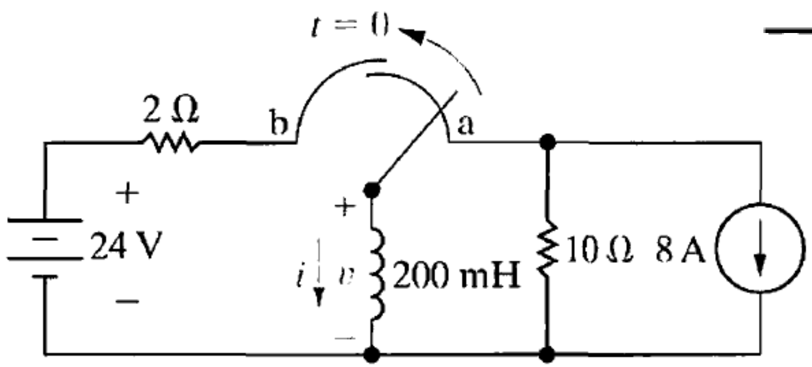
$$t = 51{,}08 \times 10^{-3} = 51{,}08\,ms$$



# Exemplo: Resposta ao Degrau de Circuitos RL

d) Gráficos de i(t) e v(t) em função do tempo.



# Resposta ao Degrau de Circuitos RC

- Determinação da expressão da corrente em função do tempo:

$$I_s = C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} \Rightarrow \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{I_s}{C}$$

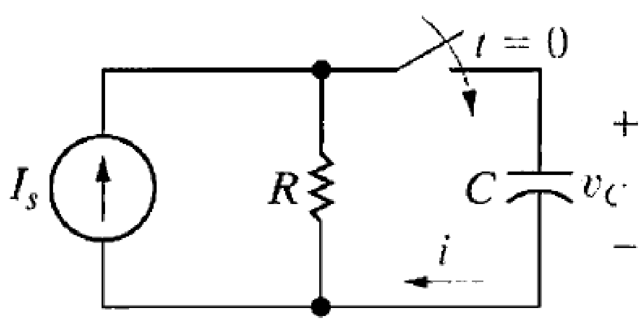
Circuito RL

$$V_s = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$i(t) = \left(\frac{V_s}{R}\right) + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{\frac{-R}{L}t}$$

$$v_s \Leftrightarrow I_s$$
$$L \Leftrightarrow C$$
$$R \Leftrightarrow 1/R$$
$$I_0 \Leftrightarrow V_0$$

$$\boxed{v_C(t) = I_sR + (V_0 - I_sR)e^{-t/RC} \quad , \quad t \geq 0}$$



# Exemplo: Resposta ao Degrau de Circuitos RC

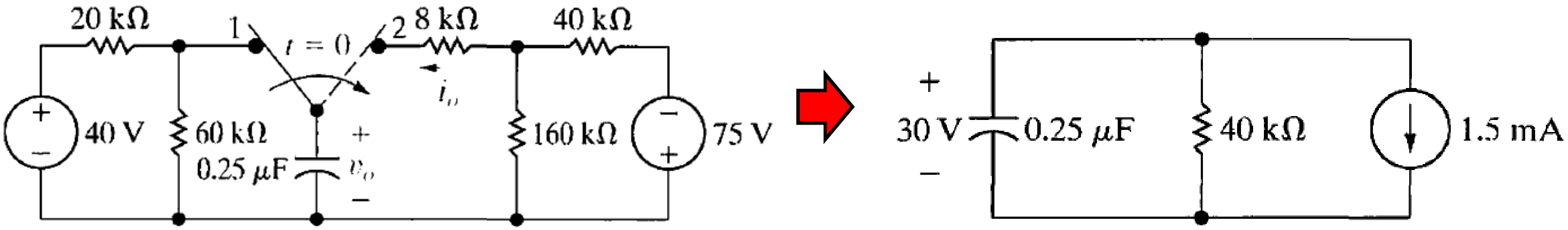
a) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

$$V_0 = 40\frac{60}{80} = 30V$$

Para utilizarmos as equações para tensão e corrente do slide anterior devemos determinar o Equivalente Norton nos terminais do capacitor:

$$R_{th} = (160k \parallel 40k) + 8k = 40k\Omega \qquad V_{th} = -(75)\frac{160\times10^3}{(40+160)\times10^3} = -60V$$

$$i_{Norton} = \frac{V_{th}}{R_{th}} = -1{,}5\,mA$$



# Exemplo: Resposta ao Degrau de Circuitos RC

a) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Como:

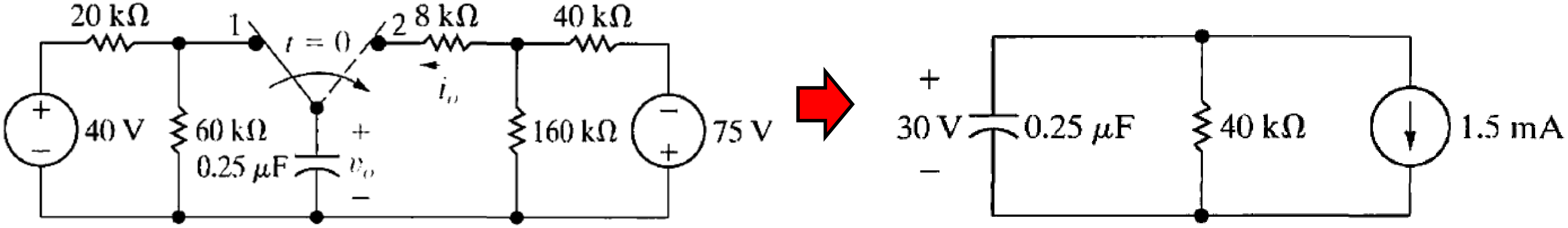
$RC = (40\times10^3)(0{,}25\times10^{-6}) = 10\,ms$ | $I_sR = (-1{,}5\times10^{-3})(40\times10^3) = -60V$ | $V_0 = 30V$

Então:

$$v_C = I_sR + (V_0 - I_sR)e^{-t/RC} \quad , \quad t \geq 0$$

$$v_o = -60 + (30 - (-60))e^{-100t} \quad , \quad t \geq 0$$

$$v_o = -60 + 90e^{-100t} \quad , \quad t \geq 0$$



# Exemplo: Resposta ao Degrau de Circuitos RC

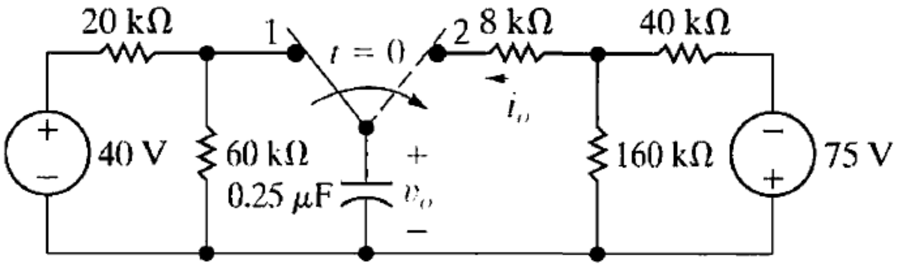
b) Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0$.

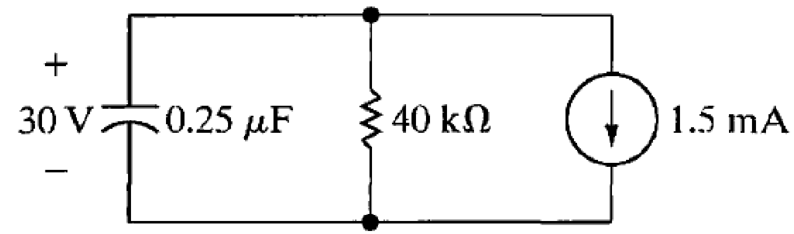
$$i_o = C\frac{dv_o}{dt} \Rightarrow i_o = \left(0{,}25\times10^{-6}\right)\frac{d\left(-60+90e^{-100t}\right)}{dt}$$

$$i_o = \left(0{,}25\times10^{-6}\right)\left(-9000e^{-100t}\right)$$

$$i_o = -2{,}25\times10^{-3}e^{-100t}\ A$$

$$i_o = -2{,}25e^{-100t}\ mA$$



# Exemplo: Resposta ao Degrau de Circuitos RC

c) Determine a expressão da tensão em $R$=160kΩ. Admitimos que essa tensão é $v_a$ e tem polaridade positiva no terminal superior.

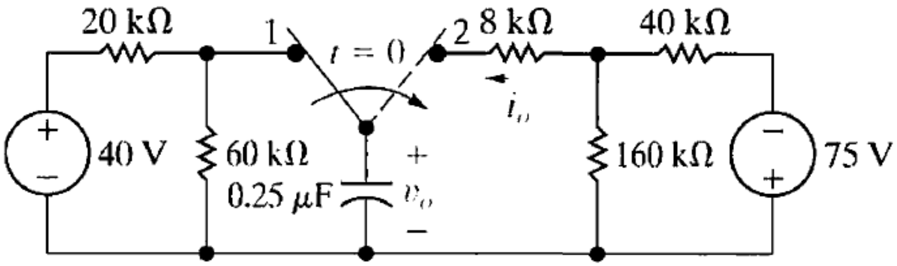
$$v_o = -60 + 90e^{-100t}$$

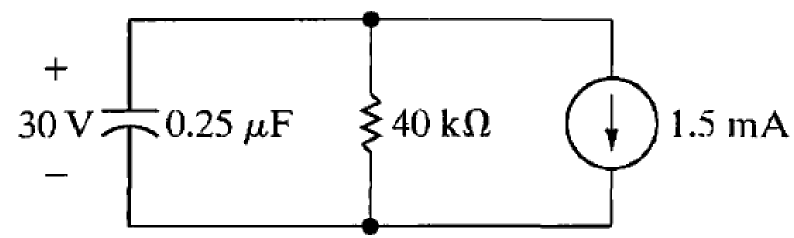
$$-\frac{(v_o - v_a)}{8k} + \frac{v_a}{160k} + \frac{(v_a - (-75))}{40k} = 0$$

$$\frac{v_a + 60 - 90e^{-100t}}{8k} + \frac{v_a}{160k} + \frac{(v_a + 75)}{40k} = 0$$

$$v_a\left(1 + \frac{1}{20} + \frac{1}{5}\right) + 60 + 15 - 90e^{-100t} = 0$$

$$v_a = \left(90e^{-100t} - 75\right)/1{,}25 \quad \Rightarrow \quad v_a = 72e^{-100t} - 60 \;,\; t \geq 0^+$$



Circuitos Resistivos

## Referências Bibliográficas:

Nilsson, J.W. e Riedel, S.A., Circuitos Elétricos, 8ª Edição, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2009.

Svodoba, J.A. and Dorf, R.C., Introduction to Electric Circuits, 9th edition, Wiley, 2011.