Universidade Federal do Ceará
Instituto de Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica

Circuitos Elétricos

Capítulo 8 – Circuitos de 2ª Ordem RLC

Prof. Fabrício Nogueira

Circuitos de 2ª Ordem RLC

Introdução - Objetivos

- Circuitos com dois elementos armazenadores de energia irredutíveis, indutores e/ou capacitores.

- Circuitos representados por equações diferenciais de 2ª ordem.

- Determinar a resposta natural e ao degrau de circuitos de 2ª ordem

- O estudo é limitado a circuitos com estrutura série e paralelo.

Obs.: A ordem de uma equação diferencial que representa um circuito é no máximo igual ao número de capacitores mais o número de indutores.

Circuitos de 2ª Ordem RLC

Introdução

- Um circuito RLC pode ser representado pela equação diferencial:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0{}^2 x(t) = f(t)$$

Onde $x(t)$ e $f(t)$ são respectivamente a saída e a entrada do circuito.

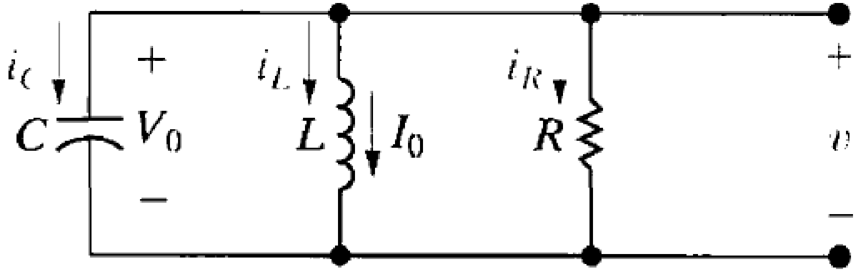
- A saída normalmente é uma corrente em um indutor ou uma tensão em um capacitor;
- As tensões e/ou correntes de fontes independentes de corrente e tensão são as entradas do circuito.
- Os parâmetros α e ω serão definidos adiante.

Circuitos de 2ª Ordem RLC

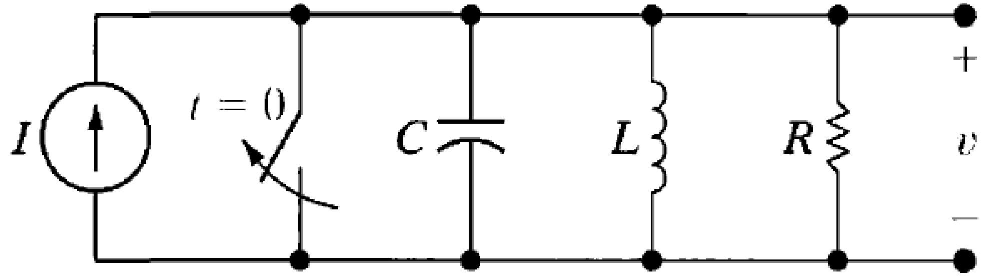
Introdução

- **Circuito RLC paralelo**

Resposta natural



Resposta a um degrau

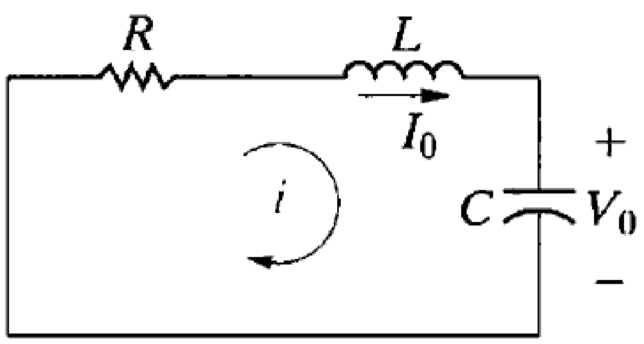


Circuitos de 2ª Ordem RLC

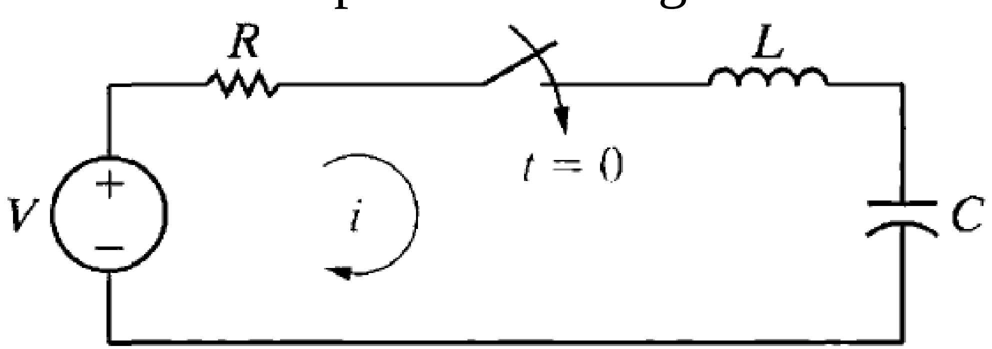
Introdução

Circuito RLC série

Resposta natural



Resposta a um degrau



Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Equação diferencial:

A tensão é a mesma e aplicando a soma das correntes que saem do nó superior:

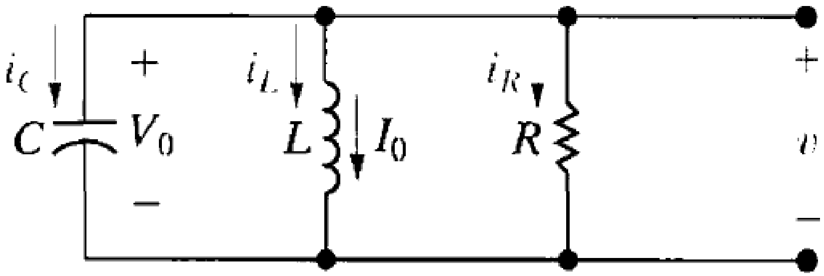
$$\frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau+I_0+C\frac{dv}{dt}=0$$

Diferenciando em relação a t:

$$\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{L}+C\frac{d^2v}{dt^2}=0$$

Dividindo por C temos:

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{LC}=0$$



Equação diferencial de 2ª ordem com coeficientes constantes.

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Solução geral da equação diferencial de 2ª ordem:

Uma abordagem clássica para resolver a Eq. Diferencial de 2ª ordem é admitir que a solução seja de forma exponencial, isto é, que a tensão seja na forma:

$$v = Ae^{st}$$

em que A e s são constantes desconhecidas.

Então:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \Rightarrow As^2e^{st} + \frac{As}{RC}e^{st} + \frac{Ae^{st}}{LC} = 0$$

Circuitos de 2ª Ordem RLC

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

- **Solução geral da equação diferencial de 2ª ordem:**

Continuação:

$$As^2e^{st}+\frac{As}{RC}e^{st}+\frac{Ae^{st}}{LC}=0$$

$$Ae^{st}\left(s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}\right)=0$$

Para uma solução viável, a expressão entre parênteses deve ser zero:

$$s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}=0$$

(Equação característica da eq. diferencial, circuito RLC em paralelo)

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

- **Solução geral da equação diferencial de 2ª ordem:**

As duas raízes são:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \text{e} \quad s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Ou:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2} \quad \text{e} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$$

Em que:

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

Fator de amortecimento

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Frequência de ressonância
(rad/s)

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Solução geral da equação diferencial de 2ª ordem:

Podemos expressar a equação da solução em termos de α e ω_0 como:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0{}^2 = 0$$

Os dois valores de s indicam que existem duas soluções possíveis para *v*, ambas na forma:

$$v_1 = A_1 e^{s_1 t} \qquad v_2 = A_2 e^{s_2 t}$$

Uma **solução completa** necessita de uma combinação linear de v_1 e v_2. Então a resposta natural de um circuito RLC em paralelo é:

$$v = v_1 + v_2 = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Onde as constantes A_1 e A_2 são determinadas a partir dos valores iniciais de $v(0)$ e $dv(0)/dt$.

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

- **Solução geral da equação diferencial:**

TABELA 8.1 Parâmetros da resposta natural do circuito *RLC* em paralelo

Parâmetro	Terminologia	Valor em resposta natural
s_1, s_2	Raízes características	$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$
α	Freqüência de Neper	$\alpha = \frac{1}{2RC}$
ω_0	Freqüência angular de ressonância	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Formas da resposta natural

Observando as expressões das raízes da equação característica:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\,2}} \qquad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\,2}}$$

Pode-se verificar que existem 3 resultados possíveis:

a) Superamortecida: se $\omega_0^2 < \alpha^2$, ambas as raízes serão reais e distintas.

b) Subamortecida: se $\omega_0^2 > \alpha^2$, as raízes serão complexas conjugadas.

c) Criticamente amortecida: se $\omega_0^2 = \alpha^2$, as raízes serão reais e iguais.

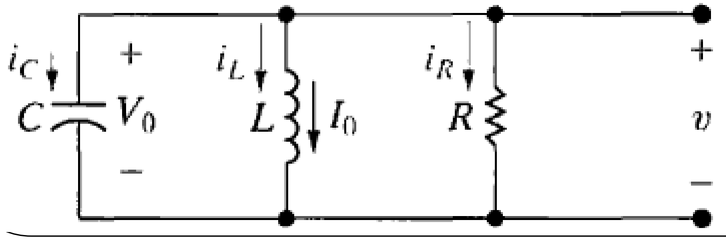
Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Exemplo: a) Determine as raízes da equação característica que descreve o comportamento transitório da tensão. Adote *R*=200 Ω, L=50mH e C=0,2μF.

Para os valores dados de R, L e C:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{(400)(0,2)} = 1{,}25\times 10^4\ rad/s$$

$$\omega_0^{\ 2} = \frac{1}{LC} = \frac{(10^3)(10^6)}{(50)(0,2)} = 10^8\ rad^2/s^2$$



Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Exemplo: a) Determine as raízes da equação característica que descreve o comportamento transitório da tensão.

Então: $\alpha = 1{,}25\times10^4\ rad/s$ $\qquad \omega_0^{\ 2} = 10^8\ rad^2/s^2$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\ 2}}$$

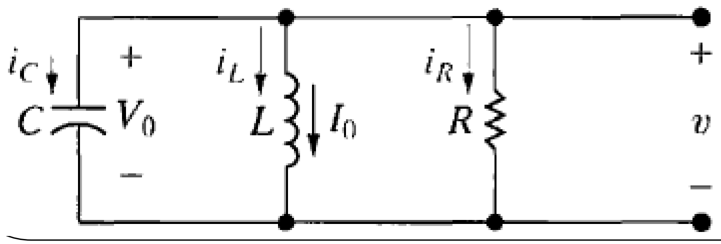
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\ 2}}$$

$$s_1 = -1{,}25\times10^4 + \sqrt{1{,}5625\times10^8 - 10^8}$$

$$= -12500 + 7500 = 5000\ rad/s$$

$$s_2 = -1{,}25\times10^4 - \sqrt{1{,}5625\times10^8 - 10^8}$$

$$= -12500 - 7500 = -20000\ rad/s$$



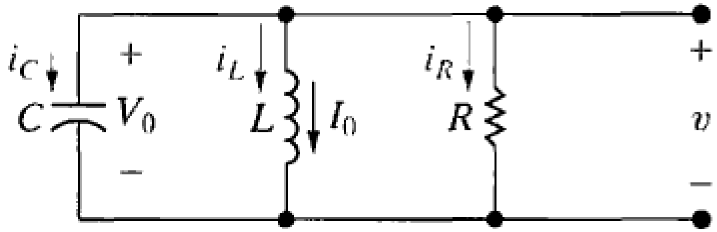
Adote: R=200 Ω, L=50mH e C=0,2μF.

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

- **Exemplo:** b) A resposta será superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida ?

$$\alpha = 1{,}25 \times 10^4 \ rad/s \qquad \omega_0^{\ 2} = 10^8 \ rad^2/s^2$$

Superamortecida, pois: $\omega_0^{\ 2} < \alpha^2$



- **Adote:** R=200 Ω, L=50mH e C=0,2μF.

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Exemplo: c) Repita a) e b) para R=312,5 Ω.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{(625)(0,2)} = 8000\, rad/s$$

$$\alpha^2 = 64 \times 10^6 = 0,64 \times 10^8\, rad^2/s^2$$

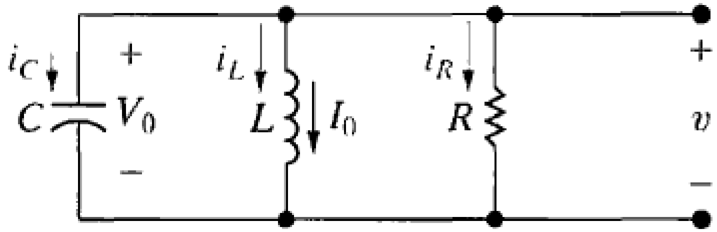
$$\omega_0{}^2 = 10^8\, rad^2/s^2$$

$$s_1 = -8000 + j6000\, rad/s$$

$$s_2 = -8000 - j6000\, rad/s$$

$$\sqrt{-1} = j$$

Subamortecida, pois: $\omega_0{}^2 > \alpha^2$



Adote: R=200 Ω, L=50mH e C=0,2μF.

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

- **Exemplo:** d) Qual o valor de *R* faz com que a resposta seja criticamente amortecida ?

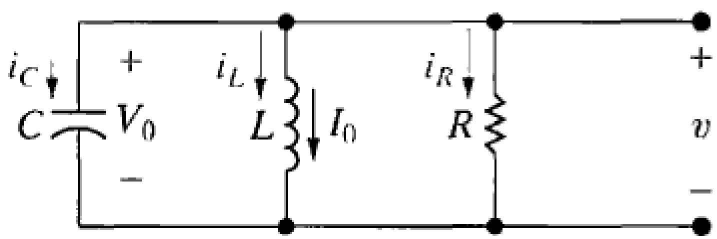
Para amortecimento crítico: $\omega_0{}^2 = \alpha^2$

$$\alpha^2 = \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 \qquad \omega_0{}^2 = \frac{1}{LC} = 10^8 \qquad \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = 10^8$$

$$\frac{1}{2RC} = 10^4$$

$$R = \frac{1}{\left(2\times10^4\right)\left(0{,}2\times10^{-6}\right)} = 250\,\Omega$$



- **Adote:** *R*=200 Ω, L=50mH e C=0,2μF.

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta superamortecida ($\omega_0^2 < \alpha^2$)

- As raízes da equação característica são reais e distintas;

- A solução para a tensão tem a forma:

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

(Resposta natural de tensão – circuito RLC em paralelo subamortecido).

- Onde s_1 e s_2 são as raízes da equação característica.
- As constantes A_1 e A_2 são determinadas pelas condições iniciais:

$$v(0^+) \qquad\qquad dv(0^+)/dt$$

Condições iniciais: Tensão inicial no capacitor V_0 e corrente inicial no indutor I_0

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta superamortecida

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

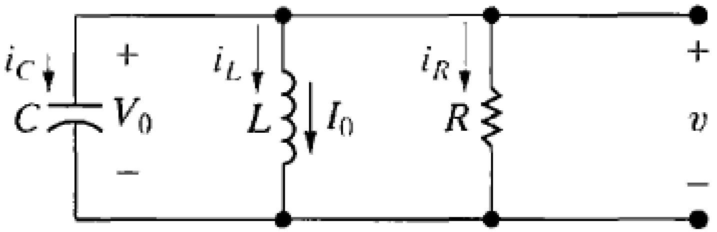
Note que : $v(0^+) = A_1 + A_2$ $\quad \dfrac{dv(0^+)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2$

Então, se conhecermos s_1 e s_2 a tarefa de determinar A_1 e A_2 se reduz a determinar $v(0^+)$ e $dv(0^+)/dt$.

1) O valor inicial de $v(0^+)$ é a tensão inicial do capacitor (V_0): $v(0^+) = V_0$

2) O valor inicial de $dv(0^+)/dt$ pode ser determinado por:

$$i_c(0^+) = C\frac{dv(0^+)}{dt} \Rightarrow \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C}$$



Onde pela LKC: $i_c(0^+) = -\dfrac{V_0}{R} - I_0$

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resumo do processo para determinar a resposta superamortecida

1)Determine as raízes da equação característica (s_1 e s_2) usando os valores de R, L e C.

2)Determine $v(0^+)$ e $dv(0^+)/dt$ usando análise de circuitos.

3)Determine os valores de A_1 e A_2 resolvendo as equações abaixo simultaneamente.

$$v(0^+) = A_1 + A_2$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2$$

4) Substitua os valores de s_1, s_2, A_1 e A_2 na equação abaixo para determinar a expressão de v(t) para t $\geq$ 0.

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

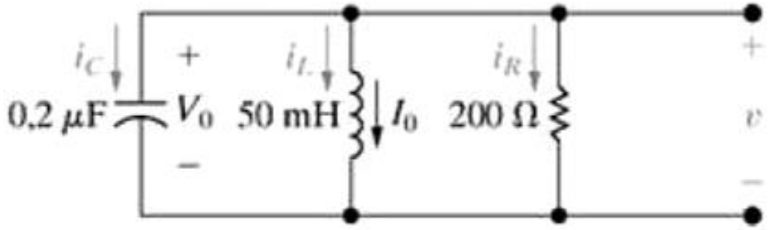
Exemplo: Para o circuito abaixo, considere que $v(0^+) = 12\text{V}$ e $i_L\,(0^+) = 30\text{mA}$.

a) Determine a corrente inicial em cada ramo do circuito.

b) Determine o valor inicial de dv/dt ($dv(0^+)/dt$).

c) Determine a expressão para $v(t)$.

d) Faça um gráfico de $v(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 250\mu\text{s}$.



Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Exemplo: Para o circuito abaixo, considere que $v(0^+) = 12V$ e $i_L\,(0^+) = 30mA$.

a) Determine a corrente inicial em cada ramo do circuito.

Solução:

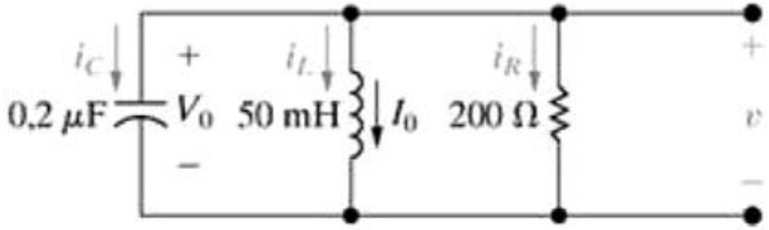
$$i_L\left(0^-\right) = i_L\left(0\right) = i_L\left(0^+\right) = 30\,mA$$

O capacitor mantém a tensão nos elementos em paralelo em 12 V, então:

$$i_R\left(0^+\right) = 12/200 = 60\,mA$$

Pela LKC:

$$i_C\left(0^+\right) = -i_L\left(0^+\right) - i_R\left(0^+\right)$$
$$= -90\,mA$$



Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

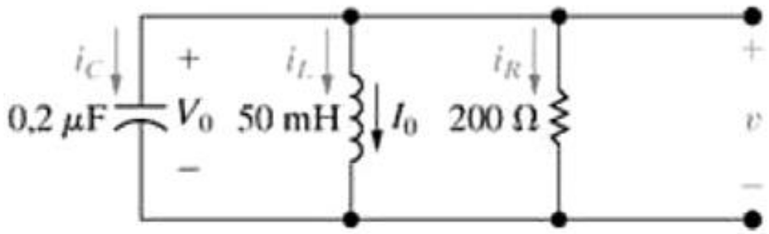
Exemplo: Para o circuito abaixo, considere que $v(0^+) = 12\text{V}$ e $i_L\,(0^+) = 30\text{mA}$.

b) Determine o valor inicial de dv/dt ($dv(0^+)/dt$).

Solução:

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{-90\times10^{-3}}{0{,}2\times10^{-6}} = -450kV/s$$



Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Exemplo: Para o circuito abaixo, considere que $v(0^+) = 12V$ e $i_L(0^+) = 30mA$.

c) Determine a expressão para $v(t)$

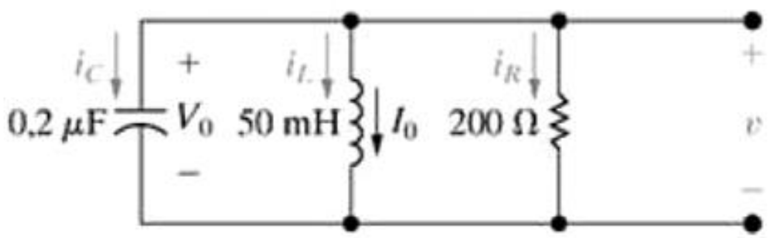
Solução:

As raízes da equação característica são determinadas pelos valores de R, L e C.

$$\alpha = \frac{1}{2(200)(0{,}2\times10^{-6})} = 1{,}25\times10^{4}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(50\times10^{-3})(0{,}2\times10^{-6})}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-8}}}$$

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\,2}}$$



$$s_1 = -1{,}25\times10^{4} + \sqrt{1{,}5625\times10^{8} - 10^{8}}$$
$$= -1250 + 7500 = -5000\,rad/s$$

$$s_2 = -1250 - 7500 = -20000\,rad/s$$

Raízes reais e distintas = superamortecida.

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Exemplo: Para o circuito abaixo, considere que $v(0^+) = 12\text{V}$ e $i_L\,(0^+) = 30\text{mA}$.

c) Determine a expressão para $v(t)$

Solução:

O próximo passo é determinar os coeficientes A_1 e A_2 em $v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

$$v(0^+) = 12V \qquad \frac{dv(0^+)}{dt} = -450kV/s$$

$$s_1 = -5000\,rad/s$$

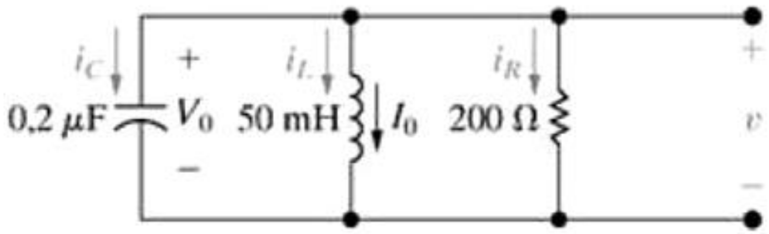
$$s_2 = -20000\,rad/s$$

$$v(0^+) = A_1 + A_2$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2$$

$$\begin{cases} 12 = A_1 + A_2 \\ -450\times10^3 = -5000A_1 - 20000A_2 \end{cases}$$

$$A_1 = -14V \quad e \quad A_2 = 26V$$



Então:

$$v(t) = \left(-14e^{-5000t} + 26e^{-20000t}\right)V,\ t \geq 0$$

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Exemplo: Para o circuito abaixo, considere que $v(0^+) = 12V$ e $i_L(0^+) = 30mA$.

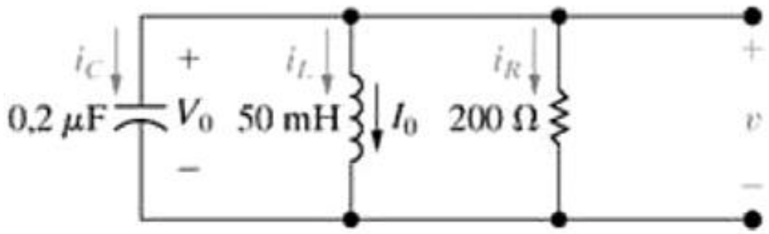
c) Determine a expressão para $v(t)$

Solução:

Verifique que: $$v(t)=\left(-14e^{-5000t}+26e^{-20000t}\right)V,\ t\geq 0$$

$$v(0)=12V$$

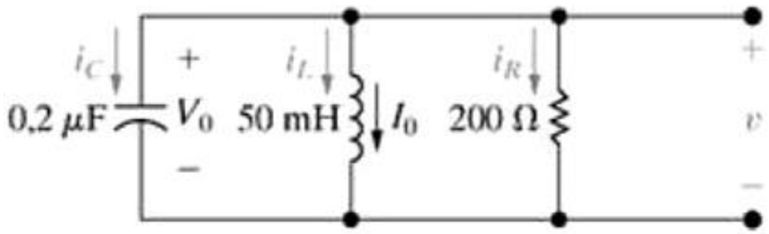
$$\frac{dv(0^+)}{dt}=-450kV/s$$

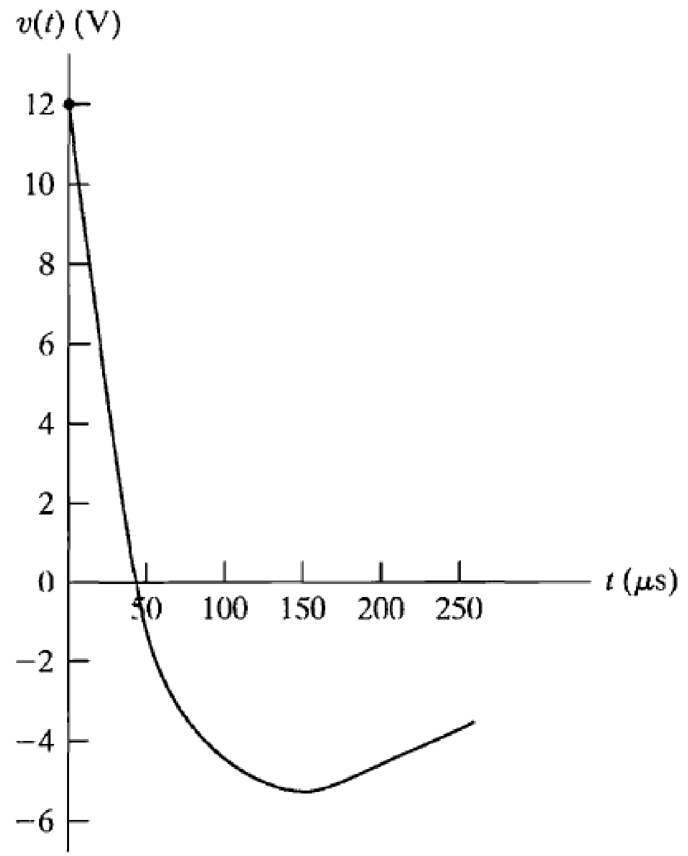


Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Exemplo: Para o circuito abaixo, considere que $v(0^{+}) = 12V$ e $i_L\,(0^{+}) = 30mA$.

d) Faça um gráfico de $v(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 250\mu s$.





Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta subamortecida ($\omega_0^2 > \alpha^2$)

- As raízes da equação característica são complexas.

$$\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{-\left(\omega_0^{\,2} - \alpha^2\right)} \\ &= -\alpha + j\sqrt{\omega_0^{\,2} - \alpha^2} \\ &= -\alpha + j\omega_d \\ s_2 &= -\alpha - j\omega_d \end{aligned}$$

Onde

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \alpha^2}$$

(Frequência angular subamortecida).

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta subamortecida ($\omega_0^2 > \alpha^2$)

A resposta da tensão subamortecida de um circuito RLC paralelo é:

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} sen\omega_d t$$

(Resposta natural de tensão – Circuitos RLC em paralelo subamortecidos).

Que decorre de: $v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

Demonstração: $s_1 = -\alpha + j\omega_d$, $s_2 = -\alpha - j\omega_d$ $\qquad e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm jsen\theta$

$$\begin{aligned} v(t) &= A_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + A_2 e^{-(\alpha + j\omega_d)t} \\ &= A_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t} \\ &= e^{-\alpha t}\left(A_1\cos\omega_d t + jA_1 sen\omega_d t + A_2\cos\omega_d t - jA_2 sen\omega_d t\right) \\ &= e^{-\alpha t}\left[(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + j(A_1 - A_2) sen\omega_d t\right] \end{aligned}$$

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

- **Resposta subamortecida ($\omega_0^2 > \alpha^2$)**

Demonstração:

Substituindo ($A_1 + A_2$) por B_1 e $j(A_1 - A_2)$ por B_2 , temos:

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left[(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + j(A_1 - A_2)sen\omega_d t\right]$$
$$= e^{-\alpha t}\left(B_1\cos\omega_d t + B_2 sen\omega_d t\right)$$
$$= B_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} sen\omega_d t$$

Obtemos B_1 e B_2 pela energia inicial armazenada no circuito, do mesmo modo que determinamos A_1 e A_2 para a resposta superamortecida, avaliando v e dv/dt em $t=0^+$.

Assim como s_1, s_2, α e ω_d são fixadas pelos parâmetros R, L e C do circuito.

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta subamortecida ($\omega_0^2 > \alpha^2$)

Demonstração:

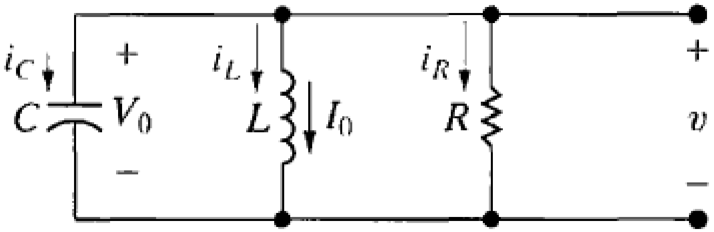
Para a resposta subamortecida as duas equações simultâneas que determinam B_1 e B_2, são:

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$v(0^+) = A_1 + A_2 \Rightarrow v(0^+) = V_0 = B_1$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2 \Rightarrow \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d \quad , \quad s_2 = -\alpha - j\omega_d$$



Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta subamortecida ($\omega_0^2 > \alpha^2$)

-Pela equação da resposta percebe-se que a resposta é oscilatória, com frequência ω_d;

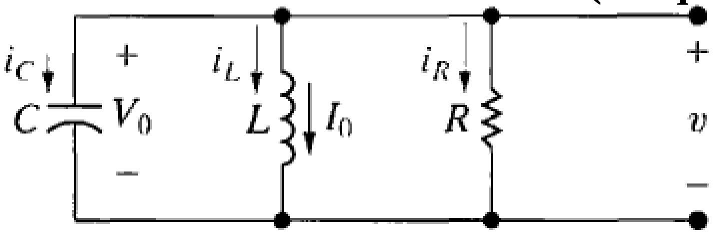
$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} sen\omega_d t$$

- A amplitude da oscilação diminui exponencialmente;
- A rapidez com que as oscilações são diminuem é determinada por α;
- Por isso, α também é denominado de coeficiente/fator de amortecimento;
- Isso explica porque ω_d é denominada frequência angular amortecida;

-Se $\alpha=0$, $\omega_d = \omega_n$;

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \alpha^2}$$

(Frequência angular subamortecida).



Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta subamortecida ($\omega_0^2 > \alpha^2$) - Exemplo

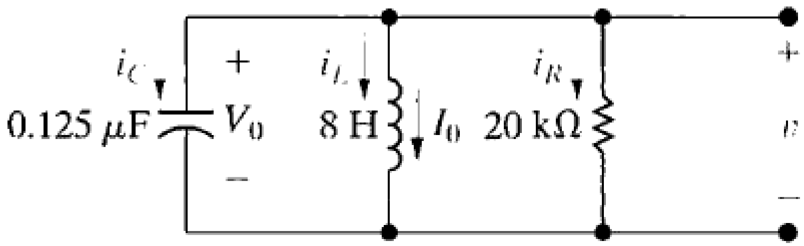
No circuito abaixo, V_0=0 e I_0 = -12,25 mA

a) Calcule as raízes da Equação característica;

b) Calcule v e dv/dt em t=0+;

c) Calcule a resposta da tensão para t $\geq$ 0.

d) Plote o gráfico v(t) versus t para o intervalo de tempo 0 $\leq$ t $\leq$ 11 ms.



Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta subamortecida ($\omega_0^2 > \alpha^2$) - Exemplo

No circuito abaixo, V_0=0 e I_0 = -12,25 mA

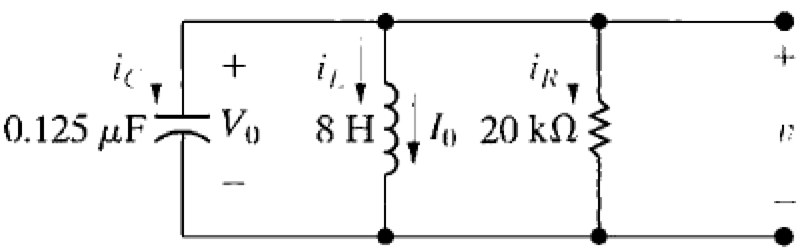
a) Calcule as raízes da Equação característica;

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\left(20\times 10^{3}\right)\left(0{,}125\times 10^{-6}\right)} = 200\, rad/s$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(8)\left(0{,}125\times 10^{-6}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{10^{-6}}} = \sqrt{10^{6}} = 10^{3}\, rad/s$$

Então:

$$\omega_0^{\ 2} > \alpha^2 \quad \textbf{(Resposta subamortecida)}$$



$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \alpha^2}$$

$$= \sqrt{10^{6} - 4\times 10^{4}} = 100\sqrt{96}$$

$$= 979{,}80\, rad/s$$

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta subamortecida ($\omega_0^2 > \alpha^2$) - Exemplo

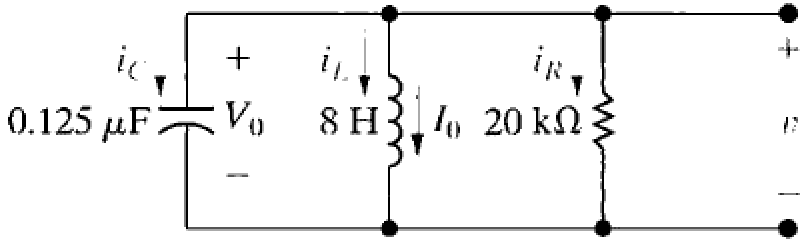
No circuito abaixo, V_0=0 e I_0 = -12,25 mA

a) Calcule as raízes da Equação característica;

$$\alpha = 200\, rad/s \qquad \omega_0 = 10^3\, rad/s \qquad \omega_d = 979{,}80\, rad/s$$

Então:

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d = -200 + j070{,}80\, rad/s$$
$$s_2 = -\alpha - j\omega_d = -200 - j070{,}80\, rad/s$$



Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta subamortecida ($\omega_0^2 > \alpha^2$) - Exemplo $V_0 = 0$ **e** $I_0 = -12{,}25$ **mA**

b) Calcule v e dv/dt em $t=0^+$;

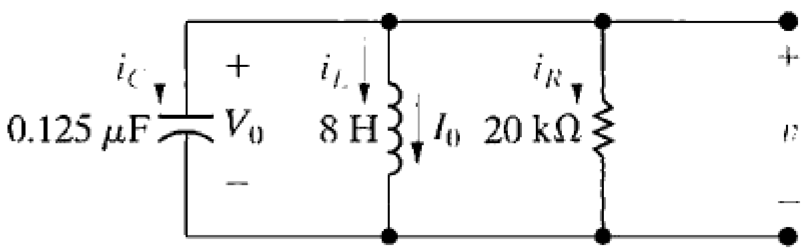
Como v é a tensão nos terminais de um capacitor, temos:

$$v(0) = v(0^+) = V_0 = 0$$

Como $v(0^+) = 0$, a corrente no ramo resistivo é zero em t = 0^+

$$i_c(0^+) = -(-12{,}25mA) = 12{,}25mA$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{(12{,}25)(10^{-3})}{(0{,}125)(10^{-6})} = 98000V/s$$



Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta subamortecida ($\omega_0^2 > \alpha^2$) - Exemplo **V_0=0 e I_0 = -12,25 mA**

c) Calcule a resposta da tensão para t ≥ 0.

Pelas Equações:

$$v(0^+) = V_0 = B_1$$

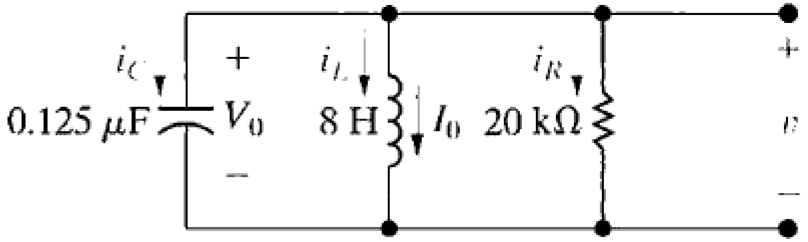
$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$$

$$B_1 = 0 \qquad B_2 = \frac{98000}{\omega_d} \approx 100V$$

Substituindo α, ω_d, B_1 e B_2 em:

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} sen\omega_d t$$

$$\alpha = 200\, rad/s \qquad \omega_d = 979{,}80\, rad/s$$

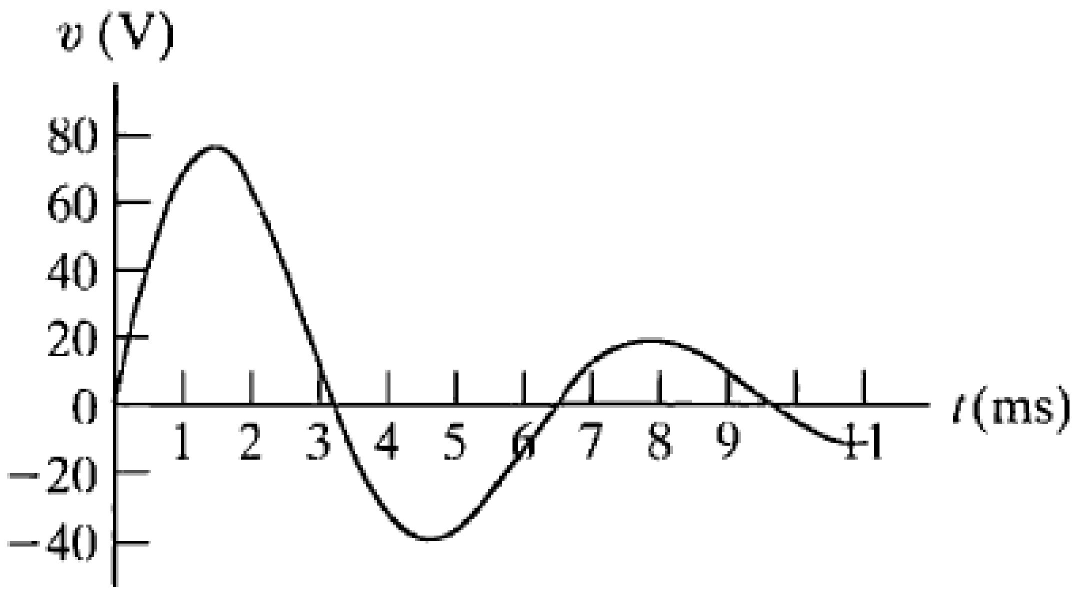


$$v(t) = 100e^{-200t} sen\,979{,}80t \quad V,\ t \geq 0$$

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta subamortecida ($\omega_0^2 > \alpha^2$) - Exemplo **V_0=0 e I_0 = -12,25 mA**

d) Plote o gráfico v(t) versus t para o intervalo de tempo 0 ≤ t ≤ 11 ms.



O gráfico indica claramente a natureza oscilatória amortecida da resposta subamortecida.

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resposta criticamente amortecida ($\omega_0^2 = \alpha^2$)

-As duas raízes da equação característica são reais e iguais:

$$s = -\alpha \pm \sqrt{-\left(\omega_0^{\ 2} - \alpha^2\right)}$$

- Se $\omega_0 = \alpha$, então: $$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{1}{2RC}$$

- Solução para a equação diferencial:

$$v(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}$$

(Resposta natural da tensão – circuito RLC paralelo criticamente amortecido).

- Equações para determinar D_1 e D_2:

$$v(0^+) = V_0 = D_2$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2$$

Obs.: Na prática são raros, pois dificilmente ω_0^2 é exatamente igual a α^2.

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resumo do procedimento para cálculo da resposta natural

1) Calcular as raízes da equação característica;

2) Verificar se a resposta é superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida;

3a) Se as raízes forem reais e distintas ($\omega_0^2 < \alpha^2$), a resposta será **superamortecida** e a tensão será:

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Onde:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\ 2}} \qquad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\ 2}} \qquad \alpha = \frac{1}{2RC} \qquad \omega_0^{\ 2} = \frac{1}{LC}$$

Os valores de A_1 e A_2 são determinados resolvendo as equações:

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2 \qquad v(0^+) = A_1 + A_2$$

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resumo do procedimento para cálculo da resposta natural

1) Calcular as raízes da equação característica;

2) Verificar se a resposta é superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida;

3b) Se as raízes forem complexas ($\omega_0^2 > \alpha^2$), a resposta será **subamortecida** e a tensão será:

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} sen \omega_d t$$

Onde:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \qquad s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \qquad \alpha = \frac{1}{2RC} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Os valores de B_1 e B_2 são determinados resolvendo as equações:

$$v(0^+) = V_0 = B_1 \qquad \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$$

Resposta natural de um circuito RLC em paralelo

Resumo do procedimento para cálculo da resposta natural

1) Calcular as raízes da equação característica;

2) Verificar se a resposta é superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida;

3c) Se as raízes forem reais e iguais ($\omega_0^2 = \alpha^2$), a resposta será **criticamente amortecida** e a tensão será:

$$v(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}$$

Onde:

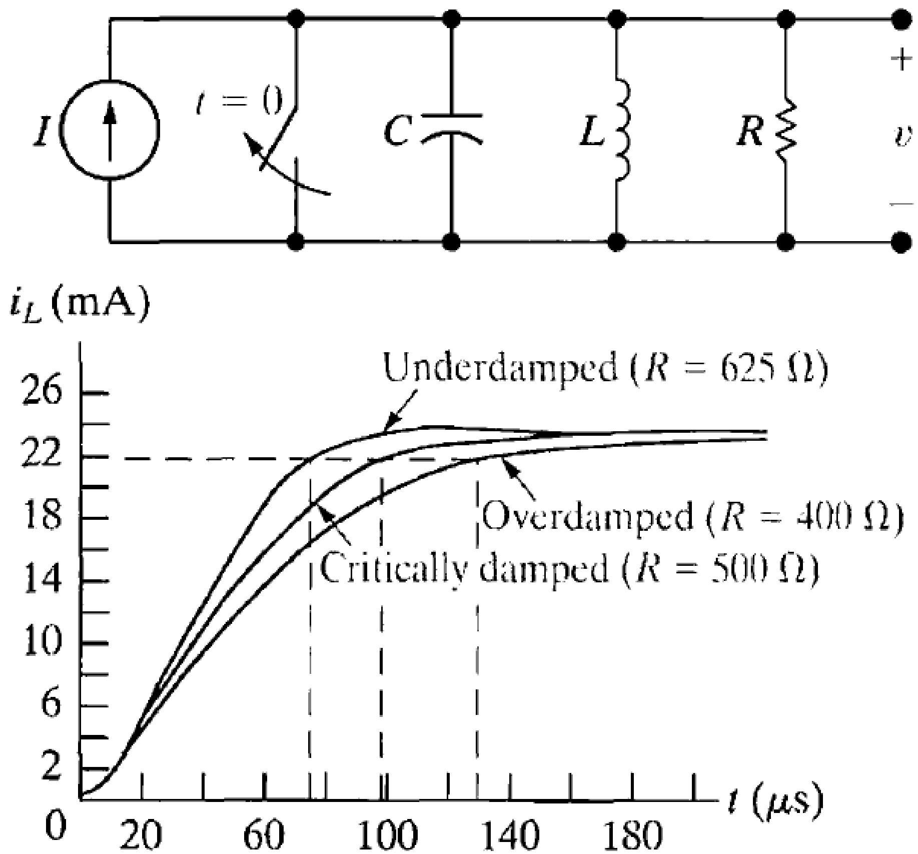
$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{1}{2RC} \qquad \alpha = \omega_0$$

Os valores de D_1 e D_2 são determinados resolvendo as equações:

$$v(0^+) = V_0 = D_2 \qquad \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2$$

Resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo

- **Introdução**



Resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo

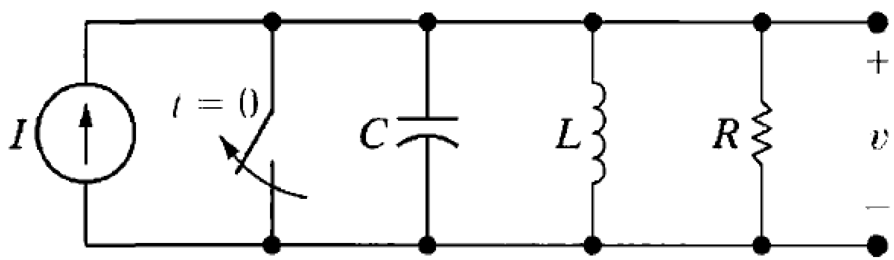
Introdução

<u>Abordagem direta:</u>

A solução de uma equação diferencial com uma **função forçante constante** é igual à resposta forçada mais uma função resposta cuja forma é idêntica à resposta natural.

$$i = i_f + \left\{ \begin{matrix} \textit{função da mesma forma} \\ \textit{que a resposta natural} \end{matrix} \right\}$$

$$v = v_f + \left\{ \begin{matrix} \textit{função da mesma forma} \\ \textit{que a resposta natural} \end{matrix} \right\}$$



Resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo

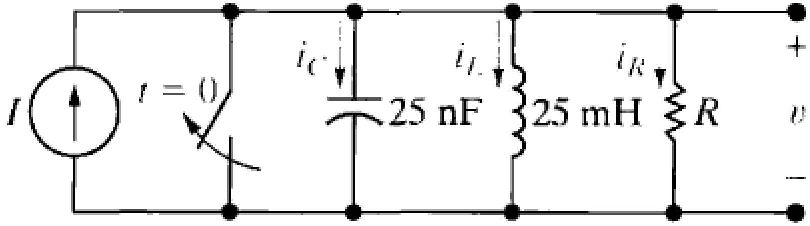
Exemplo: A energia inicial armazenada no circuito é zero. Em t=0 a fonte de corrente cc de 24 mA é aplicada no circuito. O valor do resistor é 400 Ω.

a) Qual o valor inicial de i_L ?

b) Qual é o valor inicial de di_L/dt ?

c) Quais são as raízes da equação característica ?

d) Qual é a expressão numérica para $i_L(t)$ quanto $t \geq 0$?



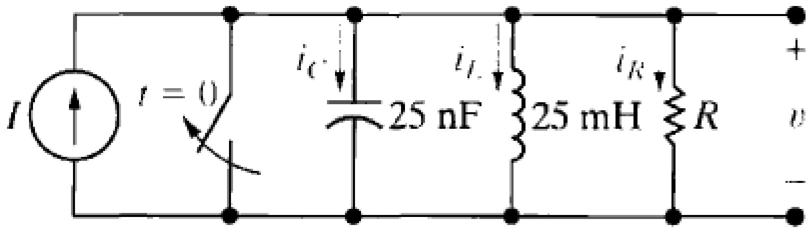
Resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo

Exemplo: A energia inicial armazenada no circuito é zero. Em t=0 a fonte de corrente cc de 24 mA é aplicada no circuito. O valor do resistor é 400 Ω.

a) Qual o valor inicial de i_L ?

Como a energia inicial armazenada no circuito é zero, o valor inicial de i_L é zero.

Como o indutor impede a variação instantânea na corrente, $i_L\,(0^+) = 0$.



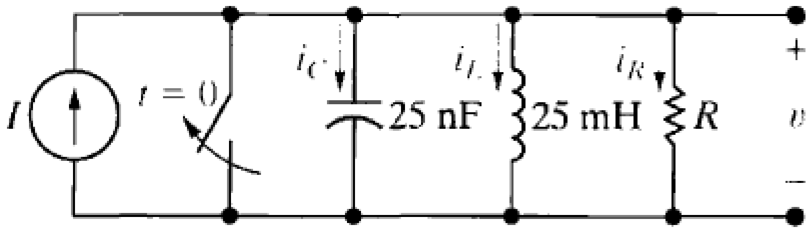
Resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo

Exemplo: A energia inicial armazenada no circuito é zero. Em t=0 a fonte de corrente cc de 24 mA é aplicada no circuito. O valor do resistor é 400 Ω.

b) Qual é o valor inicial de di_L/dt ?

A tensão inicial no capacitor é zero, portanto também será zero no instante logo após a abertura da chave, v(0+)=0. Então:

$$v = L\frac{d_{i_L}}{dt} \Rightarrow \frac{d_{i_L}}{dt}\left(0^+\right) = 0$$



Resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo

Exemplo: A energia inicial armazenada no circuito é zero. Em t=0 a fonte de corrente cc de 24 mA é aplicada no circuito. O valor do resistor é 400 Ω.

c) Quais são as raízes da equação característica ?

$$\omega_0^{\ 2} = \frac{1}{LC} = \frac{10^{12}}{(25)(25)} = 16\times 10^8$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^9}{(2)(400)(25)} = 5\times 10^4\, rad/s$$

$$\alpha^2 = 25\times 10^8\, rad/s$$

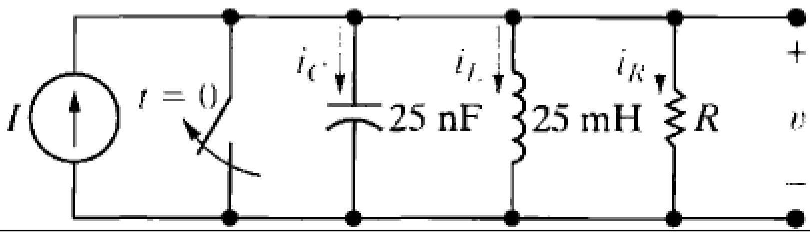
Raízes reais e distintas (superamortecida)

$$\omega_0^{\ 2} < \alpha^2$$

$$s_1 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\ 2}}$$

$$s_1 = -5\times 10^4 + 3\times 10^4 = -20000\, rad/s$$

$$s_2 = -5\times 10^4 - 3\times 10^4 = -80000\, rad/s$$



Resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo

Exemplo: A energia inicial armazenada no circuito é zero. Em t=0 a fonte de corrente cc de 24 mA é aplicada no circuito. O valor do resistor é 400 Ω.

d) Qual é a expressão numérica para $i_L(t)$ quanto $t \geq 0$?

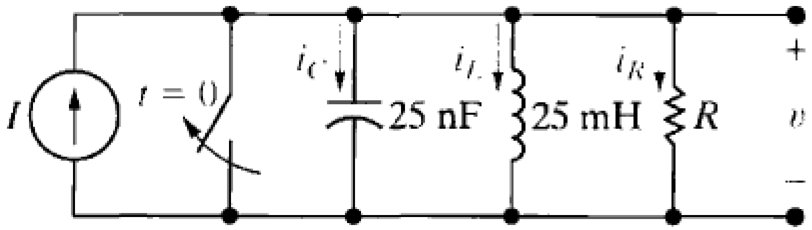
$$i_L = I_f + A_1' e^{s_1 t} + A_2' e^{s_2 t}$$

$$i_L(0) = I_f + A_1' + A_2' = 0$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = s_1 A_1' + s_2 A_2' = 0$$

$$A_1' = -32\,mA \qquad A_2' = 8\,mA$$

A solução para $i_L(t)$ é: $i_L(t) = \left(24 - 32e^{-20000t} + 8e^{-80000t}\right) mA\,,\ t \geq 0$



Resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo

- **Exemplo 2:** O resistor é aumentado para 625 Ω. Determine $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

$$\omega_0^{\,2} = \frac{1}{LC} = \frac{10^{12}}{(25)(25)} = 16\times10^{8}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^{9}}{(2)(625)(25)} = 3{,}2\times10^{4}\ rad/s$$

$$\alpha^2 = 10{,}24\times10^{8}\ rad/s$$

Raízes complexas (subamortecida) $\omega_0^{\,2} > \alpha^2$

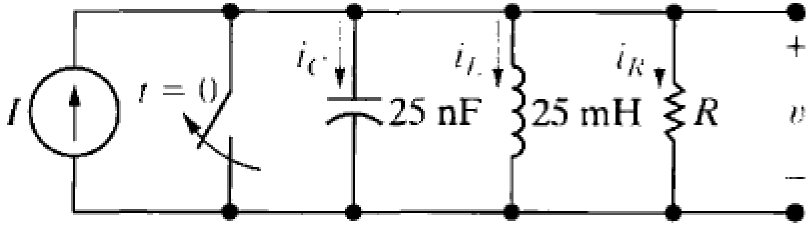
$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \alpha^2}$$

$$\omega_d = 2{,}4\times10^{4}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$s_1 = -3{,}2\times10^{4} + j2{,}4\times10^{4}\ rad/s$$

$$s_2 = -3{,}2\times10^{4} - j2{,}4\times10^{4}\ rad/s$$



Resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo

- **Exemplo 2:** O resistor é aumentado para 625 Ω. Determine $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

$$i_L(0) = I_f + A_1' + A_2' = 0 \qquad \frac{di_L}{dt}(0) = s_1 A_1' + s_2 A_2' = 0$$

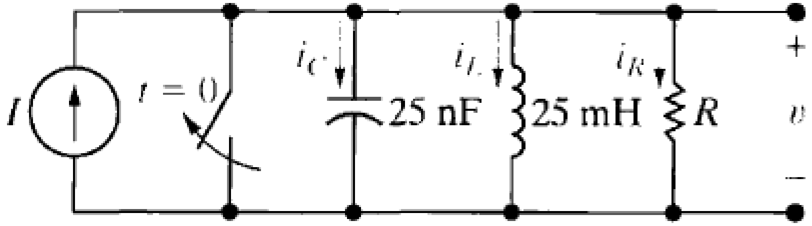
$$i_L(0) = I_f + B_1' = 0 \qquad \frac{di_L}{dt}(0) = -\alpha B_1' + \omega_d B_2'$$

$$B_1' = -24\,mA \qquad B_2' = -32\,mA \qquad \alpha = 3{,}2 \times 10^4\,rad/s$$

$$\omega_d = 2{,}4 \times 10^4$$

$$i_L(t) = I_F + B_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} sen\,\omega_d t$$

$$i_L(t) = 24 - 24e^{-32000t}\cos 24000t - 32e^{-32000t} sen 24000t \;\; mA \;\;,\;\; t \geq 0$$



Referências Bibliográficas:

Nilsson, J.W. e Riedel, S.A., Circuitos Elétricos, 8ª Edição, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2009.

Svodoba, J.A. and Dorf, R.C., Introduction to Electric Circuits, 9th edition, Wiley, 2011.